



MODELAGEM E CONTROLE ÓTIMO DE UM MANCAL MAGNÉTICO DE TRÊS POLOS

Vinícius Ramos Vasco

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Rio de Janeiro

Março de 2019

MODELAGEM E CONTROLE ÓTIMO DE UM MANCAL MAGNÉTICO DE
TRÊS POLOS

Vinícius Ramos Vasco

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

Prof. Alessandro Jacoud Peixoto, D.Sc.

Prof. Guilherme Gonçalves Sotelo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2019

Vasco, Vinícius Ramos

Modelagem e Controle Ótimo de um Mancal Magnético de Três Polos/Vinícius Ramos Vasco. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XVII, 100 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 91 – 94.

1. Mancal Magnético Ativo. 2. Três Polos. 3. Controle Ótimo. 4. LQR. I. Gomes, Afonso Celso Del Nero. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pela minha vida e por ter me dado força para conseguir superar as dificuldades. À minha mãe Adalba pelo incentivo e apoio durante toda a minha vida. À Marinha do Brasil pela oportunidade de realizar o mestrado, em especial aos comandantes Rui Rodrigues e Kleber, que me selecionaram para a realização desse curso. Sou bastante grato também ao professor Max Dutra por ter me concedido a carta de recomendação exigida no processo seletivo, sem essa carta talvez eu não tivesse sido aceito.

Na primeira etapa do curso, durante as disciplinas, destaco o apoio e a ajuda de diversos colegas, em especial Ignácio Ricart e Ricardo Halfeld: os grupos que fizemos para trabalhos e estudos foram fundamentais para superar as dificuldades e aumentar o aprendizado. Na segunda etapa do mestrado, agradeço ao professor Afonso Celso Del Nero Gomes, por ter aceitado me orientar, pela paciência e disposição, e também à tenente Érika Miranda, que fez parte dessa caminhada.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM E CONTROLE ÓTIMO DE UM MANCAL MAGNÉTICO DE TRÊS POLOS

Vinícius Ramos Vasco

Março/2019

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

Mancais Magnéticos Ativos promovem o apoio de eixos através de levitação magnética. Eles são sistemas instáveis e necessitam de controle ativo com eletroímãs, sensores, amplificadores de potência e um controle em malha fechada para se tornarem estáveis. Na literatura, a primeira geometria de mancal magnético proposta foi a de oito polos, com fluxos magnéticos independentes. Contudo, novas pesquisas vêm sugerindo outras configurações, como por exemplo, com 4 polos e com 3 polos.

Neste trabalho mostra-se o procedimento de obtenção das forças de relutância para os mancais magnéticos de 8, 4 e 3 polos. Essas forças possuem não linearidades bastante complexas, mas como a região de estudo é próxima do ponto de operação, a linearização surge como alternativa válida para a análise. Para o mancal de 3 polos, é proposto um modelo da dinâmica mecânica no formato de espaço de estados, e a primeira sugestão para estabilizar o sistema é a realimentação de estados ótima, com Regulador Linear Quadrático, um controle centralizado. A segunda estratégia de Controle sugerida, chamada de controle descentralizado, é uma modificação da primeira, na tentativa de acrescentar mais zeros à matriz de ganho de realimentação, mas ainda atendendo ao mesmo índice de desempenho.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODELLING AND CONTROL OF A THREE-POLE MAGNETIC BEARING

Vinícius Ramos Vasco

March/2019

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engineering

Active Magnetic Bearings promote shaft's support through magnetic levitation. They are unstable systems and require active control with electromagnets, sensors, power amplifiers, and closed-loop control to become stable. In the literature, the first proposed magnetic bearing geometry was that of eight poles, with independent magnetic fluxes. However, further research has suggested other configurations, such as 4-pole and 3-pole.

This work shows the procedure of obtaining the reluctance forces for the magnetic bearings of 8, 4 and 3 poles. These forces have very complex nonlinearities, but since the region of study is close to the point of operation, linearization appears as a valid alternative for the analysis. For the 3-pole bearing, a mechanical dynamics model in state space is proposed, and the first suggestion to stabilize the system is optimum state feedback, with a Quadratic Linear Regulator, a centralized control. The second Control strategy suggested, called decentralized control, is a modification of the first, in an attempt to add more zeros to the feedback gain matrix, but still attending the same performance index.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
Lista de Abreviaturas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Motivação	4
1.3 Mancais Magnéticos e Mancais Motores Magnéticos na UFRJ	5
1.4 Objetivo e Contribuição	7
1.5 Revisão Bibliográfica	8
1.6 Estrutura e Metodologia	10
2 Funcionamento de Mancais Magnéticos	12
2.1 Introdução	12
2.2 Circuitos Magnéticos	12
2.3 Levitação Magnética	16
2.4 Configurações de Mancais Magnéticos	22
2.5 Conclusão do Capítulo	25
3 Forças de Relutância para os Mancais Magnéticos de 8 e 4 Polos	26
3.1 Introdução	26

3.2	Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 8 Polos	26
3.3	Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 4 Polos	30
3.4	Conclusão do Capítulo	34
4	Modelagem do Mancal Magnético de 3 Polos	35
4.1	Introdução	35
4.2	Modelagem das Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 3 Polos	36
4.3	Forças de relutância resultantes para o Mancal Magnético com configuração ótima	41
4.4	Dinâmica Mecânica	49
4.5	Torque da Força Magnética	52
4.6	Torque da Força Gravitacional	53
4.7	Torque do mancal de suporte	54
4.8	Torque provocado pelo desbalanço de massa	54
4.9	Equação dinâmica: Espaço de Estados	55
4.10	Conclusão do Capítulo	58
5	Controle	59
5.1	Introdução	59
5.2	Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade	59
5.3	Realimentação de Estados	62
5.4	Regulador Linear Quadrático	65
5.5	Controle Centralizado e Descentralizado	66
5.6	Estimadores de Estados	72
5.7	Rastreamento Assintótico e Rejeição de Perturbações	75
5.8	Conclusão do capítulo	76
6	Resultados e simulações computacionais	78
6.1	Introdução	78
6.2	Cálculo das correntes de base para equilibrar o rotor	78

6.3	Simulações e Gráficos	80
6.4	Conclusão do Capítulo	87
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	88
7.1	Conclusões	88
7.2	Trabalhos Futuros	90
	Referências Bibliográficas	91
A	Código-fonte em Matlab para Linearização das Forças de Re- lutância	95
B	Código-fonte em Matlab para Controle Descentralizado	98

Lista de Figuras

1.1	Protótipo de Mancal Motor Magnético da UFRJ.	6
1.2	Protótipos de Mancais Magnéticos da UFRJ. Fonte: [9]	7
1.3	Rotor utilizado para os mancais magnéticos. Fonte: [9], imagens cedidas pelo autor.	7
2.1	Campo magnético gerado pela corrente num fio condutor.	14
2.2	Representação dos elementos do circuito magnético e o respectivo diagrama	15
2.3	Problema de levitação simples.	16
2.4	Curva de Histerese para materiais ferromagnéticos.	17
2.5	Problema de levitação simples.	19
2.6	Problema de levitação simples em malha fechada. Figura adaptada de [10].	19
2.7	Problema de levitação simples no plano, com um grau de liberdade.	20
2.8	Problema de levitação simples, com dois graus de liberdade.	22
2.9	Mancais Magnéticos com geometrias de 8 e 4 Polos. Fonte: [9], imagens cedidas pelo autor.	23
3.1	Esquema de forças horizontais no mancal de 8 polos.	27
3.2	Zoom no esquema de forças em uma direção.	28
3.3	Caminho do fluxo magnético pela contribuição da bobina 1. Fonte:[9], imagem cedida pelo autor.	30

3.4	Circuito Magnético referente à bobina 1 no Mancais Magnético de 4 polos.	31
4.1	Fluxo Magnético referente à bobina 1 em um mancais magnético de 3 Polos.	35
4.2	Caminho do Fluxo magnético: Bobinas 1 e 2.	36
4.3	Caminho do fluxo magnético da bobina 3 e sentido positivo.	37
4.4	Circuito Magnético referente à bobina 1.	38
4.5	Circuito Magnético referente à bobina 2.	38
4.6	Circuito Magnético referente à bobina 3.	39
4.7	Caminho percorrido pelo fluxo.	40
4.8	Forças de Relutância.	41
4.9	Diagrama ilustrando o entreferro do Polo 1 após sair da posição central.	43
4.10	Possíveis orientações do Mancais Magnético de 3 Polos.	45
4.11	Fluxo magnético e forças para ângulo ótimo em estado estacionário.	46
4.12	Posicionamento e Vista 3.	50
4.13	Vistas 1 e 2.	51
4.14	Vista 2- Contribuição do peso para o Torque	54
4.15	Sistema Dinâmico em malha aberta	57
5.1	Diagrama da realimentação de estados	64
5.2	Estimador em malha aberta.	73
5.3	Estimador em malha fechada.	73
5.4	Estimador em malha fechada detalhado.	74
5.5	Realimentação de estados e de saída com integral do erro.	76
6.1	Relação entre i_{B1} e m com dados da Tabela 6.1.	80
6.2	Diagrama do sistema no Simulink.	81
6.3	Resposta dos mancais de 3, 4 e 8 pólos.	83
6.4	Trajetórias dos autovalores variando a velocidade em $\omega = 0$ até $\omega = 38.197$ rpm	84

6.5	Trajectoria dos autovalores, com controle descentralizado, com $\omega =$ 3.400 rpm a $\omega = 38.197$ rpm	85
6.6	Resposta do mancal de 3 polos com distúrbio externo alterando o posicionamento após estabilização.	86
6.7	Realimentação de estados ótima com controle integral.	86
6.8	Controle com rejeição de perturbação constante.	87

Lista de Tabelas

6.1	Valores escolhidos para projeto	79
6.2	Autovalores da matriz A para os mancais de 3, 8 e 4 pólos	81
6.3	Autovalores da matriz $A + BF^*$, para os mancais de 3, 8 e 4 pólos	82
6.4	Autovalores para duas velocidades de rotação, para as estratégias de controle LQR Centralizado e Descentralizado	84

Lista de Símbolos

0_2	Matriz de zeros 2 x 2, p. 58
A	Área da seção transversal, p. 15
C_a	Coefficiente de atrito viscoso, p. 58
C_c	Matriz de controlabilidade, p. 76
E_β, E_α	Torques externos, p. 58
F	Matriz de ganho de realimentação, p. 76
F^*	Matriz de ganho de realimentação ótima, p. 76
G	Matriz giroscópica, p. 58
I_2	Matriz identidade 2 x 2, p. 58
I_x, I_y, I_z	Momentos de Inércia em relação aos eixos x, y e z , respectivamente, p. 58
J	Momento de inércia em relação aos eixos x e y , p. 58
K_i	Ganho do controlador integral, p. 76
N	Número de voltas da bobina, p. 14
O_c	Matriz de observabilidade, p. 76
U	Energia magnética acumulada, p. 18
$V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_0)$	Índice de desempenho, p. 76

