

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo a análise do fenômeno das vibrações torcionais em árvores de manivelas de motores de combustão interna. Como exemplo, a formulação proposta será aplicada no estudo da árvore de manivelas de um motor fabricado pela empresa MWM Motores Diesel Ltda., de seis cilindros em linha, quatro tempos, considerando-se a utilização de um amortecedor de vibrações de material elastomérico acoplado ao componente. Da análise das vibrações torcionais é possível de se obter os torques atuantes em cada secção do virabrequim. Estes esforços poderão ser aplicados posteriormente como condições de contorno a um modelo de elementos finitos, para que juntamente aos demais carregamentos existentes, seja feita a verificação do ciclo de fadiga atuante, de modo a avaliar o coeficiente de segurança do componente. Apesar de não ser este o foco deste trabalho, pode-se notar a importância da análise das vibrações torcionais no dimensionamento estrutural de uma árvore de manivelas. Iremos comparar as amplitudes de vibrações torcionais teóricas às obtidas experimentalmente, para a validação do modelo matemático proposto.

Uma árvore de manivelas está sujeita a uma série de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica gerando vibrações e conseqüentemente tensões, as quais poderão ser quantificadas para que possamos assegurar a integridade estrutural do componente.

Atualmente, devido às exigências técnicas e comerciais, existe a necessidade dos motores de combustão interna operar com pressões de combustão cada vez mais elevadas, utilizando-se componentes que devem ser otimizados de forma a evitarmos o seu dimensionamento incorreto.

Sendo assim, foi desenvolvida uma metodologia para o cálculo das amplitudes de vibrações torcionais e torques gerados por estas condições de operação, para que se avalie a resistência estrutural das árvores de manivelas dos motores de combustão interna, utilizados nas mais variadas aplicações.

Este trabalho está dividido em quatro partes principais. Na revisão da literatura são evidenciados os trabalhos semelhantes ao desse estudo e destacam-se os principais objetivos a serem alcançados.

Em seguida, é apresentada toda a abordagem matemática utilizada para a

realização dos cálculos, mostrando passo a passo todos os conceitos necessários para a compreensão do assunto, partindo-se da análise cinemática do sistema biela-manivela e a posterior quantificação dos esforços dinâmicos. Determinados esses carregamentos, iniciaremos a descrição da metodologia para o cálculo e análise das vibrações torcionais, explicando como deverá ser obtido um sistema equivalente que irá simular o componente real e dele tiraremos todas as informações necessárias para que se atendam aos nossos objetivos.

2 VIBRAÇÕES TORCIONAIS

As vibrações torcionais existem nos motores de combustão interna, devido à aplicação de excitações periódicas que atuam nos componentes responsáveis pela geração de torque, tais como: Árvore de manivelas, bielas, pistões, etc. A componente tangencial da força atuante no pistão exerce uma ação de torção periódica, ora atuando num sentido ora em outro, promovendo as vibrações torcionais. Esse fenômeno pode em alguns casos, gerar deslocamentos angulares de grandes amplitudes, ocasionando falhas estruturais na árvore de manivelas e em outros componentes do motor.

Basicamente, a análise é feita iniciando-se pela obtenção de um modelo discretizado da árvore de manivelas, o qual deverá possuir características de inércia, rigidez e amortecimento que represente o sistema real da melhor forma possível. Em seguida, devemos calcular o torque de excitação levando-se em conta as forças dos gases gerados pela combustão no interior do cilindro e as forças de inércia. Por se tratar de excitações periódicas, a análise da resposta dinâmica deverá ser feita expandindo-se esse torque em série de Fourier e os deslocamentos serão calculados para cada ordem de vibração. As amplitudes obtidas podem ser comparadas às obtidas experimentalmente e dessa forma, podemos avaliar estruturalmente o virabrequim, prever e reduzir níveis de ruído, analisar juntas de fixação de volantes, polias, etc.

Johnston, P. R. e Shusto, L. M. [1], desenvolveram e aplicaram uma técnica para analisar o comportamento das vibrações torcionais em motores Diesel no regime permanente e transitório de operação, através do método de superposição modal. Os resultados obtidos dessas análises são comparados aos obtidos experimentalmente.

Alguns sistemas podem apresentar vibrações excessivas em algumas rotações específicas. Este fenômeno foi primeiramente estudado por Draminsky [2]. Hestermann e Stone [3] apontaram que as causas dos inesperados deslocamentos de grandes amplitudes em múltiplos da rotação do motor, são as inércias variáveis do sistema biela-manivela.

No passado os efeitos ocasionados pelas características variáveis das inércias dos motores de combustão internas, não eram computados por serem considerados desprezíveis nos cálculos das vibrações torcionais. Recentemente, verificou-se que

os efeitos secundários das inércias poderiam levar a inúmeras falhas em motores de grande porte. Paricha, M. S. [4], examinou em detalhes esses efeitos, incluiu em seu trabalho os estudos de Draminsky e ao final concluiu que em certas circunstâncias de operação, a interação das forças de combustão com os efeitos secundários de ressonância, podem ser extremamente danosas aos virabrequins.

O efeito da consideração dos momentos de inércia como sendo não constantes nas vibrações torcionais de árvores de manivelas, também foram estudados por Brusa et al. [5]. A introdução de funções que levam em conta a variação da inércia do sistema em função do ângulo do virabrequim deve ser considerada principalmente quando as massas das bielas e pistões forem significativamente grandes, quando comparadas aos demais componentes do motor. Neste trabalho foi considerado apenas o efeito das vibrações torcionais, desprezando-se os deslocamentos axiais. Do estudo do comportamento vibratório das árvores de manivelas feito na referência [5] concluí-se que apesar da existência das vibrações axiais e flexionais, além das torcionais, estas últimas são as que correspondem aos modos mais críticos de vibração para os componentes dos motores de combustão interna.

Song et al. [6] analisaram a influência do acoplamento entre as vibrações torcionais e axiais nas árvores de manivelas. Este acoplamento gera vibrações de grandes amplitudes quando as frequências naturais axiais e torcionais são iguais, ou quando a frequência natural do modo axial é o dobro da torcional.

Lacy [7] reportou a análise torcional de um motor de quatro cilindros, ciclo Otto à gasolina. Neste modelo os nós do virabrequim representam os munhões, os quais são conectados aos mancais principais levando-se em conta as propriedades elásticas do filme de óleo. Estas propriedades influenciam na rigidez radial e rotacional, bem como o amortecimento do filme de óleo. Boysal e Rahnejat [8] utilizaram o equacionamento proposto por Lacy e incluíram num modelo de multi-corpos, a influência da dinâmica dos corpos rígidos de todas as inércias envolvidas para avaliar o ruído gerado pelas vibrações do motor.

A estimativa dos coeficientes de amortecimento torcional nos motores de combustão interna, foi inicialmente estudada pelos pesquisadores Den Hartog [9] e Ker Wilson [10], entre outros. Estes coeficientes eram obtidos através de observações empíricas em motores específicos para este fim e os valores obtidos eram na maioria das vezes, imprecisos, gerando grandes variações na resposta

dinâmica dos sistemas analisados.

Modelos teóricos e híbridos para estimativa dos coeficientes de amortecimento, foram propostos por Iwamoto e Wakabayashi [11], os quais levam a relações analíticas entre o amortecimento e outros parâmetros mensuráveis dos motores. Wang e Lim [12] chegaram a estimativas precisas do coeficiente de amortecimento absoluto de um motor monocilíndrico acionado por um motor elétrico. Foram levados em conta os dois primeiros modos de vibrar do sistema e os coeficientes de amortecimento para esses modos foram obtidos em função do ângulo do virabrequim.

Y. Honda e T. Saito [13] estudaram as vibrações torcionais em um motor Diesel de seis cilindros, com um amortecedor de borracha para redução dos efeitos vibratórios. O método de análise utilizado foi pela matriz de transição de estado, que pode ser verificado na referência [20] e foi observado que a influência da rigidez dinâmica do elastômero é mais significativa para as características vibratórias do sistema, do que o amortecimento do motor e do “damper” em si. Esta característica é determinada principalmente pela geometria da borracha e as características da composição química do componente.

As vibrações torcionais são geralmente calculadas considerando-se um comportamento uniforme do motor, com pressões de combustão idênticas entre os cilindros. Esta condição é verdadeira apenas no início de operação da máquina, ou sob condições ideais de manutenção do equipamento. Na prática, estas condições dificilmente ocorrem e variações consideráveis no espectro das forças de excitação podem existir, influenciando de forma substancial as vibrações torcionais. Maragonis, I.E. [14] realizou uma pesquisa, na qual essas diferenças dos esforços entre os cilindros foram levadas em consideração. Resultados teóricos e experimentais são apresentados ao final do estudo, mostrando que realmente existem situações em que as amplitudes das vibrações podem divergir bastante das esperadas.

As figuras 1 e 2 mostram respectivamente, uma ilustração do motor no qual foram feitas as análises de vibrações torcionais e sua curva de oferta.

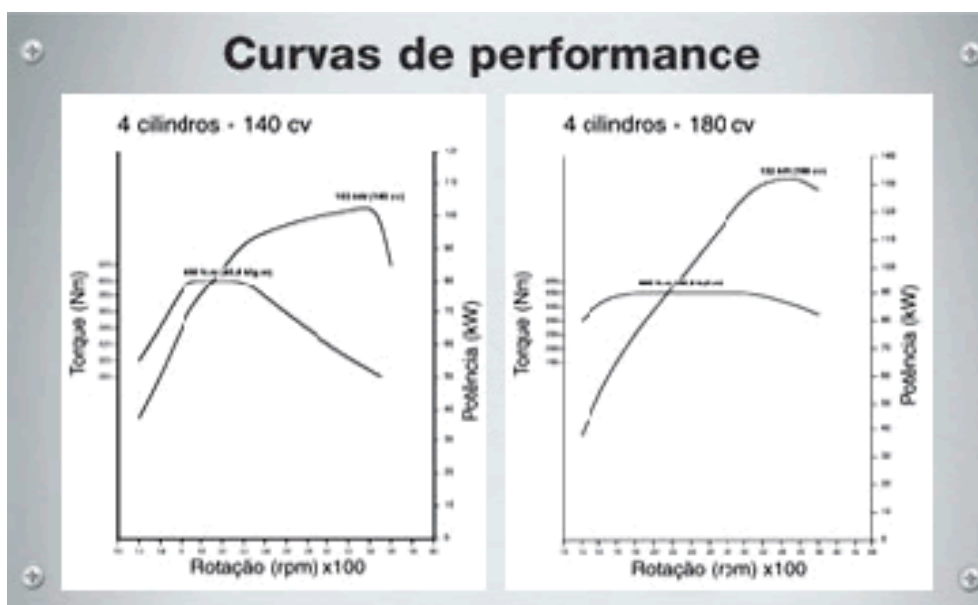
Figura 1 - Motor *Acteon* de 7,2 litros produzido pela MWM Motores Diesel Ltda



]

Fonte: Johnston, P. R. e Shusto, L. M., 1987, p. 21.

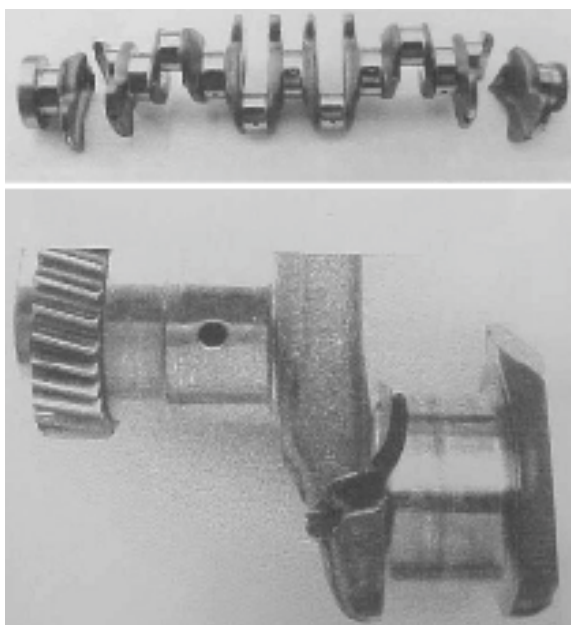
Figura 2 - Curva de oferta do motor *Acteon*



Fonte: Johnston, P. R. e Shusto, L. M., 1987, p. 24.

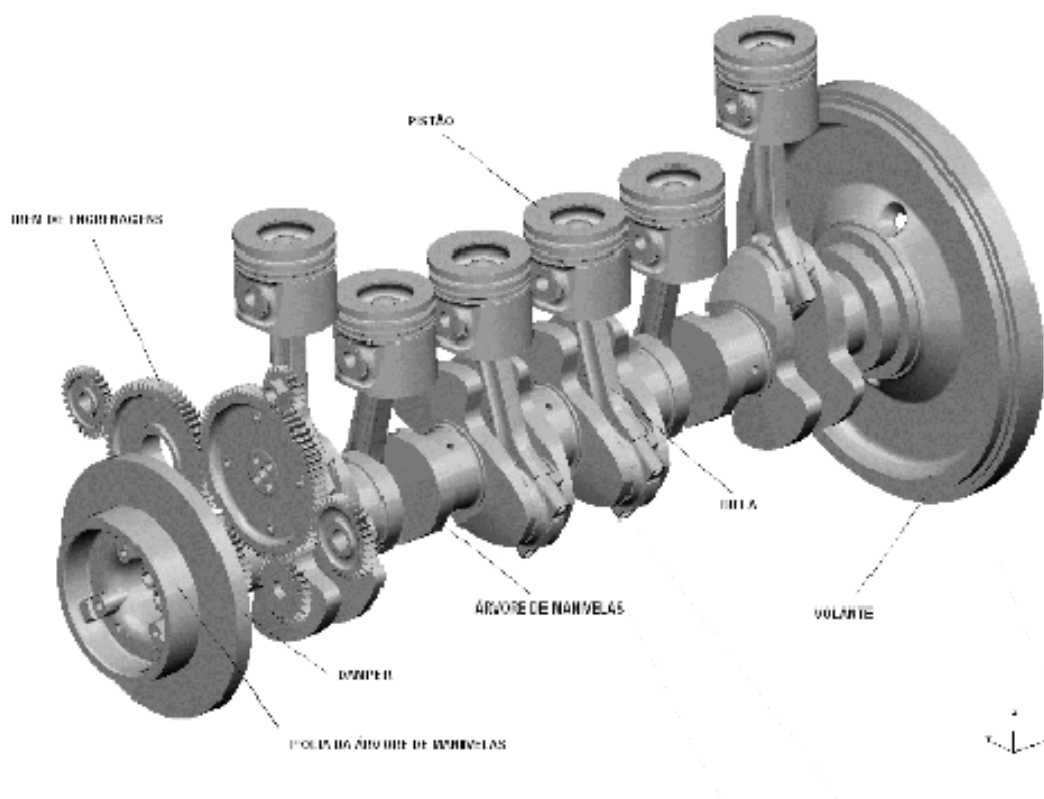
Já a figura 1.3 apresenta a fotografia de uma árvore de manivelas que apresentou falha estrutural devido às vibrações torcionais.