\mathcal{F}	Força magnetomotriz, p. 14
\mathcal{R}	Relutância magnética, p. 15
α	Ângulo entre o eixo do mancal e o eixo z , vista 2, p. 58
β	Ângulo entre o eixo do mancal e o eixo z , vista 1, p. 58
\mathbf{B}	Densidade de fluxo magnético, p. 13
\mathbf{H}	Intensidade de campo magnético, p. 13
\mathbf{J}	Densidade de corrente elétrica, p. 13
\mathbf{g}	Aceleração da gravidade, p. 18
\mathbf{u}	Vetor de entrada do sistema, p. 58
dV	Elemento diferencial de volume, p. 18
μ	Permeabilidade magnética, p. 13
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo, p. 13
μ_r	Permeabilidade magnética relativa, p. 13
ω	velocidade de rotação do eixo, p. 58
ϕ	Fluxo magnético, p. 15
b	Comprimento do eixo, p. 58
d	Distância da origem até o sensor, p. 58
f_m	Força magnética, p. 18
f_x	Força de relutância resultante no eixo x , p. 29
f_y	Força de relutância resultante no eixo y , p. 29
g_i	Constante multiplicativa da corrente na força resultante linearizada, p. 29

g_p	Constante multiplicativa da distância na força resultante linearizada, p. 29
h	Entreferro, p. 29
i	Corrente elétrica, p. 14
i_0	Corrente de base, p. 18
i_d	Corrente diferencial, p. 18
i_x	Corrente diferencial associada ao movimento no eixo x , p. 29
i_y	Corrente diferencial associada ao movimento no eixo y , p. 29
i_{B1}, i_{B2}	Correntes de base nas bobinas 1 e 2, p. 18
l	Caminho percorrido pelo fluxo, p. 15
m	Massa do eixo com carga, p. 58
n	Número de voltas na bobina, p. 29
x	Elemento de distância na horizontal, p. 29
x_b, y_b	Deslocamentos horizontal e vertical do eixo, p. 58
x_s	Deslocamento em x medido pelo sensor, p. 58
y	Elemento de distância na vertical, p. 29
y_s	Deslocamento em y medido pelo sensor, p. 58
dA	Elemento diferencial de área, p. 13
dl	Elemento diferencial de distância ao longo do caminho de integração, p. 13

Lista de Abreviaturas

BIBO	<i>Bounded Input-Bounded Output</i> , p. 60
DEMA	Dispositivo Eletromagnético de Atração, p. 3
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i> , p. 2
ISO	<i>International Organization for Standardization</i> , p. 9
LASUP	Laboratório de Aplicações de Supercondutores, p. 5
LQE	<i>Linear Quadratic Estimator</i> , p. 75
LQR	<i>Linear Quadratic Reulator</i> , p. 7
MOSFET	<i>Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor</i> , p. 2
PID	Proporcional-Integral-Derivativo, p. 9
PLS	Problema de Levitação Simples, p. 16
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo, p. 60
UFF	Universidade Federal Fluminense, p. 4
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro, p. 4
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte, p. 4
USP	Universidade de São Paulo, p. 4

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Em máquinas rotativas, o eixo girante é o componente que permite a transmissão de energia à carga. Nos pontos de contato, os mancais promovem apoio e guiagem para o movimento; em mancais mecânicos convencionais, são utilizados óleos lubrificantes para diminuir o eventual desgaste provocado pelo atrito entre o eixo e a parte fixa .

Existem várias desvantagens na utilização desses lubrificantes, especialmente em ambientes que podem promover alterações das características químicas deles, como locais com temperaturas muito elevadas ou muito reduzidas e nas aplicações espaciais com microgravidade. A indústria farmacêutica, a alimentícia e eventualmente até laboratórios de pesquisa que possuam restrições quanto à presença de contaminantes nos seus ambientes também precisam de maquinário capaz de superar o problema da utilização de óleos de lubrificação.

A presença do óleo reduz o atrito mas não o elimina, ainda existirão perdas na transmissão de energia. Além disso, o lubrificante precisa ser trocado periodicamente, exigindo maiores gastos e tempo de manutenção, além dos problemas ambientais relacionados ao descarte e manuseio. Alguns tipos de mancais de rolamento não utilizam lubrificantes, mas possuem elementos esféricos, cilíndricos ou cônicos que permitem a rotação ou deslizamento das peças. Apesar do baixo custo geral, possuem baixo desempenho em altas velocidades de rotação, geram calor devido ao

contato das peças e necessitam de manutenção frequente [1].

Aplicações que exijam alta eficiência energética, dinâmica controlável, elevada velocidade de rotação, como os armazenadores de energia cinética, e aplicações de máquinas rotativas que exijam o mínimo de intervenção humana em manutenção também necessitam de uma tecnologia de apoio de rotores que atenda a todas essas exigências. Os mancais magnéticos surgiram como evolução natural no estudo de motores elétricos, através das propriedades elétricas e magnéticas que geram forças que mantêm o rotor suspenso no ar.

O desenvolvimento no estudo de mancais magnéticos se deu principalmente pelo amadurecimento de outros estudos e tecnologias correlatas. Alguns avanços foram fundamentais para os mancais magnéticos: o controle de corrente através do chaveamento de alta frequência de IGBTs e MOSFETs [2] e outros dispositivos de eletrônica de potência, menores custos com o processamento digital de sinais, técnicas de controle modernas e ferramentas computacionais que permitiram o desenvolvimento de software e interface gráfica para análise em tempo real. A principal desvantagem atual do uso de mancais magnéticos é o custo mais elevado que o mancal puramente mecânico, já que existe maior complexidade e maior qualificação da mão-de-obra envolvida no seu projeto, instalação e manutenção.

Apesar de os mancais magnéticos poderem ser considerados tecnologia recente, a levitação através de propriedades magnéticas já é propriedade conhecida há bastante tempo. Através das equações de Maxwell, que formam a base do eletromagnetismo, foi possível entender melhor a interação entre os fenômenos de natureza elétrica e magnética da matéria, e constatou-se que os dois fenômenos estão intimamente relacionados. A partir das pesquisas feitas, foi possível comprovar que forças de natureza eletromagnética surgiam em corpos que estavam submetidos a campos magnéticos e elétricos, possibilitando equilibrar o peso de um corpo a partir dessas forças.

Existem mancais magnéticos de natureza eletromagnética, eletrodinâmica, com ímãs permanentes e com materiais supercondutores. Os mais utilizados são os pri-

meiros, neles o campo magnético estabelece um determinado fluxo a partir de correntes nas bobinas ao redor de um material ferromagnético¹; esse conjunto é chamado de eletroímã e as forças que surgem são de relutância. Os eletroímãs também são denominados pela sigla DEMA - Dispositivos Eletromagnéticos de Atração. Os mancais magnéticos de natureza eletrodinâmica tem o princípio de funcionamento baseado nas forças de Lorentz, em que um corpo com determinada carga elétrica ao penetrar com determinada velocidade a região de campo eletromagnético estará sujeito a sofrer uma força.

Detalhando melhor o princípio de funcionamento, do ponto de vista do controle, as correntes nos eletroímãs (que vão gerar as forças eletromagnéticas) são as entradas do sistema, que por natureza é instável. É necessário que seja feito um controle ativo em malha fechada, isto é, essas correntes de entrada devem depender de informações de posições e velocidades de rotação do eixo, coletadas por sensores ou estimadas. Essas informações são então processadas e atuam no sistema através de amplificadores de potência, que fornecem as correntes elétricas necessárias para estabilização do rotor.

Nas máquinas elétricas, incluindo os mancais magnéticos, normalmente o material utilizado é o aço elétrico, e as bobinas de fio de cobre estão localizadas em ranhuras da parte externa e fixa, chamada de estator. O eixo girante é nomeado rotor. Através da presença das correntes elétricas nas bobinas, o fluxo magnético percorre um determinado caminho na estrutura, de acordo com a geometria utilizada e o arranjo das bobinas nessas ranhuras. A distância entre o rotor e o estator é chamada de entreferro. Devido a cada uma dessas ranhuras (quando as correntes elétricas estão circulando em sua respectiva bobina associada) ser uma região de caminho de fluxo magnético, ela é chamada de polo.

Da teoria eletromagnética é sabido que o fluxo magnético é conservado em um caminho fechado. Portanto, as correntes elétricas nas bobinas geram força magnetomotriz e o fluxo magnético percorrerá o caminho fechado do circuito magnético,

¹Os materiais ferromagnéticos possuem alta permeabilidade magnética, permitindo elevadas densidades de fluxo magnético ao longo da geometria do material.

conforme a geometria do número de polos e arranjo das bobinas. De acordo com cada aplicação específica, o arranjo geométrico, isto é, o número de polos, propiciará diferentes respostas. A configuração convencional dos mancais magnéticos é a de 8 polos, cujos fluxos magnéticos geram caminhos independentes entre si.

A modelagem do mancal magnético resulta em um sistema não-linear, e a partir daí, diferentes abordagens e propostas de controle podem ser utilizadas. Avaliar o comportamento do modelo mecânico é desejável porque o mancal magnético passa a funcionar como uma suspensão, com rigidez dinâmica passível de controle. Na área de instrumentação, a redução dos custos dos sensores aliado a um aumento na confiabilidade é sempre desejável. O desenvolvimento de software capaz de monitoramento das informações, bem como diagnóstico de falhas e interface para controle também é fundamental, uma vez que existe integração entre os sistemas mecânico, elétrico, magnético, eletrônico e de inteligência computacional. O campo de pesquisa é bastante amplo e multidisciplinar, e ainda possui bastante espaço para desenvolvimento.

1.2 Motivação

O campo de estudo de mancais magnéticos dá oportunidade para pesquisas em várias áreas do conhecimento, já citadas nas considerações iniciais. Aplicações mais tradicionais de mancais magnéticos utilizam a configuração com 8 polos, mas outras geometrias também possuem vantagens e desvantagens em relação a ela. Em controle, é válido comparar as respostas dos Sistemas para compreender melhor o desempenho de cada geometria.

No Brasil, a pesquisa em mancais magnéticos atualmente é feita na sua maior parte por professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e por pesquisadores na Universidade Federal Fluminense (UFF), Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Universidade de São Paulo (USP) e em alguns Institutos Federais. Além da pesquisa em mancais magnéticos, uma área bastante similar é a de mancais motores magnéticos, que proporcionam rotação e suspensão do eixo

rotor, num arranjo mais compacto que o mancal magnético.

Nas pesquisas feitas em mancais magnéticos pelo grupo da UFRJ, várias dissertações e teses já foram realizadas tendo como base a configuração de 8 polos, inclusive existe um protótipo físico de mancal motor magnético no Laboratório de Aplicações de Supercondutores (LASUP). Posteriormente, também foram realizadas pesquisas com o mancais magnéticos de 8 e 4 polos, com a construção de protótipos. Um estudo abordando o modelo linearizado e o controle ótimo de um mancal magnético de 3 polos ainda não havia sido publicado aqui no Brasil, antes desta dissertação. Na comunidade internacional, a maior parte dos artigos da geometria de 3 polos é do pesquisador que apresentou o artigo com a configuração ótima, [3], embora existam estudos posteriores de outros pesquisadores, como [4–6].

Chen, em plenária realizada durante o 16º Simpósio Internacional de Mancais Magnéticos, em agosto de 2018 em Pequim, apresentou as vantagens desse arranjo em comparação com os demais. A primeira delas é a redução no custo financeiro, já que é a geometria que utiliza o menor número de pólos, portanto exige menos dispositivos de atuação e apresenta menor perda energética, sendo ideal para aplicações mais compactas. Contudo, tem a desvantagem de a interconexão dos fluxos magnéticos proporcionar bastante dificuldade na análise e controle, devido ao comportamento não linear entre as grandezas. Como exemplos de aplicações, foi citado o emprego de mancal magnético de 3 polos em um *drive* de disco óptico, e também aplicações de tamanho reduzido ou em micro-dispositivos. Portanto, contribuições para simplificar a modelagem, a análise e o controle do mancal magnético de 3 polos são de grande valia para o campo.

1.3 Mancais Magnéticos e Mancais Motores Magnéticos na UFRJ

As pesquisas da Coppe na área de levitação magnética têm sido feitas há alguns anos. Um dos primeiros trabalhos foi a tese de Andrés Ortiz Salazar em 1994; ele

estudou um motor CA com os enrolamentos do estator modificados para funcionar como mancal magnético. Os primeiros estudos usaram motores de indução com enrolamentos reconfigurados, que permitiu a realização de várias dissertações e teses, com validação experimental. Um protótipo de levitação com rotor vertical foi construído, permitindo assim que várias configurações fossem testadas e validadas. Esse protótipo é configurável, e já foi suspenso por um mancal axial mecânico e por um mancal axial supercondutor, conforme ilustram as Figuras 1.1a e 1.1b.

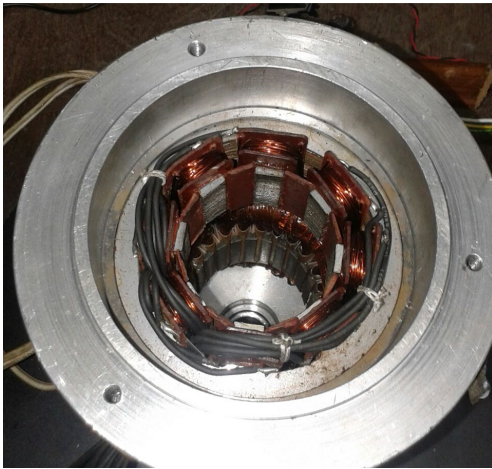


(a) Mancal Axial Mecânico. Fonte: [7]. (b) Mancal Axial Supercondutor. Fonte: [8].

Figura 1.1: Protótipo de Mancal Motor Magnético da UFRJ.

Posteriormente, foram construídos os protótipos dos mancais magnéticos de 8 e de 4 polos, exibidos nas Figuras 1.2a e 1.2b. Com eles têm sido possível realizar diversos experimentos e validações. Na figura 1.3a, temos o mancal magnético montado com a estrutura do rotor. Na parte superior do rotor há um disco com furos, em que é possível adicionar massa para verificar o comportamento dinâmico com desbalanceamento. Na Figura 1.3b, está um desenho com a vista longitudinal do rotor, com a indicação de cotas e dos componentes. Esses protótipos possuem um custo de fabricação relativamente alto, porque são feitos de forma personalizada. Também existem soluções comerciais, mas geralmente não possuem essa flexibilidade de alteração de parâmetros, e também incluem software fechado para monitoração

e controle.



(a) Mancal Magnético de 8 Polos.

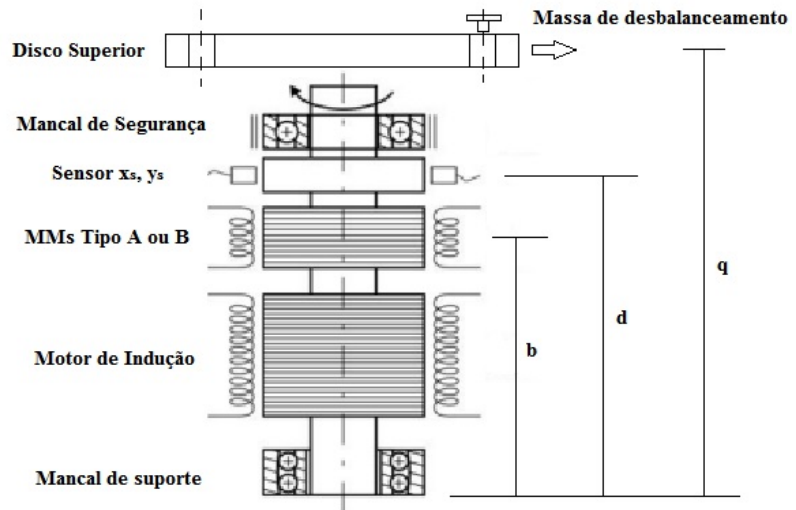


(b) Mancal Magnético de 4 Polos.

Figura 1.2: Protótipos de Mancais Magnéticos da UFRJ. Fonte: [9]



(a) Mancal Magnético com rotor.



(b) Representação do esquema do rotor.

Figura 1.3: Rotor utilizado para os mancais magnéticos. Fonte: [9], imagens cedidas pelo autor.

1.4 Objetivo e Contribuição

Este trabalho apresenta um modelo linearizado para o mancal magnético de 3 polos, e propõe duas estratégias de controle ótimo: LQR (acrônimo do inglês *Linear*

Quadratic Regulator, em português Regulador Linear Quadrático) nos modos centralizado e descentralizado.

Ao utilizar a estratégia LQR centralizado, a intenção é comparar, na medida do possível, o desempenho do mancal magnético de 3 polos com os mancais de 4 e 8 polos, já publicados em trabalho anterior [9].

O controle LQR descentralizado tem por objetivo obter uma matriz de ganho de realimentação com mais elementos nulos, mas que consiga atender ao mesmo índice de desempenho do caso centralizado.

A principal contribuição deste trabalho é a proposta de um modelo linearizado das forças de relutância para análise do mancal magnético de 3 polos. Os estudos preliminares deste trabalho permitiram a publicação de um artigo no 16º Simpósio Internacional de Mancais Magnéticos, em Pequim. A intenção é escrever um novo artigo para publicação em revista internacional ou para o 17º Simpósio Internacional de Mancais Magnéticos, a ser realizado no Rio de Janeiro em 2020.

1.5 Revisão Bibliográfica

Como referências básicas de mancais magnéticos em língua inglesa, os livros [2, 10] são de alguns precursores dos trabalhos na área, como Schweitzer, Maslen, Bleuler e Chiba. Uma referência para se ter um panorama geral da tecnologia é o artigo [11], que discorre sobre características das principais topologias. Em português, o único livro sobre o assunto é a referência [12], de autoria de professores da UFRJ, UFRN e UFF. Na UFRJ já foram feitas mais de dez dissertações e teses sobre o tema, das quais serão citadas aqui apenas uma parte.

David, em [13], apresentou um método de levitação de rotor vertical utilizando um mancal axial supercondutor. No experimento também eram empregados mancais motores para equilíbrio de rotação do eixo. Também trabalhando com supercondutividade, Sotelo, em [1], apresentou modelos para materiais supercondutores com aplicação em mancais magnéticos, realizando testes e com construção de protótipos. Em [14], Cardoso trabalhou com controle de velocidade e de posição em mancais

motores magnéticos, com a utilização de processamento digital de sinais. Em [15], Junior propôs um modelo matemático para realizar o controle de velocidade de um mancal motor magnético. Em [16], Rodrigues apresentou uma estratégia de controle ótimo modificado para aplicação em mancais magnéticos.

Gomes em [17] utilizou controle em um mancal motor, empregando controle digital. Em [18], Kauss implementou no sistema experimental técnicas de controle ótimo usando processamento digital de sinais. Franco, em [7], utilizou controle robusto \mathcal{H}_∞ aplicado ao controle de posição em mancais magnéticos. Garcia, em [8], avaliou o critério de desempenho de controladores de mancais magnéticos com base na norma 14839. Em [19], Pinto fez comparações teóricas e medições experimentais entre mancais magnéticos com as configurações de 4 e 8 polos, sendo que algumas dessas comparações já haviam sido apresentadas em [9].

Especificamente sobre o mancal magnético de 3 Polos, os trabalhos de Chen são bastante significativos. As três primeiras publicações foram feitas em parceria com Hsu. Em [3] ele apresenta a configuração ótima de mancais magnéticos de 3 polos, que possui ângulo de orientação que minimiza o número de amplificadores de potência e as correntes de base que minimizam as perdas no cobre. No mesmo ano, em [20], mostra o processo de linearização por realimentação feito no modelo de controle por tensão. Em [21], a estratégia linearizada é comparada com o controle integral por modos deslizantes.

Em [22] foi apresentada a validação experimental das estratégias de controle apresentadas nos trabalhos anteriores. Em [23] é feita uma compensação adaptativa para desbalanço de massa conhecida no mancal magnético de 3 polos. Em seguida, em [24], é implementado um estágio de controle robusto para ser capaz de superar incertezas e pequenas variações no modelo, com apresentação de resultados numéricos e experimentais. Em [25] ele propôs um observador não linear de alto ganho para a estrutura, com validação numérica e experimental. Em [26] ele apresenta um controlador não-linear suave (tradução livre de "*Smooth Nonlinear Controller*"), mais simples de implementar que o controle não-linear convencional.

A referência [27] apresenta limites de desempenho levando em conta capacidade de carga, rigidez dinâmica e velocidade de rotação. Em [28] ele propõe a utilização em conjunto do observador com o controlador não-linear suave, e em [29] é proposto o uso de sensoriamento elétrico para estimação das variáveis de posição utilizadas no controle de posicionamento.

Dentre alguns autores que também trabalharam com esse tema, podemos citar o trabalho de Maslen e Meeker [4], em que é proposta uma nova modelagem das forças eletromagnéticas com o intuito de facilitar o emprego de um drive de motor trifásico. Darbandi em [5] utiliza controle PID descentralizado e compara com o controle não-linear por modos deslizantes. Kiani em [6] propõe um controle híbrido para o mancal de 3 polos, em que o domínio não-linear é dividido em regiões lineares, onde fica possível aplicar controladores lineares.

Por fim, as referências utilizadas para controle clássico e moderno foram [30–32], para sistemas lineares, utilizou-se [33, 34], e para controle ótimo o livro [35] e notas de aula do professor Murray do Instituto de Tecnologia da Califórnia, referência [36].

1.6 Estrutura e Metodologia

O capítulo 2 apresenta os conceitos básicos do eletromagnetismo clássico, como as equações de Maxwell, e circuitos magnéticos. Em seguida apresenta o princípio da levitação magnética com o exemplo direto do problema de levitação simples, e sua relação com os mancais magnéticos.

O capítulo 3 descreve o procedimento analítico para encontrar as forças de re-lutância e o modelo dinâmico do sistema. A orientação do mancal e as correntes de base utilizadas vêm dos resultados obtidos da configuração ótima proposta em [3], e os procedimentos para obter as forças resultantes e o modelo dinâmico foram similares aos feitos em [9], com análise dos circuitos magnéticos e considerando os torques externos exercidos no mancal magnético.

O capítulo 4 expõe a teoria de controle por espaço de estados necessária para o entendimento da dissertação, com os conceitos de estabilidade, controlabilidade,

observabilidade, realimentação de estados, observadores (estimadores de estados) e controle ótimo com o regulador linear quadrático nas suas versões centralizada e descentralizada.

O capítulo 5 apresenta resultados de simulações computacionais. Foram utilizadas as mesmas dimensões físicas dos protótipos já existentes dos mancais de 8 e 4 polos, expostas em [9], a fim de comparar a resposta do mancal magnético de 3 polos com esses outros dois. As simulações foram feitas com duas velocidades de rotação diferentes.

Capítulo 2

Funcionamento de Mancais Magnéticos

2.1 Introdução

Este capítulo apresentará os conceitos básicos de funcionamento dos mancais magnéticos. As referências utilizadas para este capítulo foram [12, 37, 38]. Inicialmente são mostradas as equações do eletromagnetismo clássico que permitem analisar circuitos magnéticos e encontrar as forças de relutância a partir dos fluxos magnéticos. Em seguida é apresentado o problema de levitação simples em malha aberta e em malha fechada e a relação direta que existe com a levitação dos rotores e mancais magnéticos. Por último, citam-se as principais topologias de mancais magnéticos em uso e as vantagens e desvantagens da geometria de 3 polos.

2.2 Circuitos Magnéticos

A base do estudo de máquinas elétricas e conversão eletromecânica de energia está no eletromagnetismo clássico. A lei de Ampère na forma integral, equação (2.1), relaciona a densidade de corrente elétrica num fio condutor e a intensidade do campo magnético num caminho fechado. Posteriormente, Maxwell faz uma generalização dessa lei adicionando um termo das correntes de deslocamento, mas para os casos em

que os objetos possuem tamanho macroscópico e a frequência elétrica de operação é baixa, essas correntes de deslocamento podem ser desprezadas, tornando a lei de Ampère perfeitamente aplicável:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.1)$$

Nessa equação (2.1), a variável \mathbf{B} é a densidade de fluxo Magnético, $d\mathbf{l}$ é o elemento diferencial de distância ao longo do caminho de integração, μ é a permeabilidade magnética do meio, \mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica e $d\mathbf{A}$ é o elemento diferencial de área no condutor elétrico. A relação entre a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} e a intensidade de campo magnético \mathbf{H} é dada por:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.2)$$

em que

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$

sendo que μ_r é a permeabilidade relativa do material e μ_0 é a permeabilidade do vácuo, com valor igual a $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

Devido à não existência de cargas magnéticas monopulares, as linhas de campo magnético sempre possuem um caminho fechado, fato expresso matematicamente pela equação (2.3):

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.3)$$

Quando a corrente elétrica percorre um fio condutor, é produzido um campo magnético cuja densidade de fluxo magnético é proporcional à densidade de corrente e ao elemento de área considerado, já citado anteriormente pela lei de Ampère. O artifício empregado consiste em colocar o polegar da mão direita no mesmo sentido da corrente elétrica, e o sentido indicado pelos outros dedos será o mesmo sentido do fluxo magnético. A figura 2.1 ilustra uma representação das linhas de fluxo

magnético quando circula corrente elétrica ao longo de um condutor.