Figura 3 - Falha estrutural em uma árvore de manivelas devido às vibrações torcionais excessivas



Johnston, P. R. e Shusto, L. M., 1987, p. 30.

Figura 4 - Árvore de manivelas e demais componentes responsáveis pela geração de torque do motor



Fonte: Johnston, P. R. e Shusto, L. M. 1987, p. 42.

As principais características técnicas do motor, cuja árvore de manivelas é objeto deste estudo, são as seguintes:

- a) Seqüência de ignição: 1-5-3-6-2-4;
- b) Sentido de rotação: Anti-horário, visto pelo volante;
- c) Comprimento da biela: 207 mm;
- d) Diâmetro do pistão: 105 mm;
- e) Meio curso do pistão: 68,5 mm;
- f) Torque máximo: 900 N.m a 1300 rpm;
- g) Potência máxima: 191 kW a 2500 rpm;
- h) Rotação máxima do motor: 2850 rpm.

Em relação ao exemplo estudado neste trabalho, devido à maior potência a ser obtida do motor, conseguida através do aumento do diâmetro e curso dos pistões e aliados à adaptação de um sistema de injeção eletrônica de combustível, maiores solicitações no virabrequim iriam surgir, tornando necessária a verificação do dimensionamento estrutural deste componente, visando determinar a viabilidade de sua utilização nesta nova aplicação.

O principal motivo que levou ao estudo dessa metodologia de cálculo foi a necessidade de se compreender esses fenômenos vibratórios para possamos prever o comportamento dinâmico da árvore de manivelas, evitando-se investimentos financeiros em alterações desnecessárias nos ferramentais já existentes para o forjamento das peças.

Existem no mercado, programas computacionais destinados ao cálculo das vibrações torcionais em virabrequins, dentre os quais podemos citar o *Bricks* da empresa AVL List GmbH, que utilizam abordagens matemáticas diferentes da proposta neste estudo, apresentando porém, resultados muito semelhantes.

A idéia de desenvolver um programa de computador para a realização desses cálculos teve como um dos principais objetivos, a aquisição da tecnologia necessária para o desenvolvimento de componentes, para o uso em novos motores comercializados pela empresa MWM Motores Diesel Ltda.

Outro ponto crucial para a tomada da decisão do desenvolvimento deste programa, foi a facilidade de implementação de novas ferramentas de cálculos, específicas para o motor em estudo. Podemos citar como exemplos: A consideração

de pressões de combustão diferentes para cada faixa de rotação do motor, implementação de amortecedores viscosos, utilização de amortecedores de duas massas, simulação de falha ou falta de combustão em um ou mais cilindros, etc.

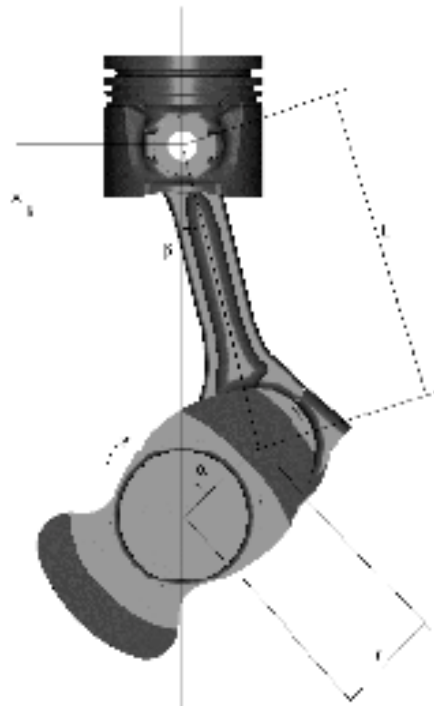
3 MODELAGEM TEÓRICA

Inicialmente para que se entenda o comportamento dinâmico de um motor de vários cilindros, é necessária a compreensão e o equacionamento cinemático para um motor monocilíndrico, tal como em [18], [19]. Esta formulação será utilizada futuramente para a determinação dos esforços atuantes no sistema.

3.1 Cinemática do sistema biela-manivela

A posição instantânea do pistão em relação ao PMS pode ser escrita em função dos ângulos e dimensões destacados na figura 5:

Figura 5 - Sistema biela-manivela



Fonte: Hestermann, D. C. and Stone, B. J. 1994, p. 11.

$$x = (r + L) \cos \alpha - r_c \cos \beta \quad (3.1)$$

(3.1)

Agrupando os termos:

$$r = r \cdot (1 - \cos \alpha) + l \cdot (1 - \cos \beta) \quad (3.2)$$

Podemos obter o ângulo da biela β em função do ângulo do virabrequim α . Chamando de λ , a relação entre o meio curso da árvore de manivelas e o comprimento da biela, temos:

$$\frac{r}{l} = \frac{r}{l} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} \Rightarrow \frac{r}{l} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} \quad (3.3)$$

$$\cos \beta = \frac{1 - \frac{r}{l}(1 - \cos \alpha)}{1 - \frac{r}{l}} = \frac{1 - \frac{r}{l} + \frac{r}{l} \cos \alpha}{1 - \frac{r}{l}} \quad (3.3)$$

$$\therefore r = r \cdot (1 - \cos \alpha) + l \cdot \left(1 - \frac{1 - \frac{r}{l} + \frac{r}{l} \cos \alpha}{1 - \frac{r}{l}}\right) \quad (3.4)$$

Expandindo em série a expressão da equação 3.3, teremos:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{8} \lambda^4 \cos^4 \alpha - \frac{1}{16} \lambda^6 \cos^6 \alpha + \dots$$

A partir das relações trigonométricas:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \quad (3.5)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha \quad (3.6)$$

$$\cos^6 \alpha = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\alpha + \frac{3}{16} \cos 4\alpha + \frac{1}{32} \cos 6\alpha \quad (3.7)$$

E fazendo-se as devidas substituições, chegaremos finalmente à seguinte expressão:

$$\cos \theta = 1 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \cos 2\alpha - \frac{r^4}{64} \cos 4\alpha + \frac{r^6}{512} \cos 6\alpha + \dots$$

Portanto, a equação que descreverá o movimento do pistão em relação ao PMS pode ser escrita da seguinte forma, desconsiderando-se os termos superiores à segunda ordem:

$$x = r (1 - \cos \alpha) + L \frac{r^2}{4} (1 - \cos 2\alpha) \quad (3.5)$$

Podemos agora, obter as equações da velocidade e aceleração instantâneas do pistão, como segue:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dx}{d\alpha}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dv}{d\alpha}$$

Onde a velocidade angular da árvore de manivelas ω , pode ser expressa como:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{60} \quad ; \quad \text{com } f = [\text{rpm}]$$

Derivando a equação 3.5 e fazendo a substituição, teremos:

$$v = \omega r (\sin \alpha + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha) \quad (3.6)$$

Derivando a equação 3.6, teremos:

$$a = \omega^2 \cdot r \cdot (\cos \theta + \lambda \cdot \cos 2\theta) \quad (3.7)$$

Podemos ainda, utilizar mais termos da série e considerar a seguinte equação para a obtenção da aceleração:

$$a = \omega^2 \cdot r \cdot (\cos \theta + \lambda \cdot \cos 2\theta - \frac{\lambda^2}{4} \cos 4\theta + \frac{9\lambda^3}{128} \cos 6\theta)$$

Determinada a equação da aceleração instantânea do pistão, é possível a determinação dos esforços dinâmicos atuantes no sistema. Esse equacionamento será demonstrado a seguir.

3.2 Esforços dinâmicos – forças de inércia

Existem dois tipos de forças inerciais que atuam no sistema biela-manivela. As massas envolvidas podem ser reduzidas e separadas basicamente em dois tipos, sendo uma primeira de movimento puramente rotativo e outra que descreve um movimento linear alternativo.

3.2.1 Forças de inércia alternativas

São esforços decorrentes do movimento das massas alternativas. Essas massas podem ser consideradas como sendo a soma das massas do pistão incluindo pino, anéis, travas e a massa alternativa da biela. A divisão das massas da biela será explicada na seqüência.

Para obtenção da força de inércia alternativa, utilizaremos a seguinte expressão:

$$F_{ca} = m_p \cdot r \cdot \omega^2 (\cos \theta + \lambda \cdot \cos 2\theta - \frac{\lambda^2}{4} \cos 4\theta + \frac{9\lambda^3}{128} \cos 6\theta) \quad (3.8)$$

A consideração apenas dos termos de primeira e segunda ordens para o cálculo da força de inércia alternativa, não implica numa redução significativa na precisão dos cálculos. Foi observado que a diferença entre esses valores é menor que 0,55%.

3.2.2 Forças de inércia rotativa

São forças geradas pelas massas que possuem movimento puramente rotativo. Podem ser consideradas como sendo a soma da massa rotativa da biela com a massa da manivela do virabrequim.

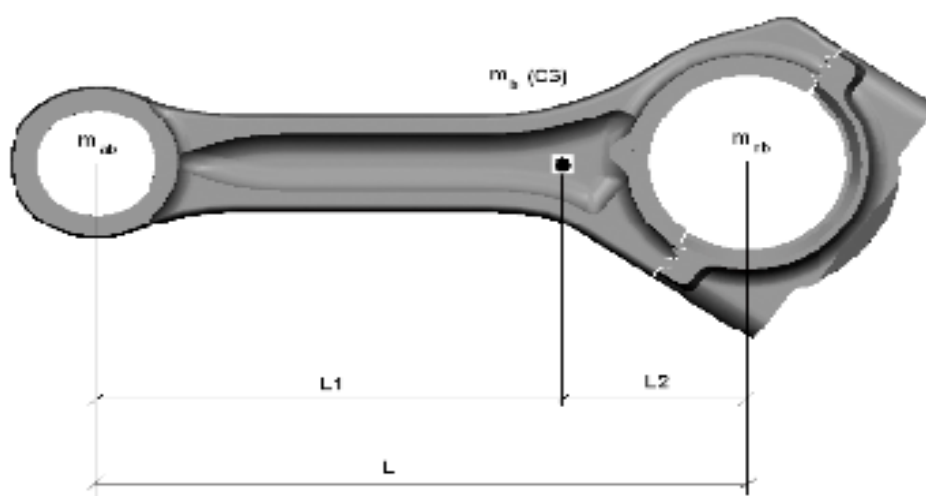
É importante observar que, dependendo do grau de balanceamento da árvore de manivelas maiores ou menores serão as tensões geradas por esses esforços. Porém, para o cálculo das vibrações torcionais, não se torna necessária a quantificação dessas solicitações e neste caso, iremos determiná-las apenas de modo informativo.

A força de inércia rotativa pode ser obtida através da equação:

$$F_r = m_r \cdot r \cdot \omega^2 \quad (3.9)$$

A biela, como visto, pode ser dividida em duas massas equivalentes, uma que irá descrever um movimento alternativo e outra de movimento rotativo puro. Utilizaremos as seguintes relações para essa divisão, conforme a figura abaixo:

Figura 6 - Divisão das massas da biela



$$m_c = \frac{m_2 \cdot L_2}{L} ; m_{c'} = \frac{m_1 \cdot L_1}{L}$$

A divisão de massas é descrita na referência [18].

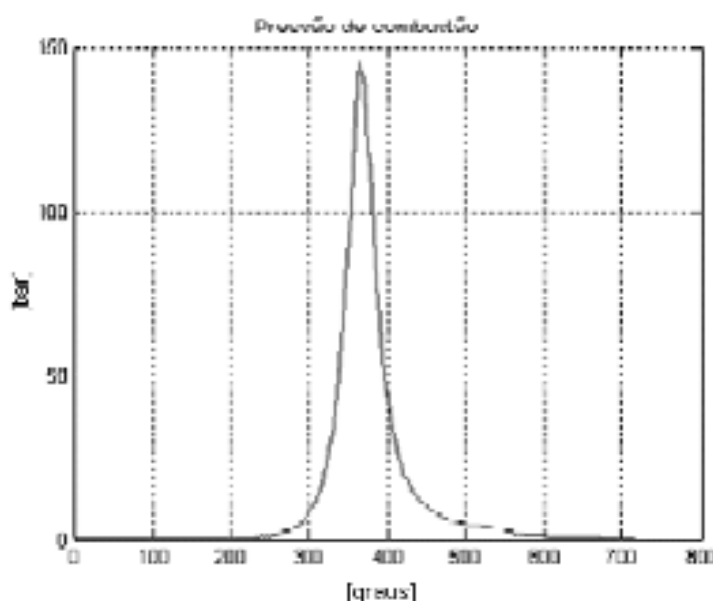
3.3 Esforços dinâmicos – força de combustão

É a força gerada pelos gases na fase da combustão. Através da curva de pressão interna do cilindro em função do ângulo da árvore de manivelas, é possível calcular a força instantânea atuante no pistão. É interessante a obtenção dessas curvas através de métodos experimentais.

As curvas $p = f(\alpha)$ variam segundo o regime de operação e rotação do motor, podendo ser obtidas através da utilização de um transdutor de pressão instalado geralmente no cabeçote do motor, de forma a medir a pressão no interior do cilindro. Um sinal de referência e um sensor de rotações também são necessários para que se obtenha o ângulo instantâneo da árvore de manivelas em relação ao PMS do pistão.

Essas curvas têm o formato mostrado na figura 7.

Figura 7 - Curva experimental $p = f(\alpha)$ para a condição de 2500 RPM a plena carga



Fonte: Draminski, 1988, p.180.