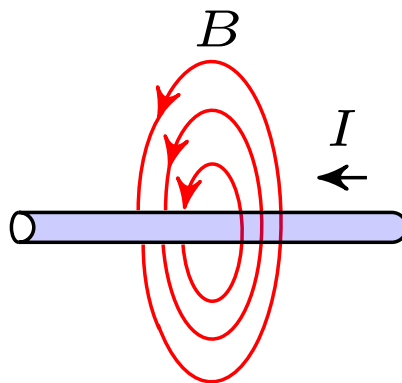


Figura 2.1: Campo magnético gerado pela corrente num fio condutor.

Ao espiralar o fio condutor ao longo de um trecho do dispositivo, o fluxo magnético estará concentrado em uma única direção. Essa configuração da fiação elétrica espiralada no material é chamada de enrolamento ou bobina, e ela será fonte do fluxo magnético. A técnica de utilizar a mão direita para sentido do fluxo também é aplicável no caso de enrolamentos, mas com uma pequena modificação. Para descobrir o sentido, direciona-se os dedos do indicador ao mínimo na direção da corrente na bobina, e o polegar apontará o sentido do fluxo.

Em circuitos magnéticos o enrolamento é representado como força magnetomotriz, cuja unidade no Sistema Internacional é Ampere-espira (A.e), e cuja expressão matemática é exatamente a amplitude da corrente elétrica (i) multiplicada pela quantidade de voltas da bobina (N). A lei circuital de Ampère, equação (??), pode ser reescrita como

$$\mathcal{F} = Ni = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.4)$$

em que Ni é a corrente enlaçada pelo caminho de integração.

A Figura 2.2 mostra duas representações de circuitos magnéticos: a Figura 2.2a mostra um exemplo de configuração geométrica do dispositivo, indicando como seria a construção física do aparato, e a Figura 2.2b mostra o respectivo diagrama do circuito magnético, com a indicação dos elementos, análogo ao que é feito para a análise de circuitos elétricos.

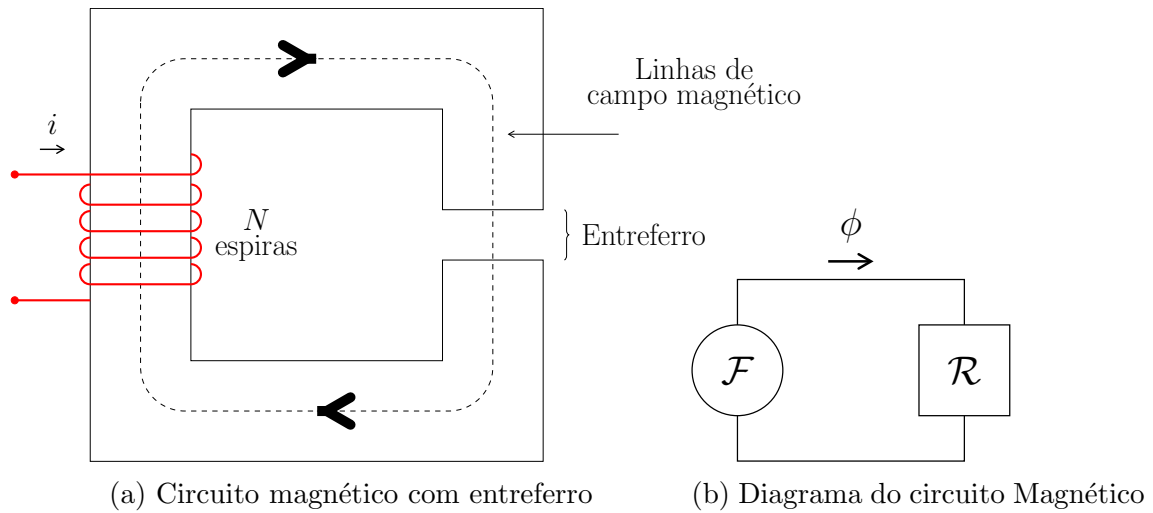


Figura 2.2: Representação dos elementos do circuito magnético e o respectivo diagrama

Os materiais ferromagnéticos são bastante utilizados como condutores de fluxos magnéticos. Eles possuem elevada permeabilidade magnética e permitem que praticamente todo o fluxo magnético esteja confinado dentro do material, percorrendo o caminho fechado de acordo com a geometria do dispositivo. Em uma analogia com os circuitos elétricos, os materiais ferromagnéticos seriam bons "condutores" de fluxo magnético. O termo que mensura a condutibilidade de fluxo magnético ao longo do material é chamado de relutância magnética (\mathcal{R}), e depende do comprimento do caminho percorrido pelo fluxo (l), da permeabilidade magnética (μ) e da área da seção transversal (A), conforme expressão (2.5). A relutância magnética é análoga à resistência elétrica de um fio condutor, mas para um circuito magnético.

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}. \quad (2.5)$$

A expressão matemática para o fluxo magnético é dada pela equação (2.6), em que através do produto escalar é possível constatar que é levado em conta para o fluxo o vetor de densidade de campo magnético perpendicular ao elemento de área que ele atravessa.

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.6)$$

No conjunto representado na figura 2.2a, costuma existir grande diferença entre

as permeabilidades magnéticas do material ferromagnético e do meio em que ele está imerso. Se estiver imerso no ar, que possui baixa permeabilidade magnética, o trecho seccionado do material apresentará alta relutância, conforme expressão (2.5). Este seccionamento do material é chamado de entreferro, e nos circuitos magnéticos vão representar elementos com alta relutância.

O arranjo adequado entre as bobinas com material ferromagnético permite projetar circuitos magnéticos para os mais variados fins, como transformadores, máquinas rotativas e mancais magnéticos. Para casos simples, o cálculo analítico leva a resultados satisfatórios, mas para situações mais complexas o auxílio de softwares específicos e outros métodos de análise, como o método dos elementos finitos, passa a ser fundamental.

2.3 Levitação Magnética

Para melhor compreender o surgimento de forças magnéticas num arranjo de eletroímãs, é preciso apresentar o conceito de energia magnética. O desenvolvimento matemático será feito a partir do problema de levitação simples (PLS), conforme sistema exemplo da Figura 2.5. O PLS consiste em estabelecer a corrente elétrica i na bobina capaz de provocar a força magnética f_m para anular o peso do objeto.

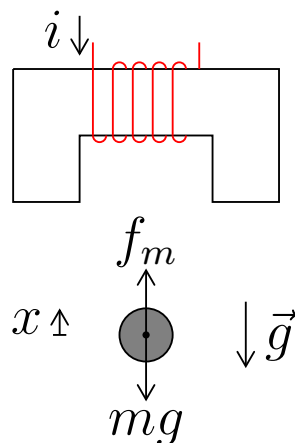


Figura 2.3: Problema de levitação simples.

De maneira genérica, pode-se considerar que o sistema recebe energia da forma elétrica, acumula energia magnética e fornece como saída energia da forma mecânica. Associada ao entreferro, a energia magnética acumulada possui relação com o volume ocupado, com a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} e com a intensidade de campo \mathbf{H} .

Os materiais ferromagnéticos possuem relação $B - H$ não linear, tipicamente com uma curva de histerese conforme Figura 2.4.

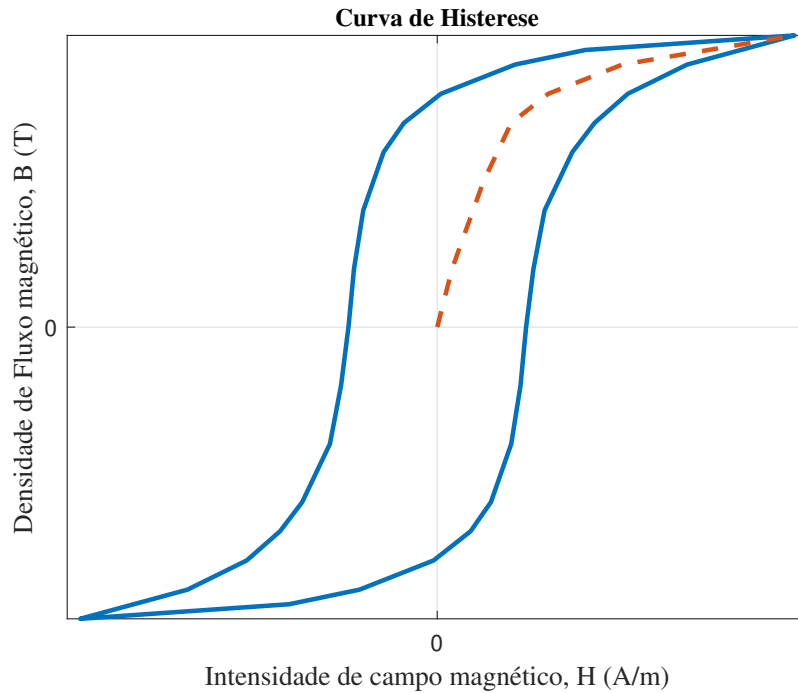


Figura 2.4: Curva de Histerese para materiais ferromagnéticos.

A relação linear entre B e H , que representa permeabilidade constante, só é válida para uma região muito pequena, e conseqüentemente a corrente elétrica não pode sofrer grandes variações. Essa ressalva precisa ser feita para se utilizar o valor μ como constante.

A energia magnética acumulada U é dada pela equação (2.7)

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (2.7)$$

e a força magnética f_m é a taxa de variação dessa energia magnética acumulada em razão da variação da posição; o sinal negativo indica que essa força sempre será

atrativa:

$$f_m = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (2.8)$$

Considerando um elemento de volume em função do deslocamento x , tem-se:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V(x). \quad (2.9)$$

Mesmo com a consideração da permeabilidade magnética possuir valor constante, que só vale para uma pequena faixa de B e H , devido ao termo quadrático em B , a relação entre a força magnética f_m , a corrente elétrica i e o deslocamento x é não linear, com expressões características para cada configuração de circuito magnético:

$$f_m = f(i, x).$$

É interessante para a modelagem do mancal magnético ter condições de expressar a força magnética em função do fluxo magnético. Considerando que o dispositivo possui área uniforme, a equação (2.6) é reescrita como:

$$\phi = BA \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\phi}{A}, \quad (2.10)$$

e o volume $V(x)$ é dado por:

$$V(x) = Ax. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.9) tem-se:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Ax = \frac{\phi^2}{2\mu_0 A} x. \quad (2.12)$$

Então, ao substituir a equação (2.12) em (2.8), o módulo da força magnética em função do fluxo magnético será dado por:

$$f_m = \frac{\phi^2}{2\mu_0 A}. \quad (2.13)$$

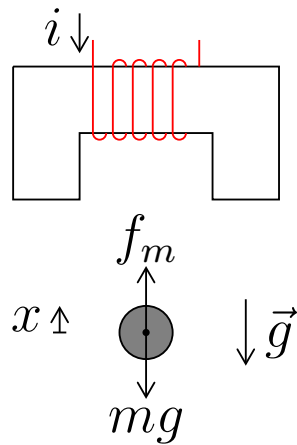


Figura 2.5: Problema de levitação simples.

Esse problema de levitação simples pode ser categorizado na teoria de controle como um sistema em malha aberta instável. Para estabilizá-lo é necessário fechar a malha de controle utilizando um sensor de posição para fornecer sinal ao controlador. Processando o sinal do sensor, o Controlador terá condições de enviar comandos ao amplificador de potência a fim de estabelecer a corrente elétrica capaz de gerar a força magnética adequada ao equilíbrio do corpo. A figura 2.6 ilustra o problema de levitação em malha fechada.

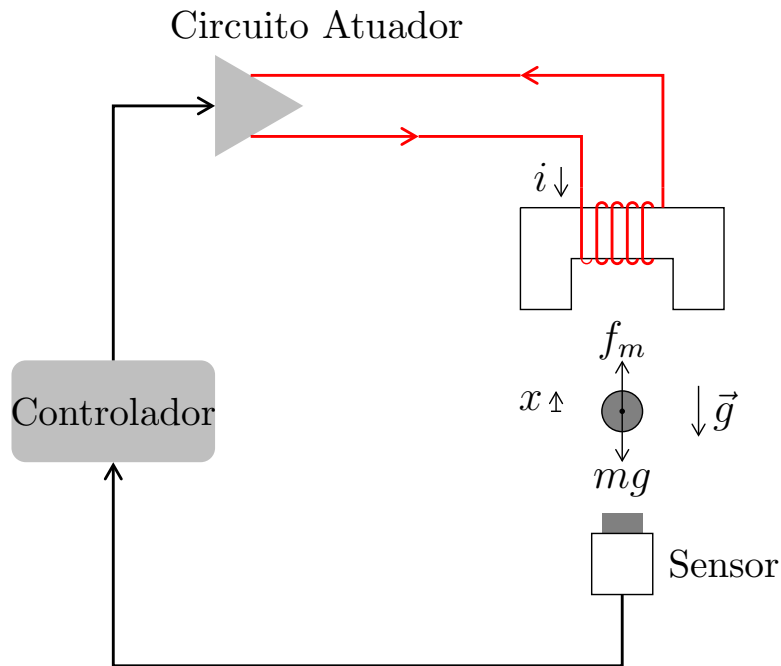


Figura 2.6: Problema de levitação simples em malha fechada. Figura adaptada de [10].

Essa configuração de mancais magnéticos em malha fechada, com o uso de amplificadores de potência, sensores e eletroímãs é nomeada de mancal magnético ativo, porque o controle é feito de forma ativa com a geração de corrente. Nos mancais magnéticos ativos as propriedades de rigidez, amortecimento e posicionamento são ajustáveis através do controle, dentro dos limites físicos impostos pelo dispositivo é claro.

O problema da levitação simples, em que o peso de um objeto é anulado através da força eletromagnética gerada pelo eletroímã, ilustra a situação de movimentação com apenas um grau de liberdade. Ao considerar o objeto num plano, com a gravidade na direção perpendicular e não afetando o movimento, a situação de equilíbrio poderia ser conseguida através de dois eletroímãs dispostos diametralmente opostos ao objeto, conforme figura 2.7.

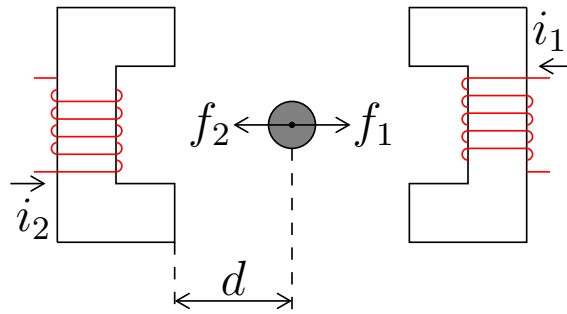


Figura 2.7: Problema de levitação simples no plano, com um grau de liberdade.

Através da expressão geral da força magnética, equação (2.13), é possível obter as expressões das forças magnéticas para cada arranjo geométrico. A referência básica para os parágrafos seguintes é [12], lá todo o equacionamento é apresentado.

No caso particular com um grau de liberdade, figura 2.7, a força magnética será função não linear das correntes ' i_1 ' e ' i_2 ' nas bobinas, da distância ' d ' do centro da esfera até a bobina e também de uma constante K que relaciona outras variáveis como o número de voltas na bobina e a permeabilidade magnética do ar. A expressão (2.14) mostra a força, que é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de corrente da bobina, e inversamente proporcional ao quadrado da distância do

objeto:

$$f = -K \left(\frac{i}{d} \right)^2. \quad (2.14)$$

Na figura 2.7, sendo f_1 e i_1 a força de relutância e a corrente do eletroímã da direita, e f_2 e i_2 a força e a corrente do eletroímã da esquerda, e considerando um deslocamento x para a direita, as forças podem ser reescritas como:

$$f_1 = K \left(\frac{i_1}{d-x} \right)^2, \quad \text{e} \quad f_2 = -K \left(\frac{i_2}{d+x} \right)^2. \quad (2.15)$$

A fim de simplificar a análise, e já pensando nas variáveis de controle, é estabelecido que cada uma das correntes i_1 e i_2 possuem duas componentes: uma parcela é a corrente de base, denominada por i_{B1} e i_{B2} , e outra parcela é chamada de corrente diferencial, aqui nomeada de i_d . As correntes então podem ser expressas por:

$$i_1 = i_{B1} + i_d, \quad \text{e} \quad i_2 = i_{B2} - i_d.$$

Esse procedimento é chamado de acionamento diferencial, e será bastante útil para simplificar o controle, uma vez que as correntes de bases serão fixas e as correntes diferenciais serão relacionadas diretamente com o posicionamento do objeto. Assim, reescreve-se as expressões de f_1 e f_2 da equação (2.15) como:

$$f_1 = K \left(\frac{i_{B1} + i_d}{d-x} \right)^2 \quad \text{e} \quad f_2 = -K \left(\frac{i_{B2} - i_d}{d+x} \right)^2.$$

A força resultante, f_r é dada pela soma de f_1 e f_2 :

$$f_r = f_1 + f_2 = K \left[\left(\frac{i_{B1} + i_d}{d-x} \right)^2 - \left(\frac{i_{B2} - i_d}{d+x} \right)^2 \right]. \quad (2.16)$$

Ao invés de a força resultante estar em função das duas correntes, ela passa a ficar em função apenas da parcela de corrente diferencial i_d e do deslocamento x do objeto.

Com dois graus de liberdade, conforme figura 2.8, o equilíbrio viria do can-

celamento das forças em cada uma das direções. Estudar essas possibilidades de equilíbrio é útil para a aplicação em mancais magnéticos, que podem ser utilizados para eixos tanto na horizontal quanto na vertical. Em mancais magnéticos com eixos orientados na horizontal, a força magnética gerada deve ser capaz de equilibrar o peso do eixo mais carga, já no mancal magnético disposto verticalmente, as forças magnéticas devem equilibrar apenas o eixo, embora hajam mancais de escora para sustentar o peso do eixo.

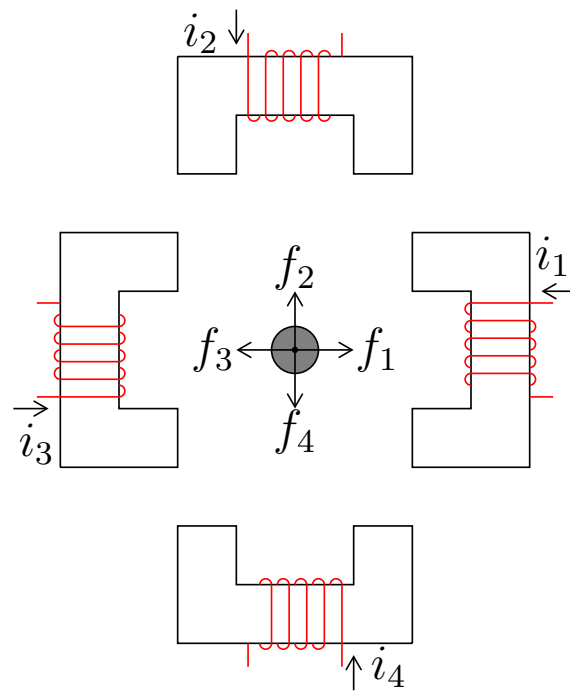


Figura 2.8: Problema de levitação simples, com dois graus de liberdade.

O mancal magnético é análogo ao problema da levitação com dois graus de liberdade, com a diferença que o arranjo de eletroímãs em um material ferromagnético é acoplado numa peça única.

2.4 Configurações de Mancais Magnéticos

Nos mancais magnéticos, assim como nos outros tipos de máquinas elétricas, a parte fixa onde estão localizadas as bobinas é nomeada estator e o eixo girante é usualmente chamado de rotor. Para diferenciar o rotor de uma máquina convencional

do rotor de um mancal magnético, na literatura também existe a nomenclatura "flotor", por se tratar de um rotor flutuante, mas ela é pouco utilizada.

Após estudar o problema de levitação conforme mostra a figura 2.8, a geometria de mancal magnético mais simples e intuitiva é a de 8 polos, cujo diagrama é mostrado na Figura 2.9a. Ela é a configuração mais utilizada nas aplicações industriais [11]. Posteriormente foram pesquisadas outras geometrias e configurações, como a de 4 polos, 2.9b, que apresenta um arranjo mais enxuto e também é simétrica. O nome polo é empregado porque é através dessa protuberância do estator que o fluxo percorre parte do seu caminho fechado, e este fluxo magnético pode estar sendo atraído ou repelido do polo, a depender das correntes.

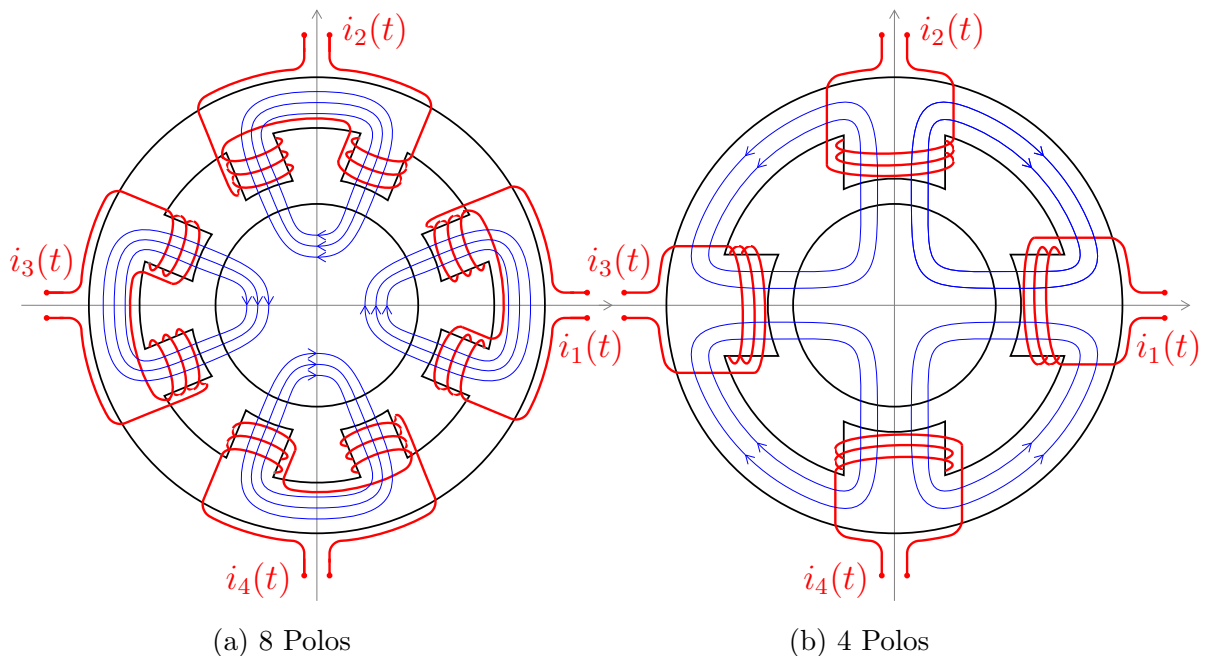


Figura 2.9: Mancais Magnéticos com geometrias de 8 e 4 Polos. Fonte: [9], imagens cedidas pelo autor.