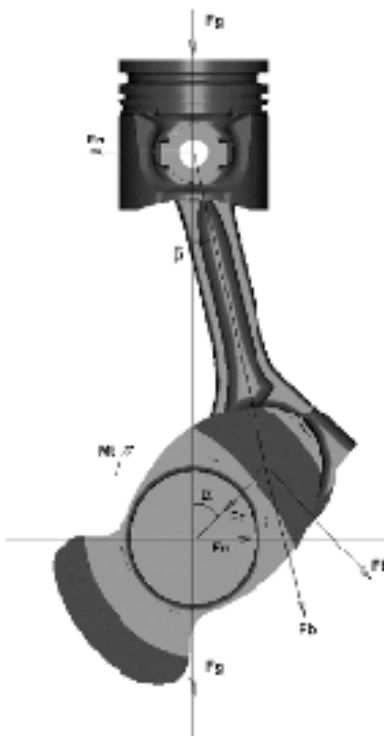
A força atuante no pistão para um determinado valor de pressão pode ser obtida através da equação:

$$F_p = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (3.10)$$

3.4 Forças resultantes na manivela

Conforme a figura 3.4, podemos observar que com a decomposição da força no pistão, surgirão duas componentes que irão atuar no moente do virabrequim (eixo da árvore de manivelas que se conecta à biela). Uma radial que irá promover a flexão das manivelas e outra tangencial que será a responsável pela geração de torque no motor. Será apresentado a seguir o equacionamento dessas forças, porém, apenas as forças tangenciais terão importância na análise de vibrações torcionais proposta neste trabalho.

Figura 8 - Esforços atuantes na árvore de manivelas



A força tangencial, indicada na figura 8, decorrente da pressão de combustão será:

$$F_{ct} = F_c \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \quad (3.11)$$

E a força tangencial devido às forças de inércia, que foi obtida pela da equação 3.8, será:

$$F_{it} = F_{in} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.12)$$

Podemos calcular agora a força tangencial resultante que atuará no moente, da seguinte forma:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{ct} + \vec{F}_{it} \quad (3.13)$$

A força radial resultante pode ser calculada seguindo a mesma metodologia.

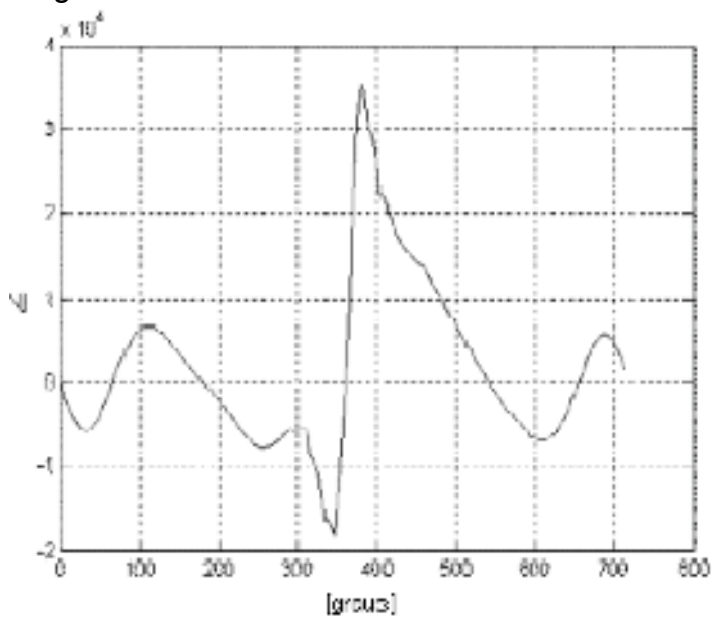
$$F_{cr} = F_c \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.14)$$

$$F_{ir} = F_{in} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.15)$$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_{cr} + \vec{F}_{ir} \quad (3.16)$$

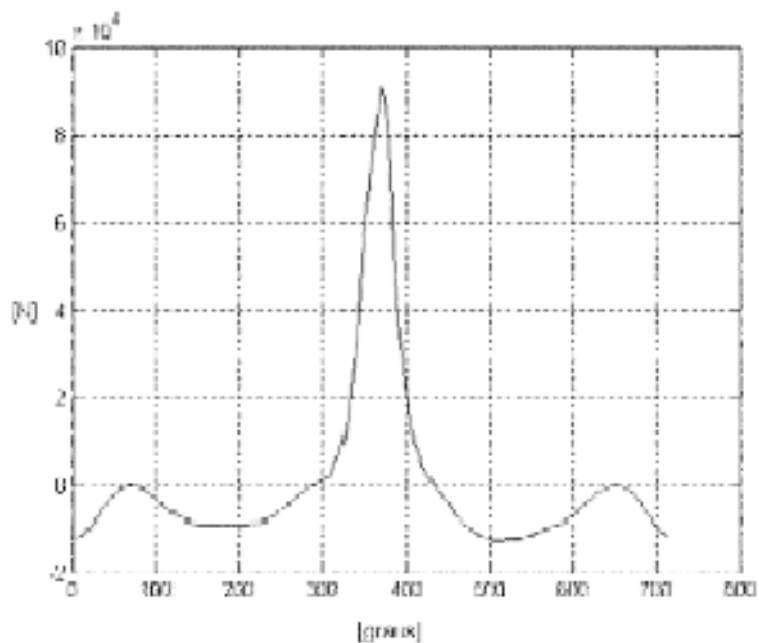
Nas figuras 9 e 10, podemos observar a variação dessas componentes em função do ângulo da árvore de manivelas para o caso do motor utilizado como exemplo.

Figura 9 - Força tangencial teórica resultante para a condição de 2500 rpm a plena carga



Fonte: Draminski, 1988, p.182.

Figura 10 - Força radial teórica resultante para a condição de 2500 rpm a plena carga



Fonte: Draminski, 1988, p. 184.

3.5 Análise das vibrações torcionais

As árvores de manivelas estão sujeitas simultaneamente a vibrações axiais, flexionais e torcionais. Este estudo abordará apenas os efeitos das vibrações torcionais. Conceitos básicos da análise de vibrações podem ser revisados em [20], [21], [22].

As condições de operação do motor geram algumas vezes, amplitudes de vibrações torcionais elevadas resultando em altas tensões de cisalhamento que podem comprometer o projeto do componente.

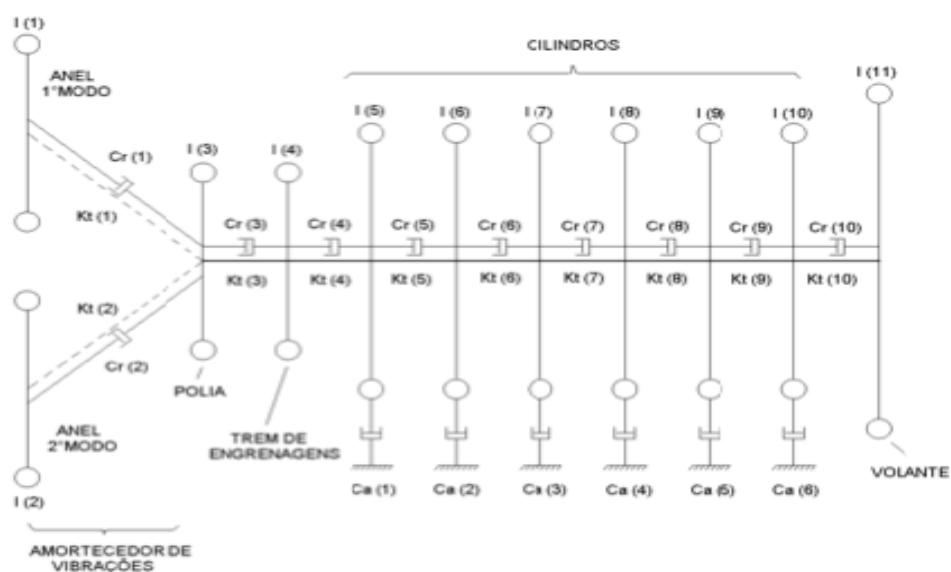
Para reduzir essas tensões, podemos utilizar amortecedores de vibrações torcionais do tipo viscoso, de borracha, etc., que na maioria das vezes são fixados parte frontal da árvore de manivelas (lado oposto ao volante). É possível ainda, ajustar as curvas de pressão de combustão através dos recursos existentes nos sistemas de injeção eletrônica de combustível, de forma a prolongar o tempo de atuação da força tangencial na árvore de manivelas, reduzindo as amplitudes das vibrações.

3.5.1 Modelo matemático equivalente

Para que possamos efetuar os cálculos, é necessário que seja obtido um sistema massa-mola do tipo torcional, que represente da melhor forma possível a árvore de manivelas mostrada na figura 4.

Esse sistema, no caso do motor de seis cilindros que faz parte do nosso estudo, possuirá onze graus de liberdade e será representado da seguinte forma:

Figura 11 - Modelo equivalente



Fonte: Draminski, 1988, p. 190.

Os valores das inércias $I(1 \dots 11)$ e rigidezes torcionais $Kt(1 \dots 10)$ entre cada elemento, podem ser obtidos através de softwares de CAD e CAE respectivamente e oferecem excelente precisão quando comparados aos valores obtidos experimentalmente.

As figuras 12 e 13, representam respectivamente os modelos geométricos a partir dos quais foram determinadas as inércias e rigidezes torcionais utilizadas na montagem das matrizes do modelo.

Figura 12 - Modelo para obtenção da inércia de uma manivela, incluindo a massa rotativa da biela



Fonte: Brusa, E., Delprete, C. and Genta, G., 1997, 205(2), p. 135.

Figura 13 - Modelo para obtenção da rigidez torcional entre as manivelas do virabrequim



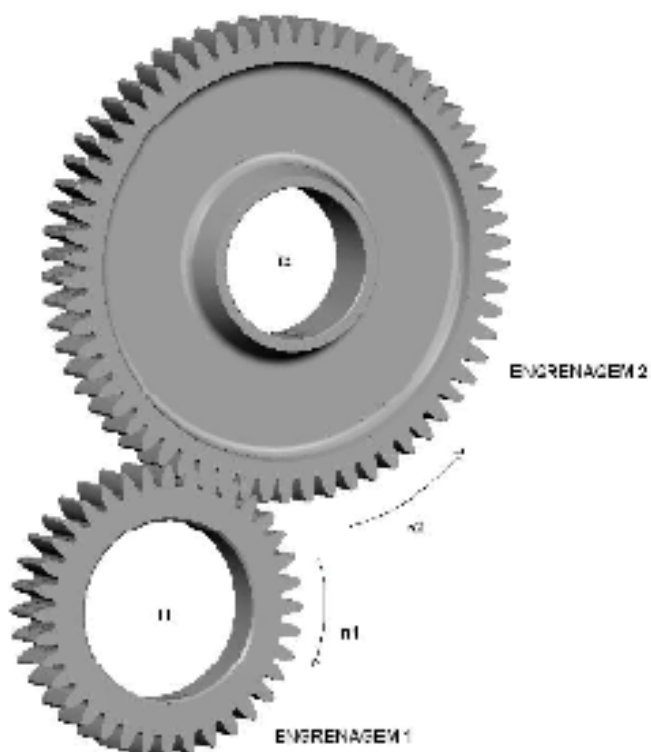
Fonte: Brusa, E., Delprete, C. and Genta, G. 1997, p. 135.

3.5.2 Redução das inércias do trem de engrenagens

No caso do nosso estudo, existe um trem de engrenagens na parte frontal da árvore de manivelas, o qual é responsável pela transmissão de potência para agregados e demais acionamentos, tais como: Bomba de alta pressão, árvore do comando de válvulas, compressores de ar, etc.

Para obtermos a inércia reduzida de um sistema qualquer acionado por uma engrenagem (2), em relação ao eixo de rotação de uma engrenagem motora (1), utilizaremos a relação apresentada pela equação 3.17:

Figura 14 - Esquema para redução da inércia de eixos com rotações diferentes (n_1 e n_2)



Fonte: Brusa, E., Delprete, C. and Genta, G., 1997, 205(2), p. 137.

$$J_{red} = J_2 \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2$$

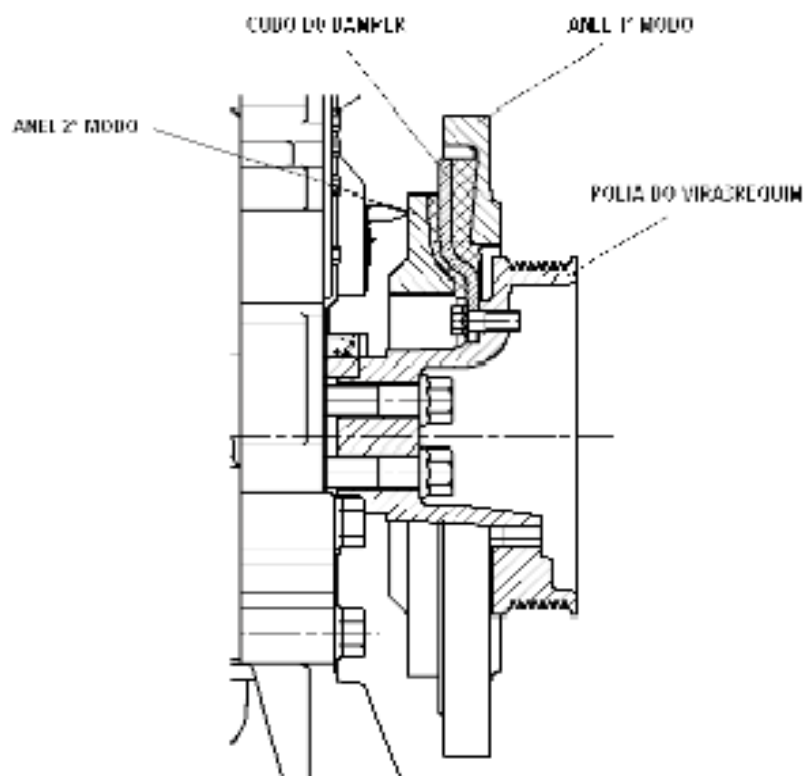
13.17)

Deveremos utilizar esta redução de inércia para todas as engrenagens e acionamentos que compõem o trem e considerar a somatória destas inércias, como sendo um dos graus de liberdade do modelo equivalente, conforme descrito na referência [15].

3.5.3 Determinação das características dinâmicas do absorvedor

A figura 15 mostra um detalhe em corte do amortecedor de vibrações torcionais considerado neste estudo:

Figura 15 - Amortecedor de vibrações torcionais de massa dupla



Fonte: Maragonis. 1992, v.58, p. 13.