Nas Figuras 2.9a e 2.9b estão indicadas as linhas dos fluxos magnéticos quando as bobinas estão energizadas. Na geometria de 4 polos, existe uma interconexão entre os fluxos magnéticos provenientes de cada bobina. Analisando a contribuição individual, o fluxo magnético oriundo da corrente i_1 percorrerá o caminho magnético dos outros 3 polos, e o mesmo acontecerá com os fluxos das outras bobinas. O fluxo resultante será uma combinação da contribuição de cada polo. Já na geometria de

8 polos não ocorre a interconexão dos fluxos, tornando mais simples o projeto e a análise.

Os trabalhos [9, 19] trazem comparações entre as configurações de 4 e 8 polos, com a análise dos circuitos magnéticos, a expressão das forças de relutância em cada eixo e a linearização, válida para pequenos deslocamentos. O estator com 4 polos apresenta estrutura mais compacta e, na teoria, as forças de relutância possuem o dobro da intensidade das forças da geometria de 8 polos, mas todas as consequências dessa característica e as eventuais desvantagens ainda não foram totalmente elucidadas. Para cada aplicação específica, os prós e contras de cada configuração devem ser avaliados a fim de se obter o melhor desempenho possível.

A geometria de 3 polos aparece como alternativa para um arranjo mais compacto, tendo o número mínimo de polos necessários para equilibrar um objeto no plano. Além disso, ela possui um consumo energético menor que as de 4 e 8 polos, conforme comparação feita em [11]. As principais desvantagens acabam sendo: a assimetria devido ao número ímpar de polos e o acoplamento entre os fluxos magnéticos, que complica a análise e o controle. A assimetria no arranjo faz com que em um polo a densidade de fluxo magnético (e consequentemente a força de relutância) seja maior que nos outros dois, restringindo a orientação dele, uma vez que um polo terá maior força que outros dois. O usual é utilizar um amplificador de potência para cada bobina, mas Chen em [3] propôs uma estrutura em que são necessários apenas dois amplificadores. Nessa configuração, chamada de ótima, o mancal é utilizado na horizontal, com uma orientação em Y.

Existem outros arranjos geométricos de mancais magnéticos, como por exemplo os que possuem 6 e 12 polos, que apresentam a vantagem dos fluxos magnéticos não serem interconectados, mas pecam no volume e quantidade de material utilizado, que são maiores.

2.5 Conclusão do Capítulo

Foram apresentadas as duas equações de Maxwell necessárias para entender o funcionamento de circuitos magnéticos e para encontrar as forças de relutância. Através dessas forças, é possível apresentar o modelo do problema de levitação simples e seu aprimoramento em malha fechada com um controlador. O modelo simplificado de um mancal magnético pode ser aproximado ao problema de levitação, que consiste em manter o rotor em equilíbrio através das forças magnéticas. As geometrias de mancais magnéticos mais utilizadas possuem 4 e 8 polos, mas para aplicações com tamanho reduzido e que demandam menos energia, a geometria de 3 polos surge como alternativa viável. Mesmo com 3 polos, existem variações nas possibilidades do número de amplificadores utilizados, sendo que a chamada configuração ótima utiliza apenas dois amplificadores, mas exige uma orientação geométrica particular.

Capítulo 3

Forças de Relutância para os Mancais Magnéticos de 8 e 4 Polos

3.1 Introdução

Este capítulo tem a finalidade de detalhar a obtenção das forças de relutância nas geometrias de 8 e de 4 polos, para ser possível no próximo capítulo compará-las com as forças da geometria de 3 polos. As topologias 8 e 4 polos possuem simetria em relação aos eixos x e y , sendo possível obter a força em uma direção e replicar para a outra direção. Porém, existem particularidades em cada caso, pois no mancal de 8 polos os fluxos são independentes e no de 4 polos ocorre interconexão dos fluxos.

3.2 Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 8 Polos

O objetivo desta seção é deduzir as equações das forças de relutância para o mancal de 8 polos, e para isso foram utilizadas as referências [10, 12, 19].

O problema será equacionado para o eixo posicionado na vertical, e é bastante parecido com o problema de levitação simples mostrado na seção 2.3. No mancal magnético de 8 polos cada bobina envolve dois polos, de forma que os fluxos

magnéticos são independentes. A Figura 3.1 exibe as forças de atração f_1 e f_3 exercidas pelos respectivos conjuntos de bobinas, e o sentido positivo adotado pela força f_x .

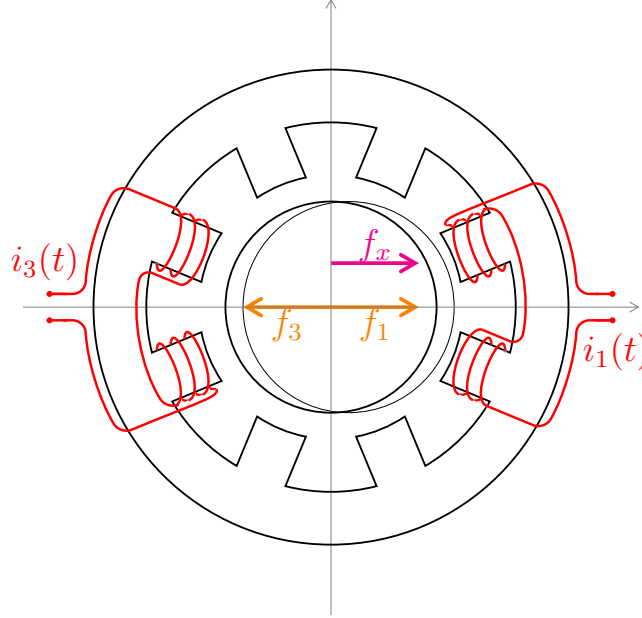


Figura 3.1: Esquema de forças horizontais no mancal de 8 polos.

A fim de ver com mais detalhes as variáveis e permitir um melhor entendimento das equações, a Figura 3.2 apresenta um detalhe dos dois polos da bobina 1, que não estão desenhados. Supõe-se que inicialmente o entreferro possui dimensão h , e após um movimento do rotor de x na horizontal, passa a ser h' . Cada um dos polos exerce uma força f_{1a} , que adicionadas resultam em f_1 . Além disso, os polos possuem uma orientação θ em relação à horizontal e a área da seção transversal de cada polo é A_8 .

Nomeando por \mathcal{R}_{1a} a relutância de um entreferro após a movimentação do eixo, podemos equacioná-la como:

$$\mathcal{R}_{1a} = \frac{h'}{\mu_0 A_8} = \frac{h - r}{\mu_0 A_8} = \frac{h - x \cos \theta}{\mu_0 A_8}. \quad (3.1)$$

O fluxo magnético ϕ_{1a} é referente a apenas um polo, portanto o número de voltas contabilizado é $n_8/2$. Esse fluxo é obtido através da razão entre a força

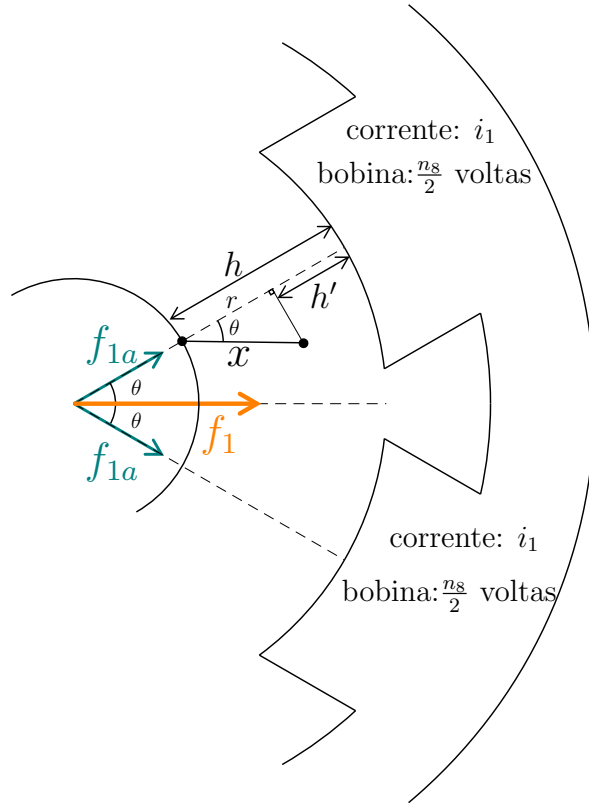


Figura 3.2: Zoom no esquema de forças em uma direção.

magnetomotriz e a relutância:

$$\phi_{1a} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{1a}} = \frac{\frac{n_s}{2} i_1}{\frac{\mu_0 A_8}{h - x \cos \theta}} = \frac{\mu_0 A_8 n_s i_1}{2(h - x \cos \theta)}. \quad (3.2)$$

A força magnética referente a apenas um pólo, conforme vista na equação (2.13) e fazendo a substituição do fluxo ϕ_{1a} obtido acima é

$$f_{1a} = \frac{\phi_{1a}^2}{2\mu_0 A_8} = \frac{\mu_0 A_8 n_s^2}{8} \left(\frac{i_1}{h - x \cos \theta} \right)^2. \quad (3.3)$$

Portanto, a força magnética f_1 é a soma das duas forças f_{1a} exercidas por cada pólo, e possuirá módulo

$$f_1 = 2 \cdot f_{1a} \cdot \cos \theta = \frac{\mu_0 A_8 n_s^2 \cos \theta}{4} \left(\frac{i_1}{h - x \cos \theta} \right)^2. \quad (3.4)$$

Utilizando o acionamento diferencial para as correntes, isto é, $i_1 = i_0 + i_x$, em que i_0 é a corrente de base e i_x é a corrente diferencial, reescreve-se a força f_1 por

$$f_1 = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 \cos \theta}{4} \left(\frac{i_0 + i_x}{h - x \cos \theta} \right)^2. \quad (3.5)$$

Repetindo este procedimento para as bobinas opostas, e assumindo que $i_3 = i_0 - i_x$,

$$f_3 = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 \cos \theta}{4} \left(\frac{i_0 - i_x}{h + x \cos \theta} \right)^2, \quad (3.6)$$

e a força horizontal $f_x = f_1 - f_3$ é reescrita como

$$f_x = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 \cos \theta}{4} \left[\left(\frac{i_0 + i_x}{h - x \cos \theta} \right)^2 - \left(\frac{i_0 - i_x}{h + x \cos \theta} \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Com esse mesmo procedimento de cálculo é possível obter a força vertical resultante f_y , assumindo i_y como corrente diferencial e um deslocamento de y :

$$f_y = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 \cos \theta}{4} \left[\left(\frac{i_0 + i_y}{h - y \cos \theta} \right)^2 - \left(\frac{i_0 - i_y}{h + y \cos \theta} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

As expressões das forças linearizadas em torno da origem $P_0 = (0, 0)$ são

$$f_x = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial f_x}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial f_x}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial f_x}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y$$

e

$$f_y = \left. \frac{\partial f_y}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial f_y}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial f_y}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial f_y}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y.$$

Após realizar as derivadas parciais, as forças de relutância tem o seguinte formato:

$$f_x = g_p x + g_i i_x, \quad f_y = g_p y + g_i i_y, \quad (3.9)$$

em que

$$g_p = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 i_0^2 \cos \theta}{h^3} \quad \text{e} \quad g_i = \frac{\mu_0 A_8 n_8^2 i_0}{h^2}. \quad (3.10)$$

3.3 Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 4 Polos

A referência pra esta seção foi o artigo [9].