A rigidez dinâmica do elastômero utilizado no amortecedor, neste caso um composto de 70% de SBR e 30% de NR, será obtida através de um modelo de elementos finitos, cuja borracha possui um módulo de cisalhamento dinâmico (G) situado na faixa de 1,5 a 3,0 MPa. Estes valores, são os usualmente encontrados para os elastômeros.

Através da aplicação de um torque conhecido e da obtenção do deslocamento angular nas inércias do “damper”, é possível calcular as rigidezes do componente. Este método é o mesmo utilizado para a obtenção das rigidezes entre as manivelas do virabrequim descrito anteriormente.

Dessa forma, são obtidos os seguintes valores de rigidezes para o componente:

Anel do 1º modo $I(1) = 0,1230 \text{ kg.m}^2$: $64254 \text{ N.m/rad} \leq Kt(1) \leq 127999 \text{ N.m/rad}$.

Anel do 2º modo $I(2) = 0,0273 \text{ kg.m}^2$: $88887 \text{ N.m/rad} \leq Kt(2) \leq 177252 \text{ N.m/rad}$.

Figura 16 - Modelo para a obtenção das rigidezes dinâmicas do amortecedor de vibrações



Fonte: Maragonis. 1992, v.58, p. 25.

A rigidez dinâmica da borracha varia em função da sua temperatura. Para os nossos cálculos foram considerados os seguintes valores dessa propriedade:

$K_t(1) = 105000 \text{ N.m/rad}$ e $K_t(2) = 150000 \text{ N.m/rad}$

Esses valores foram baseados em medições realizadas em componentes similares, considerando a borracha a uma temperatura de aproximadamente 95°C .

O coeficiente de amortecimento do elastômero do absorvedor pode ser calculado conforme o equacionamento mostrado a seguir, de acordo com a referência [15].

Definindo o fator de perda:

$$\eta = \frac{C}{2k}$$

(3.18)

E definindo também o número de perda:

$$\chi = \frac{c \cdot \Omega}{K} \quad (3.19)$$

Onde K e C são respectivamente a rigidez dinâmica e o coeficiente de amortecimento relativo da borracha utilizada no anti-vibrador. É possível de se verificar que para $\Omega = \omega_n$, teremos $\chi = d$. O fator de perda do elastômero situa-se na faixa: $0,2 \leq d \leq 0,3$ e nos cálculos utilizaremos o valor: $d = 0,25$.

No desenvolvimento do projeto de um amortecedor de vibrações, é interessante que sejam manufaturadas algumas peças, que contenham compostos de borracha com diferentes rigidezes dinâmicas, para simular as variações que possam ocorrer no processo de fabricação do absorvedor. Dessa forma, podemos escolher a melhor faixa de rigidezes para o componente.

Segundo Klier, H. [15], deveremos linearizar a rigidez dinâmica do amortecedor na condição de ressonância e adotá-la como sendo constante para as demais condições de operação do motor. Utilizando este procedimento, não estaremos comprometendo os resultados das análises, visto que, as amplitudes de maior importância para a verificação são as que ocorrem nas condições de ressonância do sistema, pois são estas que promoverão as maiores solicitações na árvore de manivelas.

3.5.4 Determinação das características dinâmicas do sistema

Nesta seção serão estudadas as características dinâmicas do sistema, incluindo as matrizes de inércia, amortecimento, rigidez, autovalores, autovetores e fatores de amortecimento.

Para vibrações mecânicas temos:

$$[M] \{\ddot{\theta}(t)\} + [C] \{\dot{\theta}(t)\} + [K] \cdot \{\theta(t)\} = \{T(t)\} \quad (3.20)$$

Onde $\{\theta(t)\}$ e $\{T(t)\}$ são vetores que representam respectivamente as amplitudes de vibração e os esforços de excitação atuantes em cada inércia do sistema. No nosso caso eles serão vetores (11×1) .

A seguir iremos apresentar o equacionamento matemático do sistema equivalente representado na figura 3.7.

Considerando-se que $\sum \ddot{M} = 0$:

Para a inércia I(1):

$$-f_{11}\theta_1 - C_{r1}\dot{\theta}_1 - K_{r1}\theta_1 + C_{r1}\dot{\theta}_2 - K_{r1}\theta_2 = 0 \rightarrow$$

$$f_{11}\theta_1 + C_{r1}\dot{\theta}_1 - K_{r1}\theta_1 - C_{r1}\dot{\theta}_2 + K_{r1}\theta_2 = 0$$

Para a inércia I(2):

$$f_{22}\theta_2 + C_{r2}\dot{\theta}_2 + K_{r2}\theta_2 - C_{r2}\dot{\theta}_3 - K_{r2}\theta_3 = 0$$

Para a inércia I(3), considerando o absorvedor do 1° modo:

$$-f_{31}\theta_1 - C_{r1}\dot{\theta}_1 - K_{r1}\theta_1 - C_{r1}\dot{\theta}_2 - K_{r1}\theta_2 + C_{r1}\dot{\theta}_3 +$$

$$K_{r1}\theta_3 + C_{r3}\dot{\theta}_3 + K_{r3}\theta_3 = 0$$

Para a inércia I(3), considerando o absorvedor do 2° modo:

$$-f_{32}\theta_2 - C_{r2}\dot{\theta}_2 - K_{r2}\theta_2 - C_{r2}\dot{\theta}_3 - K_{r2}\theta_3 + C_{r2}\dot{\theta}_4 +$$

$$K_{r2}\theta_4 + C_{r4}\dot{\theta}_4 + K_{r4}\theta_4 = 0$$

Reorganizando as equações anteriores, obteremos respectivamente:

$$f(3) \cdot \theta(3) - [C(3) + C(2)] \cdot \theta(3) + [K(3) - K(2)] \cdot \theta(3) - C(2) \cdot \theta(2) - K(2) \cdot \theta(2) - \\ C(3) \cdot \theta(4) - K(3) \cdot \theta(4) = 0 .$$

$$f(3) \cdot \theta(3) - [C(3) + C(3)] \cdot \theta(3) - [K(3) - K(3)] \cdot \theta(3) - C(3) \cdot \theta(4) - K(3) \cdot \theta(4) - \\ C(3) \cdot \theta(4) - K(3) \cdot \theta(4) = 0$$

Finalmente, reunindo as duas equações anteriores teremos:

$$f(3) \cdot \theta(3) + [C(3) - C(2) - C(3)] \cdot \theta(3) + [K(3) + K(2) + K(3)] \cdot \theta(3) - C(2) \cdot \theta(2) - \\ C(3) \cdot \theta(4) - K(2) \cdot \theta(2) - K(3) \cdot \theta(4) - C(3) \cdot \theta(4) - K(3) \cdot \theta(4) = 0$$

Para a inércia I(4):

$$- f(4) \cdot \theta(4) - C(4) \cdot \theta(4) - K(4) \cdot \theta(4) - C(3) \cdot \theta(4) - K(3) \cdot \theta(4) + C(3) \cdot \theta(5) + \\ K(3) \cdot \theta(5) - C(4) \cdot \theta(5) - K(4) \cdot \theta(5) = 0 \rightarrow$$

$$f(4) \cdot \theta(4) + [C(4) + C(3)] \cdot \theta(4) + [K(4) + K(3)] \cdot \theta(4) - C(3) \cdot \theta(5) - K(3) \cdot \theta(5) - \\ C(4) \cdot \theta(5) - K(4) \cdot \theta(5) = 0$$

Para uma inércia genérica I(i):

$$- f(i) \cdot \theta(i) - C(i) \cdot \theta(i) - K(i) \cdot \theta(i) - C(i-1) \cdot \theta(i) - K(i-1) \cdot \theta(i) + C(i-1) \cdot \theta(i+1) + \\ K(i-1) \cdot \theta(i+1) - C(i) \cdot \theta(i+1) - K(i) \cdot \theta(i+1) = 0 \rightarrow$$

Para a inércia I(11):

$$- f(11) \cdot \theta(11) - C(11) \cdot \theta(11) - K(11) \cdot \theta(11) + C(10) \cdot \theta(11) - K(10) \cdot \theta(11) - \\ f(11) \cdot \theta(11) - C(11) \cdot \theta(11) + K(11) \cdot \theta(11) - C(10) \cdot \theta(11) - K(10) \cdot \theta(11) = 0$$

Este amortecimento existe devido ao contato entre os anéis dos pistões e os cilindros do bloco do motor. Podemos notar que apenas as inércias correspondentes às manivelas do virabrequim possuem valores de amortecimento absoluto.

De acordo com experiências em motores similares, será adotado para o coeficiente de amortecimento absoluto o valor de 6 N.m.s/rad.

Matriz de amortecimento relativo

$$[Cr]_{(11,11)} =$$

$$\begin{bmatrix} Cr(1) & 0 & -Cr(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cr(2) & -Cr(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Cr(1) & -Cr(2) & Cr(3)+Cr(2)+Cr(1) & -Cr(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Cr(3) & Cr(4)+Cr(3) & -Cr(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cr(4) & Cr(5)+Cr(4) & -Cr(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(5) & Cr(6)+Cr(5) & -Cr(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(6) & Cr(7)+Cr(6) & -Cr(7) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(7) & Cr(8)+Cr(7) & -Cr(8) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(8) & Cr(9)+Cr(8) & -Cr(9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(9) & Cr(10)+Cr(9) & -Cr(10) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(10) & Cr(10) & 0 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que o coeficiente de amortecimento do elastômero foi obtido através da equação 3.18, podemos calcular essa grandeza para as manivelas do virabrequim. Os valores do fator de perda a serem considerados para diferentes tipos de motores são mostrados na referência [16]. Para motores Diesel, quatro tempos, com seis cilindros em linha, turbo-alimentados, o fator de perda será: $d = 0,035$.

Matriz de amortecimento total:

$$[C']_{:::11} = [Ca]_{:::11} + [C_1]_{11:::11}$$

Matriz de rigidez:

$$[Kt]_{(11,11)} =$$

$$\begin{bmatrix} Ka(1) & 0 & -Ka(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ka(2) & -Ka(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Ka(1) & -Ka(2) & Ka(3)+Ka(2)+Ka(1) & -Ka(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Ka(3) & Ka(4)+Ka(3) & -Ka(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Ka(4) & Ka(5)+Ka(4) & -Ka(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(5) & Ka(6)+Ka(5) & -Ka(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(6) & Ka(7)+Ka(6) & -Ka(7) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(7) & Ka(8)+Ka(7) & -Ka(8) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(8) & Ka(9)+Ka(8) & -Ka(9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(9) & Ka(10)+Ka(9) & -Ka(10) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ka(10) & Ka(10) & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.5 Determinação do torque de excitação

O torque de excitação é uma função periódica e a sua aplicação no modelo equivalente será feita através dos seus harmônicos. Pode-se notar que as excitações só aparecem nas posições do vetor correspondentes aos cilindros do motor, posições estas, onde ocorrem as explosões.

$$\{F(\omega)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1^1(\omega) \\ M_2^1(\omega) \\ M_3^1(\omega) \\ M_4^1(\omega) \\ M_5^1(\omega) \\ M_6^1(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

O torque de excitação é uma função do ângulo do virabrequim e será calculado pela equação:

$$M_k = F_t \cdot r \quad (3.12)$$

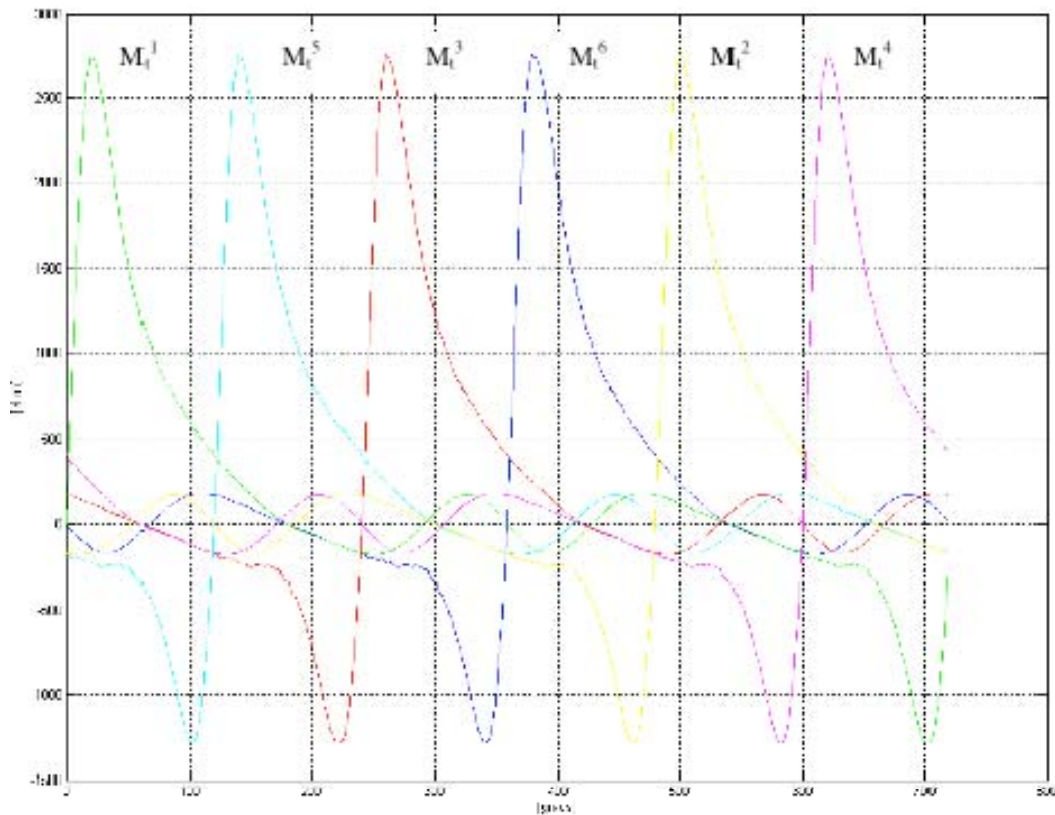
Onde F_t é a força tangencial obtida pela equação 3.13.