No mancal magnético de 4 polos, o procedimento para encontrar as forças de relutância é mais complexo que no mancal de 8 polos, porque há interconexão entre os fluxos. A Figura 3.3 ilustra o caminho percorrido pelo fluxo oriundo apenas pela corrente i_1 , mas cada corrente dará a sua contribuição. O fluxo resultante será uma combinação dessas contribuições dos fluxos de cada polo.

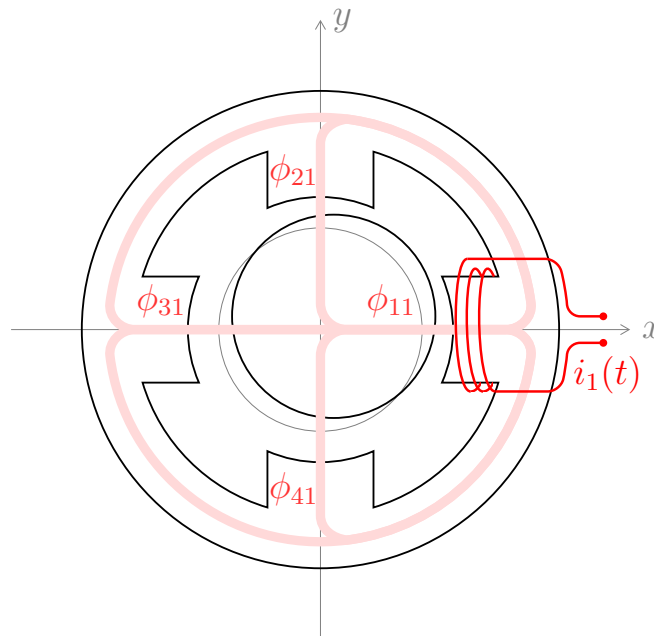


Figura 3.3: Caminho do fluxo magnético pela contribuição da bobina 1. Fonte:[9], imagem cedida pelo autor.

Na Figura 3.3, a notação ϕ_{jk} representa o fluxo magnético que atravessa o entreferro do "j" oriundo da corrente circulante na bobina "k". Nomeando A_4 como a área da seção transversal do polo, n_4 o número de voltas da bobina e h o entreferro, caso o rotor faça um deslocamento x na horizontal e y na vertical, as relutâncias de cada polo serão dadas por

$$\mathcal{R}_1 = \frac{h-x}{\mu_0 A_4}, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{h-y}{\mu_0 A_4}, \quad \mathcal{R}_3 = \frac{h+x}{\mu_0 A_4} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_4 = \frac{h+y}{\mu_0 A_4}. \quad (3.11)$$

O circuito magnético associado à bobina 1 é mostrado na Figura 3.4.

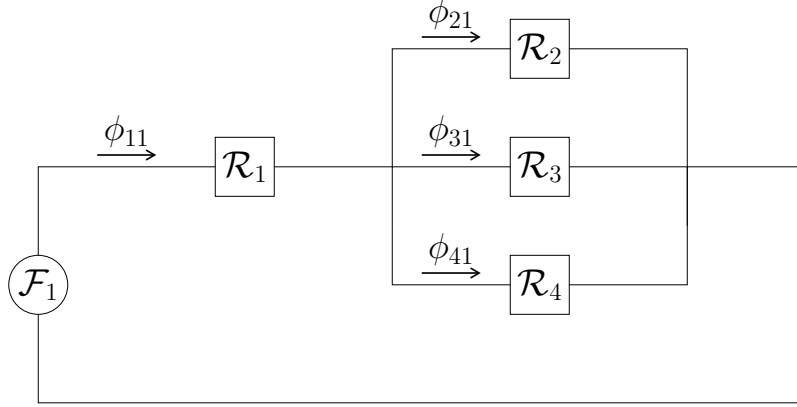


Figura 3.4: Circuito Magnético referente à bobina 1 no Mancal Magnético de 4 polos.

O procedimento para obter as forças de relutância no mancal magnético de 4 polos é primeiramente equacionar o circuito magnético a fim de encontrar a relutância equivalente, para em seguida obter as expressões dos fluxos parciais de cada corrente. Assim é possível equacionar o fluxo total em cada polo. Com a expressão do fluxo total, basta utilizar a equação (2.13) para encontrar a força resultante em cada direção.

A relutância equivalente do circuito magnético da Figura 3.4 é igual a

$$\mathcal{R}_1^e = \mathcal{R}_1 + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \frac{1}{\mathcal{R}_4}. \quad (3.12)$$

Realizando as operações algébricas, obtém-se

$$\mathcal{R}_1^e = \frac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_4}. \quad (3.13)$$

Para simplificar as expressões, define-se as seguintes variáveis:

$$N_4 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4, \quad (3.14)$$

$$D_1 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_4, \quad D_2 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_3\mathcal{R}_4, \quad (3.15)$$

$$D_3 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_4, \quad D_4 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3. \quad (3.16)$$

No circuito magnético com a relutância equivalente, $\phi = \mathcal{F}/\mathcal{R}_1^e$. Adotando a mesma notação para a corrente de base do polo 1, isto é, $i_1 = i_0 + i_x$, os fluxos parciais são:

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= n_4(i_0 + i_x) \frac{D_1}{N_4}, & \phi_{21} &= n_4(i_0 + i_x) \frac{\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4}{N_4}, \\ \phi_{31} &= n_4(i_0 + i_x) \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_4}{N_4}, & \phi_{41} &= n_4(i_0 + i_x) \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{N_4}.\end{aligned}$$

Com os polos 1 e 3 repelindo o fluxo magnético e os polos 2 e 4 atraindo fluxo magnético, se o sentido positivo adotado for apontando para o centro do rotor, os fluxos totais em cada polo são:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} - \phi_{13} + \phi_{14}, \quad \phi_2 = -\phi_{21} - \phi_{22} - \phi_{23} + \phi_{24} \quad (3.17)$$

$$\phi_3 = -\phi_{31} + \phi_{32} + \phi_{33} + \phi_{34}, \quad \phi_4 = -\phi_{41} + \phi_{42} - \phi_{43} - \phi_{44}. \quad (3.18)$$

O procedimento para encontrar os fluxos parciais referentes às outras correntes será omitido, mas é o mesmo mostrado acima para a corrente i_1 . O uso das correntes de base e diferenciais é o mesmo para o mancal de 8 polos, com $i_2 = i_0 + i_y$, $i_3 = i_0 - i_x$ e $i_4 = i_0 - i_y$.

Os fluxos parciais são dados por:

$$\begin{aligned}\phi_{12} &= n_4(i_0 + i_y) \frac{\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4}{N_4}, & \phi_{22} &= n_4(i_0 + i_y) \frac{D_2}{N_4}, & \phi_{32} &= n_4(i_0 + i_y) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_4}{N_4}, \\ \phi_{42} &= n_4(i_0 + i_y) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3}{N_4}, & \phi_{13} &= n_4(i_0 - i_x) \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_4}{N_4}, & \phi_{23} &= n_4(i_0 - i_x) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_4}{N_4}, \\ \phi_{33} &= n_4(i_0 - i_x) \frac{D_3}{N_4}, & \phi_{43} &= n_4(i_0 - i_x) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{N_4}, & \phi_{14} &= n_4(i_0 - i_y) \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{N_4}, \\ \phi_{24} &= n_4(i_0 - i_y) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3}{N_4}, & \phi_{34} &= n_4(i_0 - i_y) \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{N_4}, & \phi_{44} &= n_4(i_0 - i_y) \frac{D_4}{N_4}.\end{aligned}$$

Os fluxos totais são obtidos ao substituir esses fluxos parciais em (3.17) e (3.18). A força magnética individual em cada polo é a mesma vista em (2.13), e a resultante na direção horizontal, assim como foi feito no mancal de 8 polos, é dada pela diferença entre as forças totais dos polos 1 e 3: $f_x = f_1 - f_3$. A resultante vertical

será $f_y = f_2 - f_4$. Portanto,

$$f_x = \frac{\phi_1^2 - \phi_3^2}{2\mu_0 A_4}, \quad f_y = \frac{\phi_2^2 - \phi_4^2}{2\mu_0 A_4}.$$

Ao realizar a substituição, o formato da expressão das forças será:

$$f_x = \frac{\mu_0 A_4 n_4^2}{2} q_x(h, y, i_0, i_x, i_y) \quad \text{e} \quad f_y = \frac{\mu_0 A_4 n_4^2}{2} q_y(h, y, i_0, i_x, i_y), \quad (3.19)$$

em que q_x e q_y são funções multivariáveis, com argumentos

$$q_x(h, y, i_0, i_x, i_y) = \frac{N_1^2 - N_2^2}{\Delta^2} \quad \text{e} \quad q_y(h, y, i_0, i_x, i_y) = \frac{N_3^2 - N_4^2}{\Delta^2},$$

com

$$N_1 = (i_1 + i_2)\Delta_1 + (i_1 - i_3)\Delta_2 + (i_1 + i_4)\Delta_3,$$

$$N_2 = (i_3 - i_1)\Delta_2 + (i_2 + i_3)\Delta_4 + (i_3 + i_4)\Delta_5$$

$$N_3 = (i_1 + i_2)\Delta_1 + (i_2 + i_3)\Delta_4 + (i_2 - i_4)\Delta_6,$$

$$N_4 = (i_1 + i_4)\Delta_3 + (i_3 + i_4)\Delta_5 - (i_2 - i_4)\Delta_6.$$

As variáveis Δ e $\Delta_{1,2,3,4,5,6}$ são:

$$\Delta_1 = (h + x)(h + y), \quad \Delta_2 = (h + y)(h - y), \quad \Delta_3 = (h + x)(h - y),$$

$$\Delta_4 = (h - x)(h + y), \quad \Delta_5 = (h - x)(h - y), \quad \Delta_6 = (h + x)(h - x),$$

$$\begin{aligned} \Delta = & (h - x)(h - y)(h + x) + (h - x)(h - y)(h + y) + \\ & (h - x)(h + x)(h + y) + (h - y)(h + x)(h + y). \end{aligned}$$

Realizando a linearização em torno da origem, as expressões resultantes são

$$f_x = 2(g_p x + g_i i_x) \quad \text{e} \quad f_y = 2(g_p y + g_i i_y), \quad (3.20)$$

em que

$$g_p = \frac{\mu_0 A_4 n_4^2 i_0^2 \cos \theta}{h^3} \quad \text{e} \quad g_i = \frac{\mu_0 A_4 n_4^2 i_0}{h^2}. \quad (3.21)$$

3.4 Conclusão do Capítulo

Esse capítulo detalhou o procedimento para obtenção das forças de relutância linearizadas nos mancais de 8 e 4 polos. No mancal de 8 polos os fluxos são independentes, mas no mancal de 4 polos há interconexão dos fluxos. Apesar dessa interconexão, a linearização permite simplificar o formato das expressões das forças. A comparação entre os valores de f_x e f_y mostrados em (3.9) e (3.20) permite concluir que as forças de relutância linearizadas para o mancal de 4 polos apresentam o dobro das respectivas forças para o mancal de 8 polos.

Capítulo 4

Modelagem do Mancal Magnético de 3 Polos

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o cálculo das forças de relutância e a modelagem do sistema dinâmico em espaço de estados para o mancal magnético de 3 polos. Para esta seção as referências utilizadas foram [3, 6, 9]. A Figura 4.1 exibe o fluxo magnético gerado por apenas uma bobina, bem como as áreas das seções transversais. Cada polo está separado de outro por um ângulo de 120° .

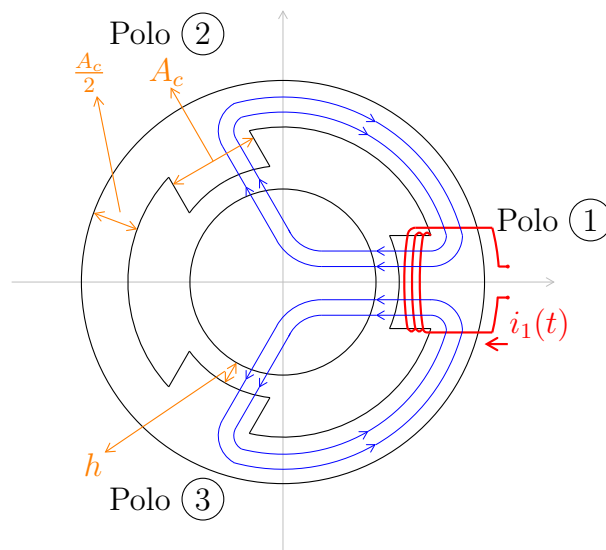


Figura 4.1: Fluxo Magnético referente à bobina 1 em um mancal magnético de 3 Polos.