A expressão abaixo mostra o torque de excitação representado pelos seus harmônicos obtidos da série de Fourier, sendo A_n e B_n os coeficientes da série conforme referência [24].

$$M_k^1(\omega) = \frac{A_k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n\omega \cdot t)] \quad (3.13)$$

O índice k indica o cilindro para o qual será feita a expansão da curva de torque, visto que existe uma defasagem em sua aplicação de cilindro para cilindro. Essa defasagem, em graus do virabrequim, é função do intervalo de ignição do motor e obviamente do número de cilindros. Como este estudo é baseado em um motor de 4 tempos e 6 cilindros: $k = 1 \dots 6$, com uma defasagem de 120° nas manivelas.

Figura 17 - Curvas de torque teóricas para uma condição de 2600 rpm a plena carga



Fonte: Pasricha, 2001, v.45, is.4, p. 262.

O índice n representa o número de termos da série no qual desejamos realizar a expansão. A maioria dos autores considera que 24 termos são suficientes para que se obtenha uma precisão satisfatória nos cálculos.

Podemos ainda reescrever a equação 3.23 da seguinte forma:

Sabendo-se que:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Teremos:

$$A_v^i \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_v^i \cdot \sin(n\omega \cdot t) = A_n^i \cdot \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} +$$

$$B_v^i \cdot \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \frac{1}{2} (A_n^i - iB_n^i) \cdot e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (A_n^i + iB_n^i) \cdot e^{-in\omega t}$$

Fazendo:

$$C_n^i = \frac{1}{2} (A_n^i - iB_n^i) \quad e \quad C_n^i = \frac{1}{2} (A_n^i + iB_n^i)$$

Obtém-se finalmente:

$$M_v^i(t) = \frac{A_n^i}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^i \cdot e^{in\omega t} + C_n^i \cdot e^{-in\omega t} \right] \quad (3.24)$$

O termo Ao da série de Fourier não produz vibrações no eixo da árvore de manivelas, mas sim um momento torçor constante sobre o qual irão somar-se as vibrações torcionais.

3.5.6 Solução por equações de estado

Definiremos agora um vetor de estado e sua derivada no tempo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad e \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Pode-se expressar o comportamento dinâmico do virabrequim através do sistema de equações diferenciais de 1a ordem:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad ; \quad u(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Onde $x(0)$ é a condição inicial do sistema. A matriz $[A]$ e o vetor $\{b(t)\}$ são expressos da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \cdot M(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot T(u) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Onde $[A]$ possui dimensão (22×22) e $\{b\}$ a dimensão de (22×1) .

O vetor das excitações $\{b(t)\}$ tem a seguinte forma:

$$b(t) = \begin{bmatrix} b1(t) \\ b2(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Onde:

$$M(0) = [p \ 0]^T$$

$$M^{-1} \cdot T(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1,5}^{-1}u_5 & M_{1,6}^{-1}u_6 & M_{1,7}^{-1}u_7 & M_{1,8}^{-1}u_8 & M_{1,9}^{-1}u_9 & M_{1,10}^{-1}u_{10} & 0 \end{bmatrix}^T$$

No vetor $\{b2(t)\}$, podemos observar que a última e as primeiras linhas são as que representam respectivamente, o volante e a parte frontal da árvore de manivelas. Como essas inércias não possuem excitações externas, seus valores são nulos.

Substituindo os coeficientes da série de Fourier e definindo os vetores:

$$A_1 = \begin{bmatrix} [p] \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 & A_{1,5}^1 & A_{1,6}^1 & A_{1,7}^1 & A_{1,8}^1 & A_{1,9}^1 & A_{1,10}^1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} [q] \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 & C_{1,5}^2 & C_{1,6}^2 & C_{1,7}^2 & C_{1,8}^2 & C_{1,9}^2 & C_{1,10}^2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} [q] \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 & C_{1,5}^3 & C_{1,6}^3 & C_{1,7}^3 & C_{1,8}^3 & C_{1,9}^3 & C_{1,10}^3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{Out: } \{p\} = \{p_0 \cos \omega t + p_1 \sin \omega t\}$$

Podemos escrever que:

$$h(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cdot e^{in\omega t} + \overline{b_n} \cdot e^{-in\omega t}] \quad (3.29)$$

3.5.7 Resposta do sistema através da integral de convolução

A resposta de um sistema vibratório excitado periodicamente e representado pela sua equação de estado pode ser obtida através da matriz fundamental, ou matriz de transição de estado:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (3.30)$$

E da integral de convolução, conforme a referência [20]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b(\tau) d\tau \\ x(t) &= \Phi(t) \cdot x(0) + \frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) \cdot d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \overline{b_n} \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau \quad (3.31) \end{aligned}$$

Como estamos interessados apenas na resposta permanente do sistema, iremos desconsiderar a resposta transitória para as condições iniciais $\Phi(t) \cdot x(0)$.

A primeira integral representa o termo constante da série de Fourier. Este termo não produz vibrações, mas apenas um torque constante nas secções do virabrequim.

As integrais abrangidas pelo somatório da expressão da resposta à excitação periódica serão as responsáveis pelas vibrações torcionais.

Sendo assim:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \overline{b_n} \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau \quad (3.32)$$

Solução das integrais do somatório:

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(m-i)\tau} (b_1 \cdot e^{\tau} + b_2 \cdot e^{-\tau}) d\tau \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(m-i)\tau} \cdot b_1 \cdot e^{\tau} d\tau + \int_0^t e^{(m-i)\tau} \cdot b_2 \cdot e^{-\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(m-i)\tau} \cdot e^{\tau} \cdot b_1 \cdot e^{\tau} d\tau + \int_0^t e^{(m-i)\tau} \cdot e^{-\tau} \cdot b_2 \cdot e^{-\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{(m-i)t} \cdot \int_0^t e^{2\tau} \cdot b_1 d\tau + e^{(m-i)t} \cdot \int_0^t e^{-2\tau} \cdot b_2 d\tau \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{(m-i)t} \cdot \left[\frac{e^{2\tau} - 1}{2} \cdot b_1 + \frac{e^{-2\tau} - 1}{-2} \cdot b_2 \right] \rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{(m-i)t} \cdot \left[\frac{e^{2t} - 1}{2} \cdot b_1 + \frac{e^{-2t} - 1}{-2} \cdot b_2 \right] \rightarrow$$

Considerando a propriedade comutativa da matriz fundamental, cuja demonstração pode ser vista na referência [20]:

$$x_1(t) = e^{(m-i)t} \cdot \left(\frac{e^{2t} - 1}{2} \cdot b_1 + \frac{e^{-2t} - 1}{-2} \cdot b_2 \right) + e^{(m-i)t} \cdot \left(\frac{e^{-2t} - 1}{-2} \cdot b_2 + \frac{e^{2t} - 1}{2} \cdot b_1 \right) \rightarrow$$

$$x_1(t) = \left(\frac{e^{2t} - 1}{2} \cdot e^{(m-i)t} - \frac{e^{-2t} - 1}{2} \cdot e^{(m-i)t} \right) \cdot b_1 + \left(\frac{e^{-2t} - 1}{-2} \cdot e^{(m-i)t} - \frac{e^{2t} - 1}{2} \cdot e^{(m-i)t} \right) \cdot b_2 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \frac{e^{(m-i)t} - e^{(m-i)t} \cdot e^{-2t}}{2} \cdot b_1 + \frac{e^{(m-i)t} - e^{(m-i)t} \cdot e^{2t}}{2} \cdot b_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{e^{(m-i)t} \cdot e^{-2t} - e^{(m-i)t}}{2} \cdot b_2 + \frac{e^{(m-i)t} \cdot e^{2t} - e^{(m-i)t}}{2} \cdot b_1 \Rightarrow$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} x_n(t) = & (i\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \cdot e^{i\omega \cdot t} + (-i\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \cdot e^{-i\omega \cdot t} + \dots \\ & \dots + e^{-\lambda \cdot t} \left[(-i\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n + (-i\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \right] \end{aligned}$$

Definiremos agora a matriz de freqüência e sua conjugada:

$$F_n = (i\omega \cdot I - A)^{-1} \quad e \quad F_n^* = (-i\omega \cdot I - A)^{-1} \quad (3.33)$$

Definiremos também o vetor de resposta em freqüência e seu conjugado:

$$g_n = F_n \cdot b_n \quad e \quad g_n^* = F_n^* \cdot b_n \quad (3.34)$$

Portanto, a resposta para uma ordem n poderá ser obtida da seguinte forma:

$$x_n(t) = g_n \cdot e^{i\omega t} + g_n^* \cdot e^{-i\omega t} = e^{i\omega t} \cdot (g_n + g_n^*) \quad (3.35)$$

Para $t \rightarrow \infty$ e sendo o sistema assintoticamente estável, é possível verificar que o último termo da equação acima se anula e, portanto, a resposta permanente de ordem n será:

$$x_n(t) = \theta_n(t) = g_n \cdot e^{i\omega t} + g_n^* \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.36)$$

O vetor de resposta em freqüência tem dimensão (22×1) , sendo que as onze primeiras linhas representam os deslocamentos angulares e as onze últimas, as velocidades angulares. No nosso estudo, estaremos interessados nas amplitudes de vibrações torcionais, ou sejam, as primeiras linhas do vetor.

Utilizando-se as relações de Euler, podemos dizer que:

$$\theta_n(t) = (g_n + g_n^*) \cos(n\omega \cdot t) + i(g_n - g_n^*) \sin(n\omega \cdot t)$$

$$\theta_n(t) = 2 \cdot \text{Re}\{g_n\} \cos(n\omega \cdot t) - 2 \cdot \text{Im}\{g_n\} \sin(n\omega \cdot t)$$

Através das relações trigonométricas, é possível obter finalmente as equações que determinam a amplitude de vibração e a fase para cada ordem n da excitação, para cada inércia j :

$$\theta_{nj} = \Theta_{nj} \cdot \cos(n\omega t - \varphi_{nj}) \quad (\text{Com: } j = 1..11) \text{ e } n = 1..24 \quad (3.37)$$

Onde a amplitude de vibração será:

$$\Theta_{nj} = \frac{2}{\sqrt{[\operatorname{Re}(g_{nj})]^2 + [\operatorname{Im}(g_{nj})]^2}} \cdot \varepsilon_{nj} \quad (3.38)$$

E a fase:

$$\varphi_{nj} = \arctan \left(\frac{-\operatorname{Im}(g_{nj})}{\operatorname{Re}(g_{nj})} \right) \quad (3.39)$$

Finalmente, é possível obter a amplitude global de vibração torcional através da seguinte equação:

$$\theta_j = \sum_{n=1}^{24} \Theta_{nj} \cos(n\omega t - \varphi_{nj}) \quad (3.40)$$

Resumindo a metodologia a ser empregada, para cada frequência de excitação, ou seja, cada rotação do motor, existirá um torque diferente que deverá ser expandido em uma série de Fourier contendo 24 termos, atuando com uma defasagem entre cada um dos cilindros e operações matriciais trabalhosas que deverão ser efetuadas para cada passo do processo.

Sendo assim, foi desenvolvido um programa de computador escrito em Matlab, para a realização de todos os cálculos envolvidos. Comparando-se os resultados obtidos com as amplitudes de vibrações torcionais medidas, iremos verificar a eficiência da metodologia empregada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir do programa de computador mencionado anteriormente e considerando os dados de entrada indicados abaixo, obtidos pelo método dos elementos finitos e medições experimentais, apresentaremos a seguir os resultados das análises.

4.1 Dados de entrada (Motor de 191 kW a 2500 RPM)

$m_a = 2,378 \text{ kg}$

$L = 207 \text{ mm}$

$s = 137 \text{ mm}$

$d_p = 105 \text{ mm}$

$ord_ign = 1-5-3-6-2-4$

$rpm_min = 1000 \text{ rpm}$

$rpm_max = 2850 \text{ rpm}$

$int_rpm = 50 \text{ rpm}$

Inércias [kg.m²]:

$I(1) = 0,1230$ (Anel do amortecedor – 1° modo)

$I(2) = 0,0273$ (Anel do amortecedor – 2° modo)

$I(3) = 0,0350$ (Polia do virabrequim e cubo do amortecedor)

$I(4) = 0,0140$ (Trem de engrenagens)

$I(5) = 0,0468$ (1a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(6) = 0,0328$ (2a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(7) = 0,0468$ (3a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(8) = 0,0468$ (4a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(9) = 0,0328$ (5a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(10) = 0,0488$ (6a manivela do virabrequim e massas alternativas)

$I(11) = 1,6990$ (Volante e platô da embreagem)

Rigidez torcional [N.m/rad]:

$$K_t(1) = 105000 \quad (\text{Rigidez din\^amica} - 1^\circ \text{anel})$$

$$K_t(2) = 150000 \quad (\text{Rigidez din\^amica} - 2^\circ \text{anel})$$

$$K_t(3) = 1064000$$

$$K_t(4) = 1510000$$

$$K_t(5) = 1254000$$

$$K_t(6) = 1254000$$

$$K_t(7) = 1254000$$

$$K_t(8) = 1254000$$

$$K_t(9) = 1254000$$

$$K_t(10) = 2089000$$

Amortecimento absoluto [N.m.s/rad]:

$$C_a(1) = 6 \quad (1^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(2) = 6 \quad (2^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(3) = 6 \quad (3^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(4) = 6 \quad (4^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(5) = 6 \quad (5^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(6) = 6 \quad (6^\circ \text{ cilindro})$$

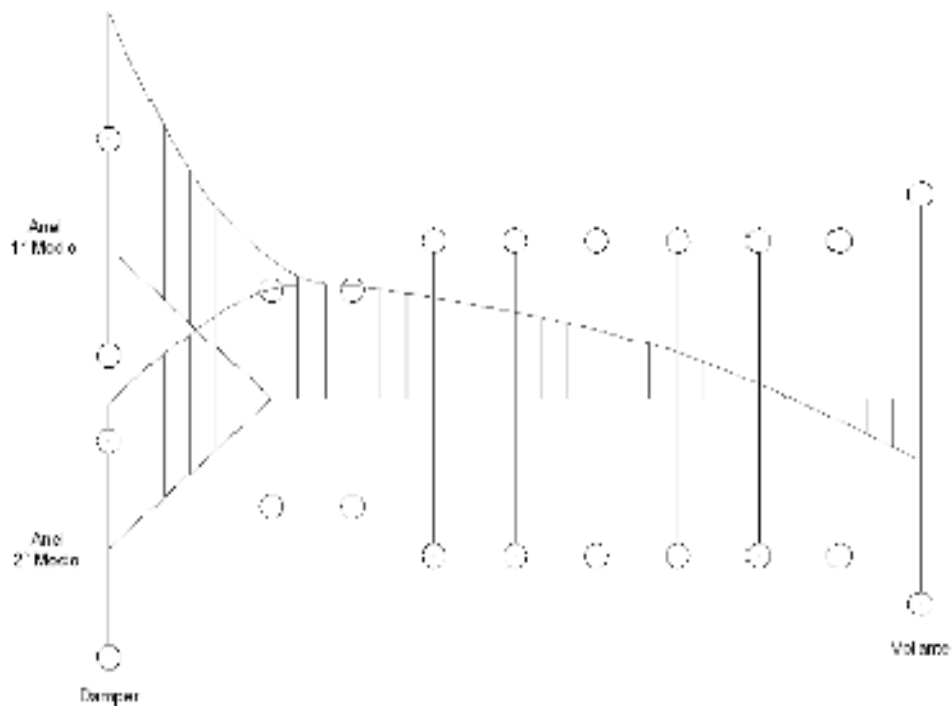
Amortecimento relativo:

$$d_{\text{damper}} = 0,25 \quad (\text{Fator de perda da borracha do amortecedor})$$

$$d_{\text{motor}} = 0,035 \quad (\text{Fator de perda para as manivelas do virabrequim})$$

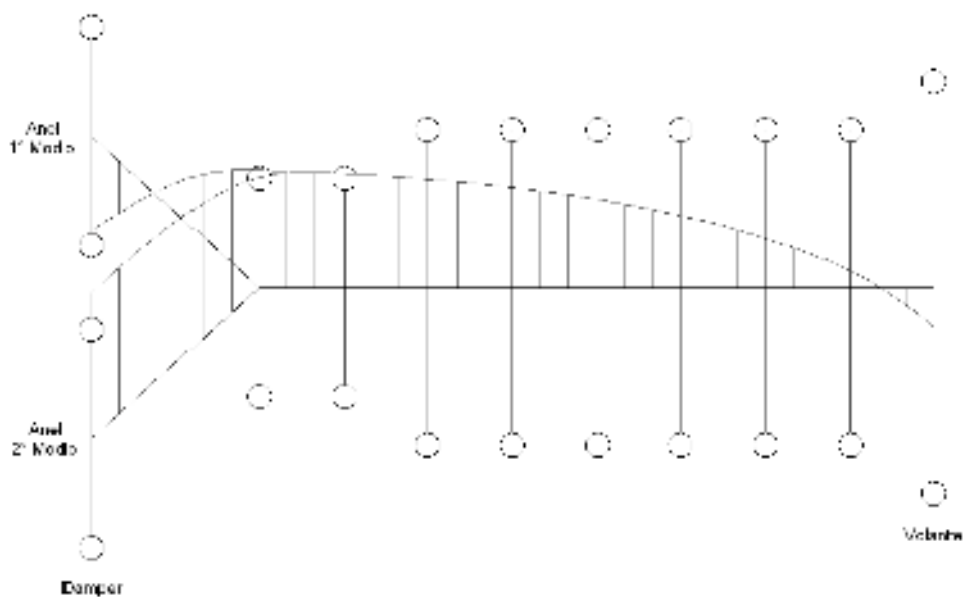
As figuras 18 e 19 ilustram (sem escala) os deslocamentos das in\^ercias para os dois primeiros modos torcionais de vibra\^ao do sistema.

Figura 18 - Representação gráfica do 1º modo de vibrar (112,23 Hz)



Fonte: Pasricha., 2001, v.45, is.4, p. 264.

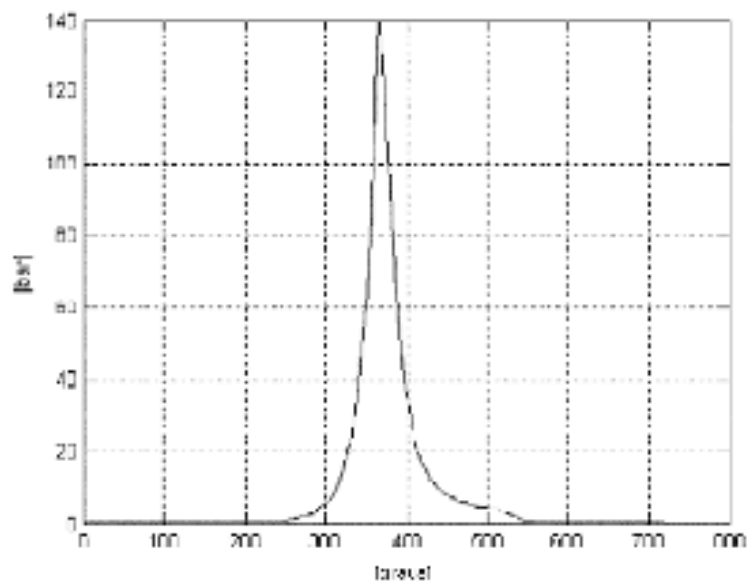
Figura 19 - Representação gráfica do 2º modo de vibrar (229,37 Hz)



Fonte: Pasricha, 2001, v.45, is.4, p. 268.

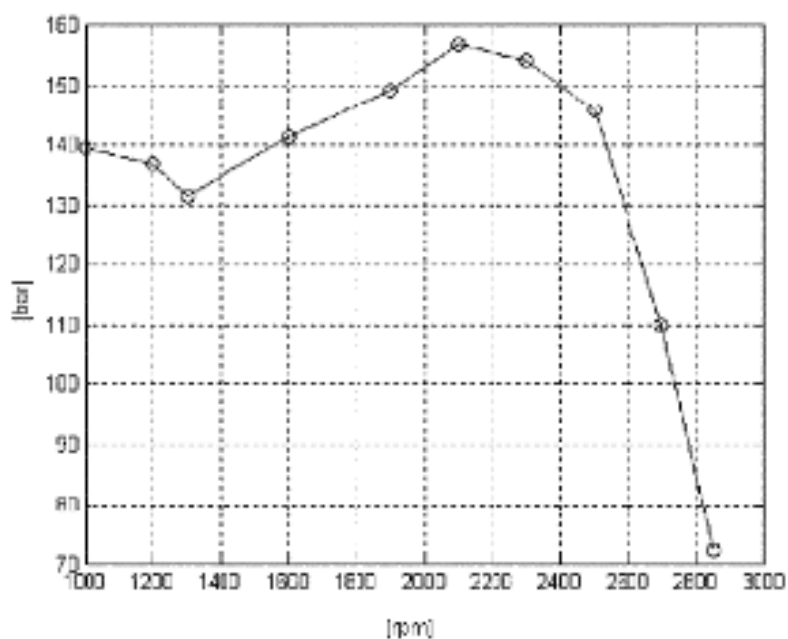
As figuras 20 e 21 representam respectivamente, a pressão no interior dos cilindros em função do ângulo do virabrequim a plena carga na rotação de 1000 rpm e a variação dos picos de pressão para diversas rotações do motor. Os gráficos da pressão para as demais rotações são qualitativamente semelhantes ao da figura 4.3.

Figura 20 - Curva experimental de pressão de combustão a 1000rpm e plena carga



Fonte: Pasricha,. 2001, p. 268.

Figura 21 - Picos de pressão de combustão em função da rotação do motor

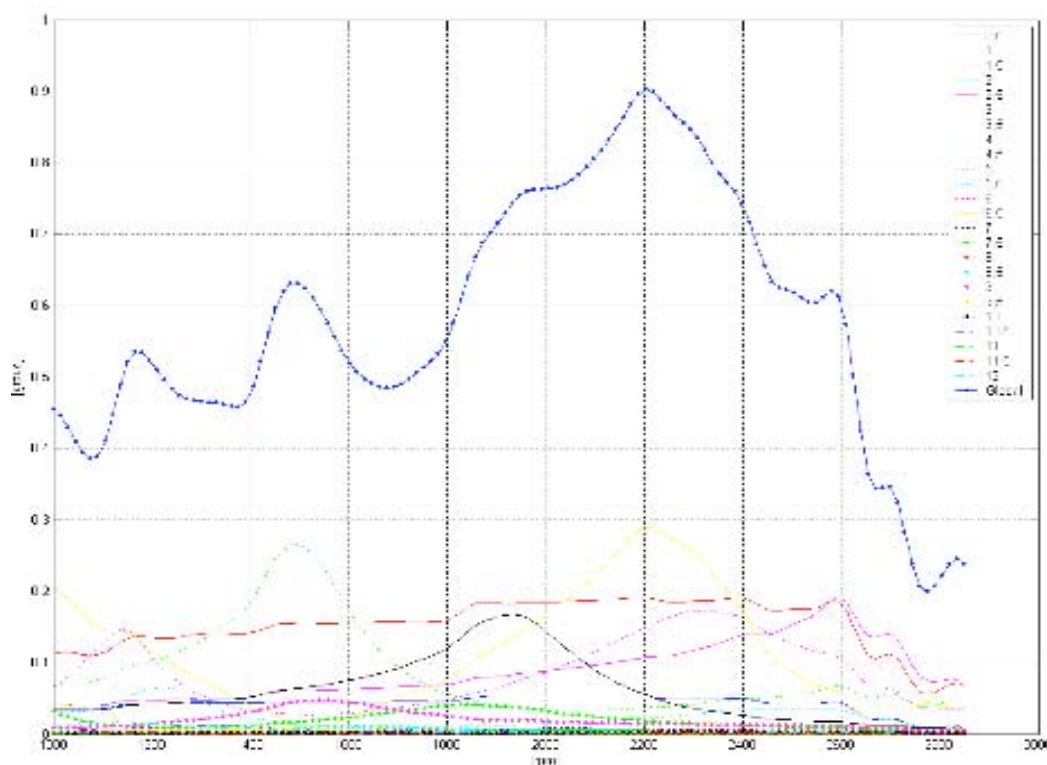


Fonte: Pasricha,. 2001, p. 265.

4.2 Torciogramas teóricos

A figura 22 mostra os resultados obtidos dos cálculos das amplitudes das vibrações torcionais referentes à polia do virabrequim I(3).

Figura 22 - Amplitudes de vibrações torcionais



Fonte: Pasricha, 2001, p.290.

As ordens que aparecem em valores fracionados (0,5a / 1,0a / 1,5a ...), ocorrem pelo fato do motor ser de 4 tempos, ou seja, a cada duas voltas da árvore de manivelas existirá um período da excitação. Como exemplo, a 3a ordem corresponde ao 6º harmônico do torque de excitação, sendo assim, a cada duas revoluções do virabrequim existirão 6 oscilações na resposta do sistema, conseqüentemente 3 oscilações por rotação. Esta explicação pode ser vista em detalhes nas referencias [9] e [10].

A partir dos cálculos efetuados, é possível também obter os valores dos torques atuantes entre cada inércia do modelo discretizado da árvore de manivelas.

Conhecendo-se as amplitudes globais de vibração de duas inércias

consecutivas e a rigidez torcional entre as mesmas, é possível de se determinar o torque atuante

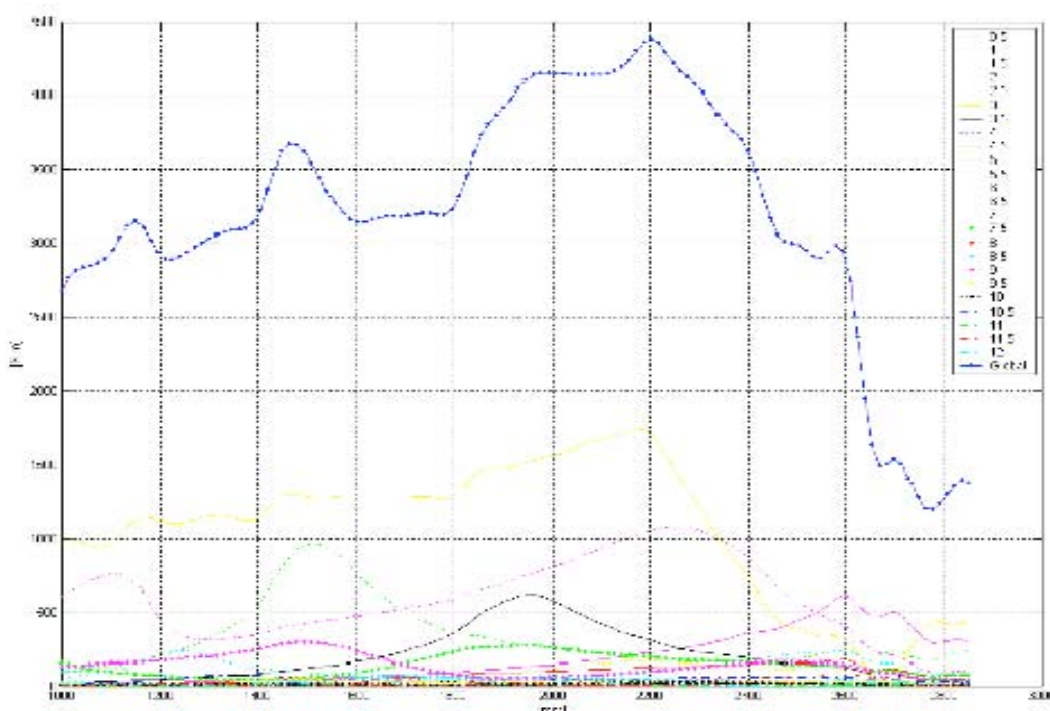
nesta secção. Essa torção é importante para o dimensionamento da árvore de manivelas e também dos parafusos utilizados na fixação do volante, polias, etc.

É interessante salientar que as amplitudes globais de vibração são obtidas pela soma vetorial das amplitudes de cada ordem de vibração e a diferença de amplitudes entre inércias deve ser obtida considerando-se a fase dos vetores para cada instante. A equação abaixo resume a metodologia descrita para a obtenção do torque atuante em uma determinada secção e a figura 4.6 ilustra os resultados desses cálculos:

$$T_{\text{at}} = \theta_0 - \theta_1 + K \theta_2 + \dots + \sin \theta_j \quad j=2 \dots 11 \quad (4.1)$$

Outro ponto a ser observado, é que o termo constante da serie de Fourier deverá ser somado a este torque tantas vezes quantas forem o número de inércias responsáveis pela geração de torque à frente da secção analisada. Por exemplo, no caso da fixação entre o volante e o 6º cilindro, esse termo deverá ser somado 6 vezes ao torque das vibrações torcionais, pelo fato de existirem 6 cilindros em operação no motor.

Figura 23 - Torque atuante entre o volante e o 6º cilindro



Fonte: Pasricha, 2001, p. 290.

Analisando-se a figura 22 podemos obter algumas informações. As ordens que possuem maiores amplitudes de vibração são, entre outras causas, responsáveis pela geração de ruídos em engrenagens e demais acionamentos. Esse tipo de ruído também é conhecido como “rattle-noise”.

As ordens principais de vibração são as de valor inteiro e múltiplas do número de cilindros do motor, para maiores detalhes vide referência [19]. Do ponto de vista estrutural, deveremos focar a análise na 3a, 4,5a e 6a ordens. A ordem 1,5a apesar de apresentar amplitudes elevadas, de até aproximadamente $0,20^\circ$, é ocasionada por movimento de corpo rígido e não irá gerar torções consideráveis nas seções do virabrequim.

Altas ordens como a 9a e a 12a, possuem pouca energia e não geram vibrações que possam comprometer a integridade do sistema. Tradicionalmente, as vibrações torcionais são analisadas até a 12a ordem conforme as referências [15], [16], [17]. Porém, no caso do motor analisado, podemos notar que as amplitudes das ordens superiores à 9a, são desprezíveis.

A amplitude global de vibração é apenas um valor indicativo e não implica em conclusões imediatas. Nas rotações de deslocamentos angulares globais mais elevados, geralmente ocorrem as maiores solicitações no virabrequim e no amortecedor de vibrações torcionais. Um indicativo para a verificação estrutural da árvore de manivelas e demais componentes associados, é a análise do torque atuante em cada manivela, como mostrado na figura 23.

Conhecendo-se o valor do momento torçor, é possível verificar se as juntas aparafusadas para a fixação do volante e da polia são capazes de transmitir os torques atuantes, ou ainda, é possível a verificação do nível de tensões nas regiões críticas do virabrequim através de análises pelo método dos elementos finitos, por exemplo.

É possível reduzir as amplitudes de vibração das ordens 4,5a e 6a, modificando-se o composto da borracha do amortecedor. Porém, a amplitude do 1° modo de vibrar excitado pela 3a ordem não sofrerá reduções significativas de amplitude. Esta ordem é bastante susceptível à variação das inércias do sistema, como pode ser visto na figura 24. As grandes amplitudes das ordens 4,5a e 6a, são as principais responsáveis pelos ruídos de alta frequência.

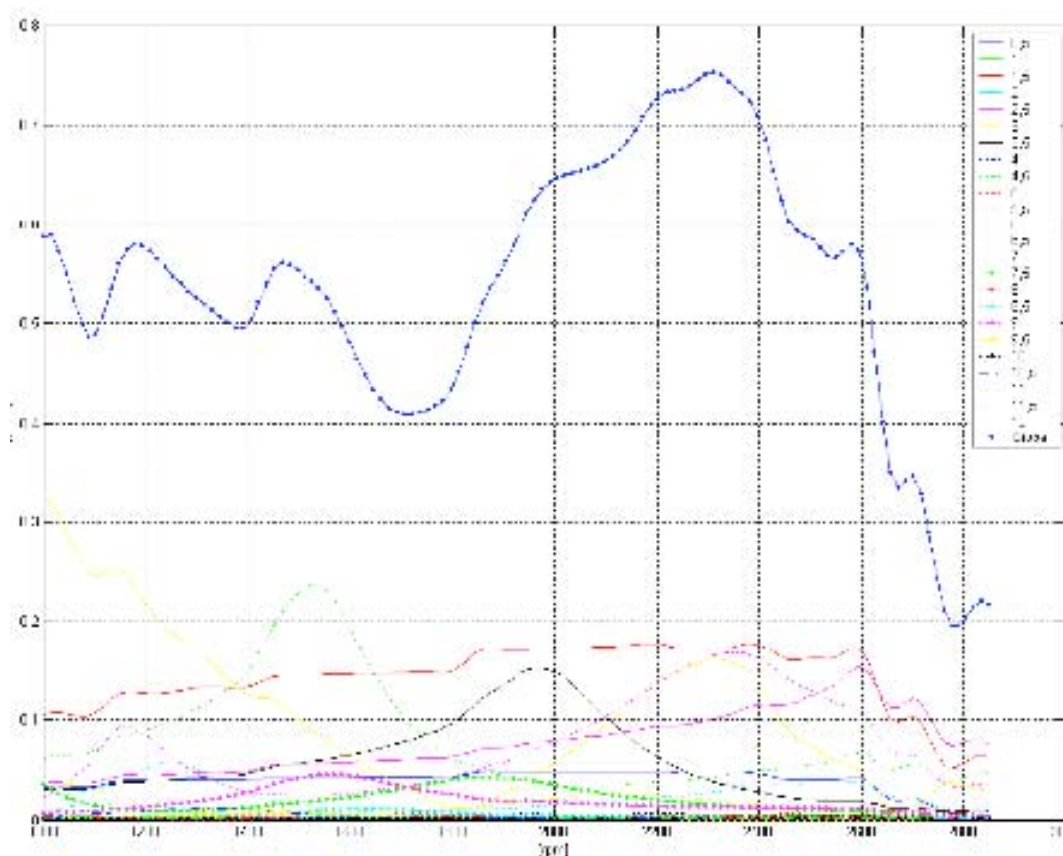
Se aumentarmos a inércia do volante, iremos reduzir as amplitudes da 3a ordem nas baixas rotações, porém a amplitude de vibração do 1° modo irá aumentar

de modo considerável e será difícil reduzi-la alterando-se apenas as características dinâmicas do “damper”.

Podemos verificar também, que existe uma sobreposição de dois modos de vibrar (1° modo excitado pela 3a ordem com o 2° modo excitado pela 6a ordem) numa rotação próxima de 2300 rpm. Esta coincidência é responsável pela alta sollicitação dos componentes nessa rotação e este foi um dos motivos pelo qual optou-se pela utilização de um amortecedor com duas massas, de forma a reduzir as amplitudes do 2° modo de vibrar.

As pequenas oscilações que ocorrem em determinadas faixas de rotação para todas as ordens simultaneamente, são decorrentes das variações nas curvas de pressão de combustão existentes entre as rotações. Essas variações são inerentes dos mapas de calibração da injeção eletrônica de combustível e quanto maior for o número de curvas medidas e adicionadas ao programa de cálculo, menores serão essas oscilações nos gráficos.

Figura 24 - Amplitudes de vibrações torcionais considerando-se redução na inércia do volante

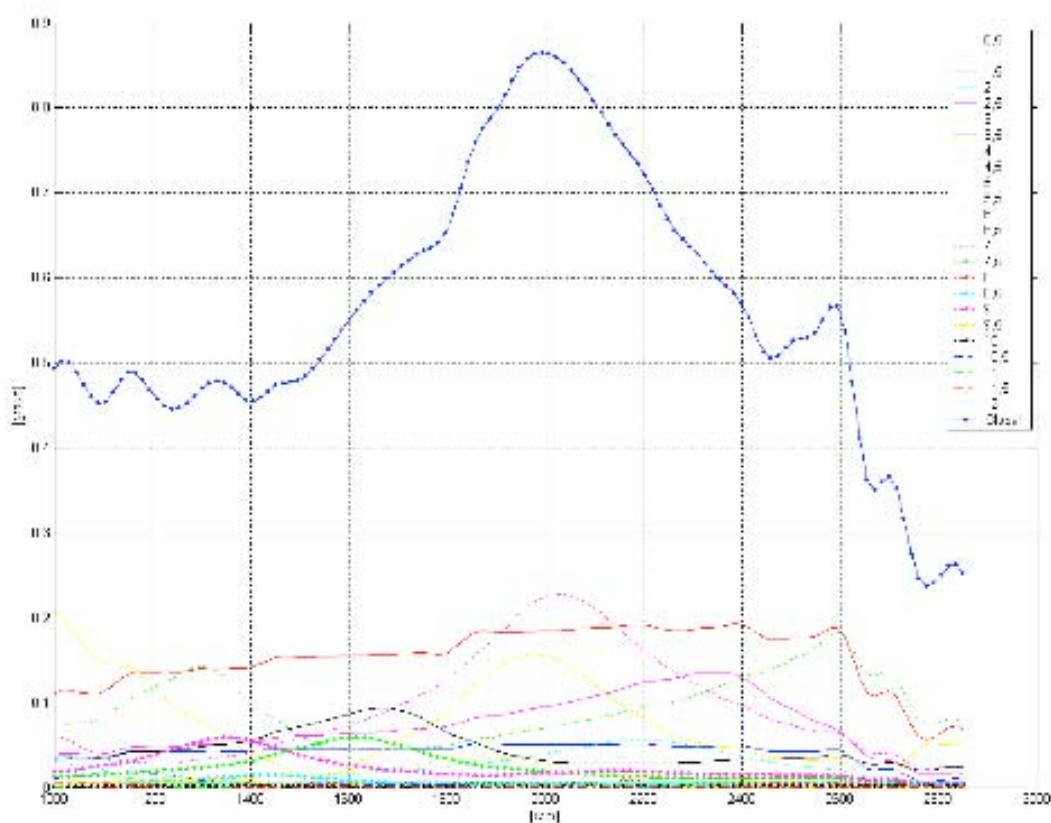


Fonte: Pasricha, M. S. 2001, p. 291.

Os resultados apresentados na figura 24 foram obtidos considerando-se uma redução de aproximadamente 30% no valor da inércia do volante e sistema de embreagem do motor. Podemos notar um aumento do grau de irregularidade nas baixas rotações e uma redução considerável na amplitude da 3a ordem / 1° modo de vibrar. As demais ordens não apresentaram reduções significativas nas amplitudes.

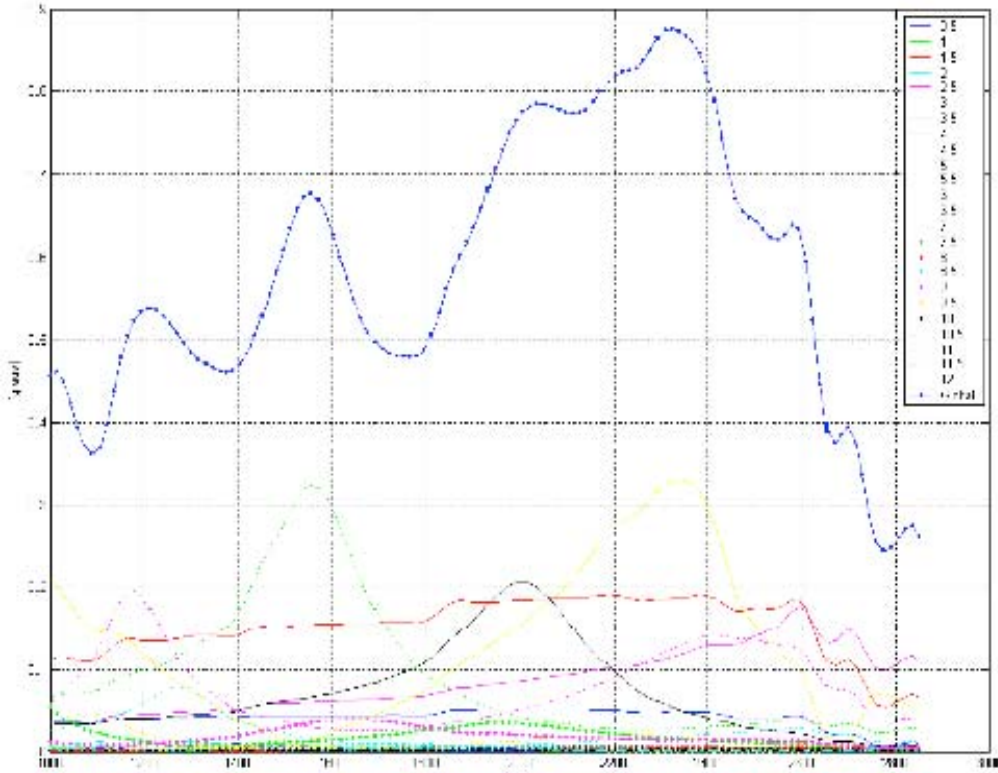
As figuras 25 e 26 mostram as amplitudes de vibrações torcionais, considerando-se os limites inferiores e superiores das faixas de rigidezes dinâmicas dos elastômeros do amortecedor apresentadas no item 3.5.3. Através desses resultados podemos observar a influência da variação dessa propriedade na resposta do sistema.

Figura 25 - Amplitudes de vibrações torcionais com $K_t(1) = 64254 \text{ N.m/rad}$ e $K_t(2) = 88887 \text{ N.m/rad}$



Fonte: Pasricha, M. S. 2001, p. 291.

Figura 26 - Amplitudes de vibrações torcionais com $K_t(1) = 127999 \text{ N.m/rad}$ e $K_t(2) = 177252 \text{ N.m/rad}$



Fonte: Pasricha, M. S. 2001, p. 300.

Neste caso específico, rigidezes dinâmicas menores levaram a amplitudes de vibração mais baixas, porém, calculando-se o torque atuante entre o volante e a primeira manivela, poderemos verificar que o valor máximo desse esforço será praticamente o mesmo para os dois exemplos e continuaria próximo dos 4400 N.m.

A partir das características de amortecimento do “damper” é possível determinar a potência dissipada pelo componente para cada rotação do motor. Esse cálculo é importante para que se determine o nível de solicitação do absorvedor, pois, caso a capacidade de dissipação de potência em forma de calor seja excedida, haverá um superaquecimento do componente e uma conseqüente degradação da borracha. Com isso o “damper” pode perder a sua função, podendo acarretar no cisalhamento do elastômero ou ainda numa falha estrutural da árvore de manivelas.

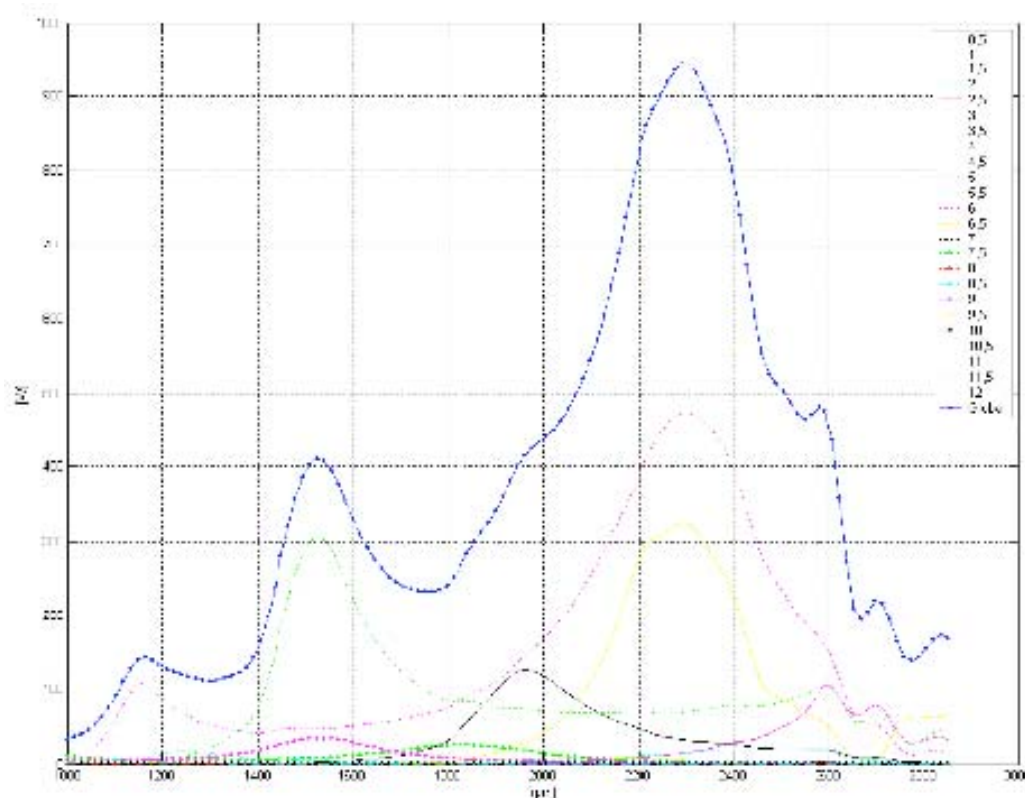
Podemos quantificar essa grandeza através da expressão:

$$Q_i = \int \dot{c}_i (\theta_i - \theta_j)^2 dt \quad . \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

Assim como no cálculo do torque atuante em cada secção do virabrequim, a potência dissipada deverá ser calculada pela soma vetorial de cada ordem das velocidades angulares e a diferença de velocidades entre as inércias deverá ser obtida considerando-se a fase dos vetores em cada instante.

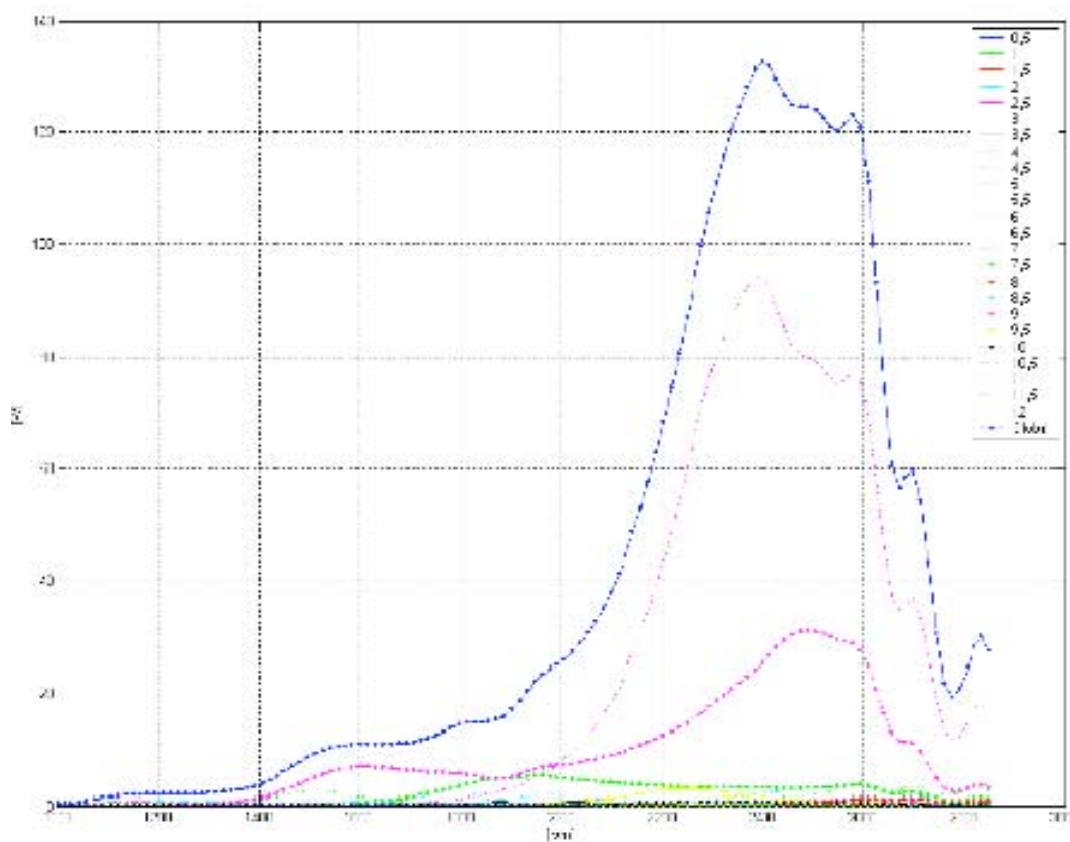
As figuras 27 e 28 representam a potência dissipada pelos elastômeros dos anéis do primeiro e segundo modos respectivamente, considerando-se os dados de entrada mostrados no início deste capítulo.

Figura 27 - Potência dissipada pela borracha do anel do primeiro modo de vibrar



Fonte: Pasricha, M. S. 2001, p. 301.

Figura 28 - Potência dissipada pela borracha do anel do segundo modo de vibrar



Fonte: Pasricha, M. S. 2001, p. 304.

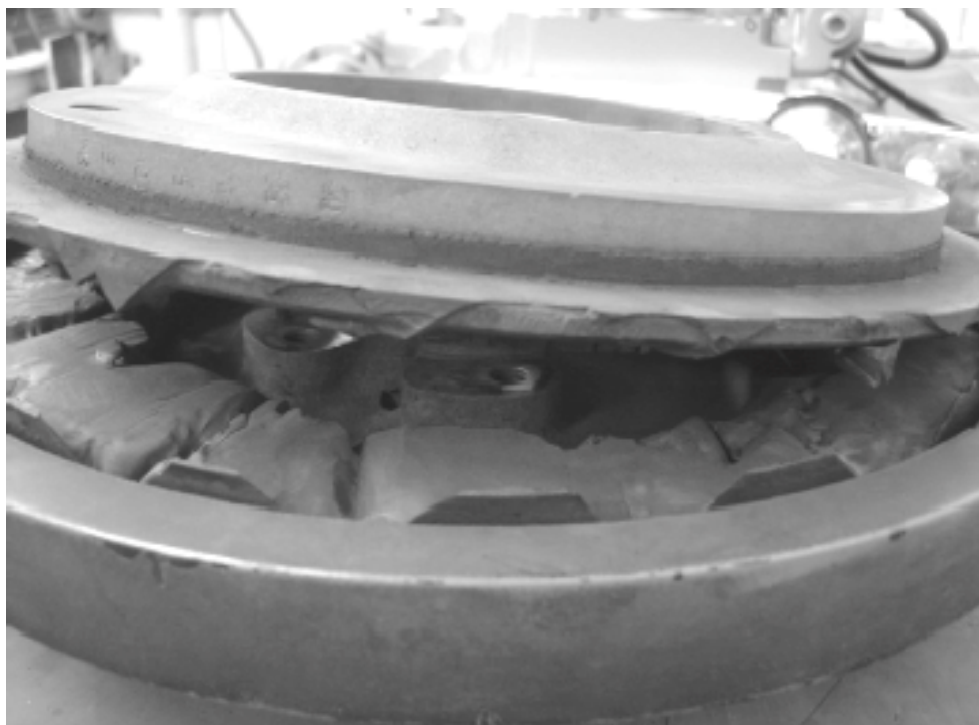
Observando a figura 27, podemos verificar que para uma rotação próxima dos 2300 rpm a potência dissipada pelo amortecedor é de 930 W. Conforme experiências com aplicações semelhantes, sabe-se que a potência máxima possível de ser dissipada por este tipo de componente é de aproximadamente 500 W nesta rotação. Sendo assim, podemos presumir que esse “damper” irá apresentar falhas na borracha do primeiro anel. Já para o segundo anel, não ocorrerão problemas estruturais.

Observações em testes de veículos em condições de operação próximas à de potência máxima e em dinamômetros na condição de 2300 rpm a plena carga, indicaram sobre-carga na borracha do primeiro anel. Notou-se um superaquecimento do amortecedor de vibrações, que acarretou numa deterioração da borracha e como conseqüência, a perda de propriedades mecânicas do elastômero.

Alguns amortecedores apresentaram apenas um leve desprendimento do primeiro anel, gerando ruídos na parte frontal do motor, o que levou à parada do teste e detecção do problema antes do colapso total do componente. Já em outros testes, houve a falha catastrófica do “damper” com o desprendimento total do anel.

A figura 29 mostra a falha de um amortecedor durante um teste em veículo nas condições descritas anteriormente. De um modo geral, os componentes apresentaram falha funcional com uma média de 66.000 km.

Figura 29 - Falha do amortecedor por cisalhamento da borracha do primeiro anel



Fonte: Brunetti F., Garcia O. 1992, p. 79.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando os resultados obtidos, podemos verificar que a metodologia utilizada para as análises de vibrações torcionais em árvores de manivelas de motores de combustão interna mostrou-se eficaz, apresentando resultados muito próximos aos obtidos experimentalmente e podemos concluir que as hipóteses adotadas para as análises, são válidas e podem ser estendidas a virabrequins de motores com dimensões semelhantes.

Podemos ainda mencionar que os parâmetros adotados a partir de experiências anteriores (tal como o valor do amortecimento absoluto) foram coerentes, tendo em vista esses resultados.

Segundo os critérios de projeto, recomenda-se que as amplitudes das vibrações torcionais para a árvore de manivelas analisada sejam no máximo de $0,25^\circ$ por ordem. Esses critérios visam garantir a integridade estrutural do componente e reduzir os níveis de ruídos gerados pelos deslocamentos de grandes amplitudes.

Dessa forma, analisando a figura 22, podemos notar que existem ordens de vibração com amplitudes superiores à máxima recomendada (1° modo / 3a ordem e 1° modo / ordem 4,5a) e dessa forma o uso do amortecedor de vibrações torcionais de borracha considerado nesta análise não é recomendado.

Também é possível observar através da figura 27 que a potência dissipada pelo amortecedor de borracha é elevada para este tipo de componente e por intermédio de experiências anteriores, podemos afirmar que a probabilidade de ocorrerem falhas estruturais é grande.

Para que seja possível a obtenção da potência especificada pelo motor estudado, será necessária a utilização de um “damper” do tipo viscoso acoplado ao virabrequim.

Este tipo de amortecedor, apesar de possuir um custo maior que o similar de borracha, possui uma maior capacidade de amortecimento o que proporciona menores amplitudes de vibrações, tornando a aplicação viável tecnicamente.

Figura 30 - Detalhe de um amortecedor de vibrações torcionais do tipo viscoso



Fonte: Brunetti F., Garcia O. 1992, p. 78.

O amortecimento se dá pelo movimento relativo entre um anel de inércia pré-determinada e a carcaça do componente, acoplados por um filme de silicone de pequena espessura. Através de propriedades, tais como: Viscosidade dinâmica do silicone, temperatura e área de contato do fluido, é possível a determinação da rigidez dinâmica e do amortecimento do “damper” em função da frequência de operação.

Dessa forma, podemos calcular as amplitudes das vibrações torcionais e comprovar a eficiência deste tipo de componente. Este estudo, juntamente com o acoplamento das vibrações axiais e flexionais às torcionais, podem ser objetos de análise em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

- JOHNSTON, P. R.; SHUSTO, L. M. **Analysis of diesel engine crankshaft torsional vibrations**. *SAE Special Publications*, 1987.
- DRAMINSKI, P. **Extended treatment of secondary resonance**. *Ship Build. Marine Eng. Int.* 1988.
- HESTERMANN, D. C.; STONE, B. J. **Secondary inertia effects in the torsional vibration of reciprocating engines**. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1994.
- PASRICHA, M. S. **Effect of the gas forces on parametrically excited torsional vibrations of reciprocating engines**. *Journal of Ship Research*. 2001, v.45, is.4.
- BRUSA, E., DELPRETE, C.; GENTA, G. **Torsional vibration of crankshafts: effect of non- constant moments of inertia**. *Journal of Sound and Vibration*. 1997, 205(2).
- SONG, X. G. et al. **Progressive torsional-axial continued vibrations in crankshaft systems: a phenomenon of coupled vibration**. *Trans. ASME, Rotating Mach. Vehicle Dyn.* 1991, 35.
- LACY, D. J., Computers in analysis techniques for reciprocating engine design. *ImechE International Conference on Vibration and Rotating Machinery*. C14/87, 1987.
- BOYSAL, A.; RAHNEJAT. **Torsional vibration analysis of a multi-body single cylinder internal combustion engine model**. *Appl. Math. Modeling*. 1997, 21:481-493.
- KER WILSON, W. **Practical solution of torsional vibration problems**. *New York: John Wiley & Sons Inc.* 1963
- IWAMOTO, S.; WAKABAYASHI, K. **A study on the damping characteristics of torsional vibration in Diesel engines**. 20, 1985.
- WANG, Y.; Lim, T. C. **Prediction of torsional damping coefficients in reciprocating engine**. 2000.
- HONDA, Y.; SAITO, T. **Dynamic characteristics of torsional rubber dampers and their optimum tuning**. *SAE Technical Paper Series*. 870580, 1987, 8 p.
- MARAGONIS, I. E. **The torsional vibrations of marine diesel engines under fault operation of its cylinders**. *Forschung im Ingenieurwesen – Engineering Research*. 1992, v.58.
- BRUNETTI F. Garcia O. **Motores de Combustão Interna**. *FEI*. 1992.
- TAYLOR C. F. **The internal combustion engine in theory and practice**. *MIT Press*. 1985, Cap.8, v.2.