4.2 Modelagem das Forças de Relutância para o Mancal Magnético de 3 Polos

Para obter a expressão do fluxo total em cada polo, será analisado o comportamento do fluxo magnético que cada bobina gera individualmente, com o auxílio das equações de circuitos magnéticos. Utilizando a notação ϕ_{jk} para o fluxo magnético que atravessa o entreferro do "j"ésimo polo oriundo da corrente circulante na bobina "k", e com auxílio da regra da mão direita para encontrar a direção do fluxo, para a primeira bobina o caminho percorrido pelo fluxo é exibido na Figura 4.2a.

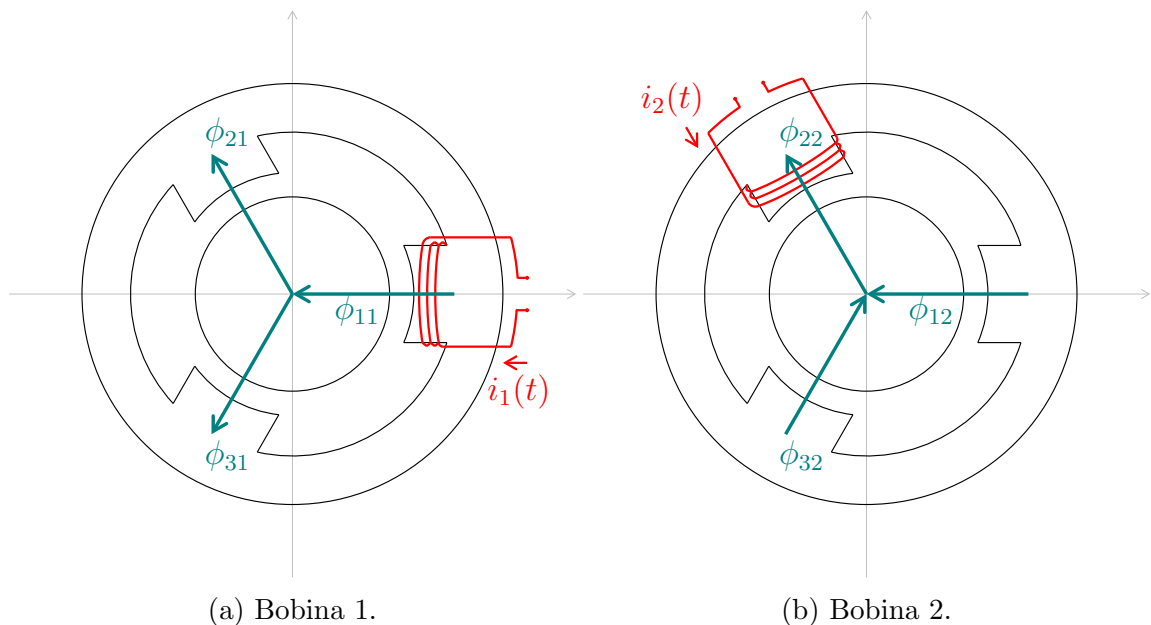


Figura 4.2: Caminho do Fluxo magnético: Bobinas 1 e 2.

Para a bobina 2, é considerado que a corrente i_2 causa atração do fluxo. Essa informação é importante salientar, porque será útil quando for apresentada a configuração dos enrolamentos que minimiza as perdas no cobre. Dessa maneira, o campo gerado pela bobina 2 pode ser representado pela Figura 4.2b. Já para a bobina 3, cuja corrente causa o mesmo efeito da bobina 2, o fluxo gerado tem o comportamento exibido na Figura 4.3a. Para obter o fluxo total em cada pólo, considera-se que o sentido positivo dos fluxos magnéticos é apontando para o centro do rotor, conforme Figura 4.3b.

Dessa maneira, temos as seguintes expressões para o fluxo total em cada entre-

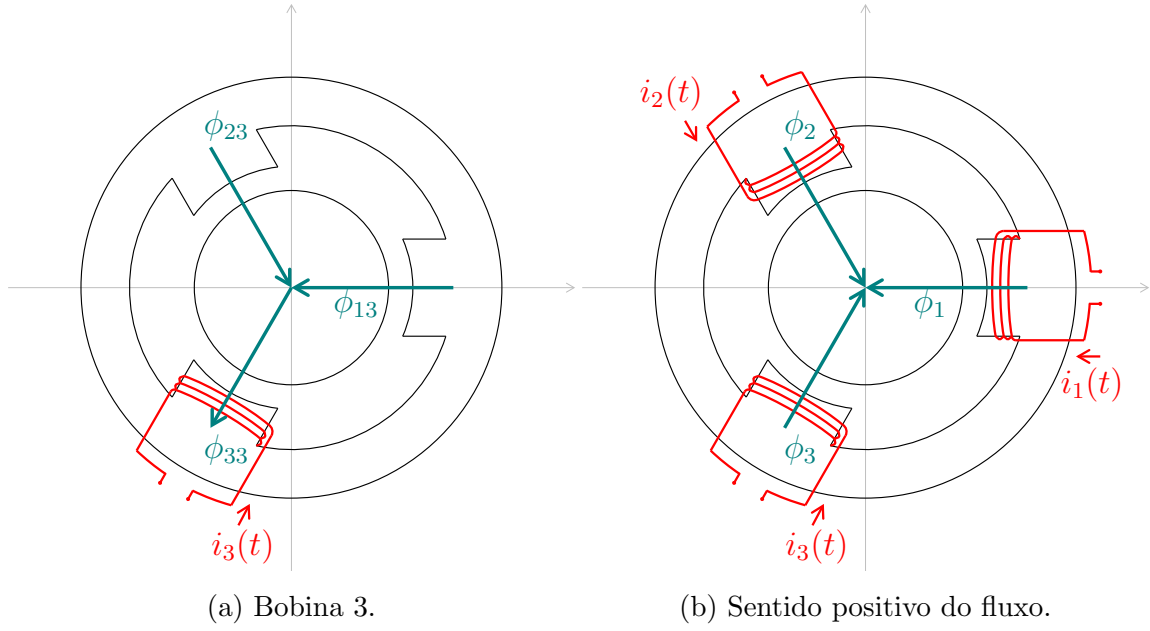


Figura 4.3: Caminho do fluxo magnético da bobina 3 e sentido positivo.

ferro:

$$\phi_1 = +\phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{13}, \quad (4.1)$$

$$\phi_2 = -\phi_{21} - \phi_{22} + \phi_{23}, \quad (4.2)$$

$$\phi_3 = -\phi_{31} + \phi_{32} - \phi_{33}. \quad (4.3)$$

O fluxo total em cada polo é a combinação linear dos fluxos oriundos de cada uma das bobinas. Considerando que cada bobina é constituída de n_c espiras e é percorrida por uma corrente elétrica i_j , onde o subíndice j corresponde ao "j"ésimo polo, a Força Magneto-Motriz \mathcal{F}_j gerada é

$$\mathcal{F}_j = n_c i_j, j = 1, 2, 3.$$

Definindo também \mathcal{R}_i como a relutância do entreferro,

$$\mathcal{R}_i = \frac{h}{\mu_0 A_c}, i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

O circuito magnético correspondente para a bobina 1 é representado na Figura

4.4.

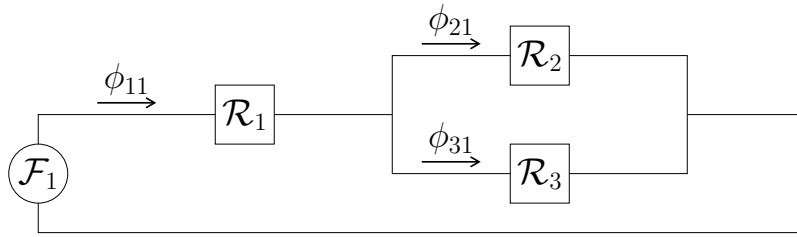


Figura 4.4: Circuito Magnético referente à bobina 1.

Omitindo o desenvolvimento matemático e definindo o termo N como

$$N = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3,$$

as expressões obtidas para o circuito magnético 1 são:

$$\mathcal{F}_1 = n_c i_1, \quad (4.5)$$

$$\phi_{11} = n_c i_1 \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{N}, \quad (4.6)$$

$$\phi_{21} = n_c i_1 \frac{\mathcal{R}_3}{N}, \quad (4.7)$$

$$\phi_{31} = n_c i_1 \frac{\mathcal{R}_2}{N}. \quad (4.8)$$

Para a bobina 2, o circuito magnético é exibido na Figura 4.5.

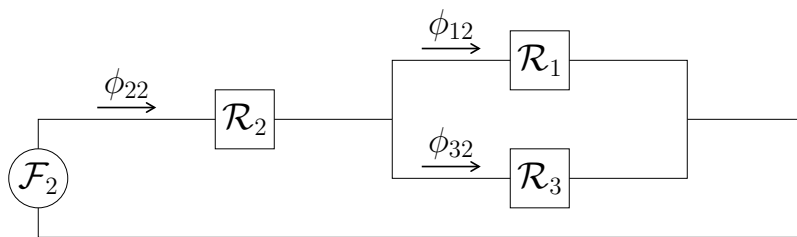


Figura 4.5: Circuito Magnético referente à bobina 2.

As expressões obtidas para o circuito magnético 2 são

$$\mathcal{F}_2 = n_c i_2, \quad (4.9)$$

$$\phi_{12} = n_c i_2 \frac{\mathcal{R}_3}{N}, \quad (4.10)$$

$$\phi_{22} = n_c i_2 \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{N}, \quad (4.11)$$

$$\phi_{32} = n_c i_2 \frac{\mathcal{R}_1}{N}. \quad (4.12)$$

Para a bobina 3, o circuito magnético é exibido na Figura 4.6.

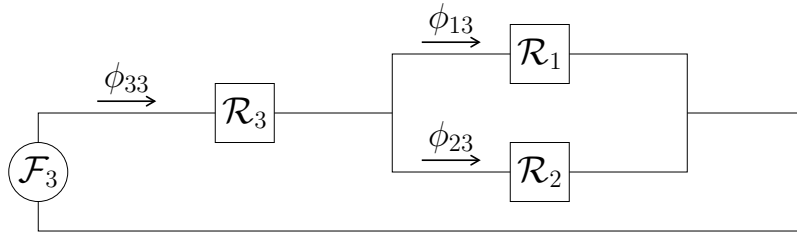


Figura 4.6: Circuito Magnético referente à bobina 3.

As expressões obtidas para o circuito magnético 3 são

$$\mathcal{F}_3 = n_c i_3, \quad (4.13)$$

$$\phi_{13} = n_c i_3 \frac{\mathcal{R}_2}{N}, \quad (4.14)$$

$$\phi_{23} = n_c i_3 \frac{\mathcal{R}_1}{N}, \quad (4.15)$$

$$\phi_{33} = n_c i_3 \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}{N}. \quad (4.16)$$

Para obtermos a expressão algébrica do fluxo total do polo 1, basta substituir (4.6), (4.10) e (4.14) em (4.1). Temos o resultado para ϕ_1 :

$$\phi_1 = \frac{n_c}{N} [(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3)i_1 + \mathcal{R}_3 i_2 + \mathcal{R}_2 i_3]. \quad (4.17)$$

Para o fluxo total do polo 2, basta substituir (4.7), (4.11) e (4.15) em (4.2):

$$\phi_2 = \frac{n_c}{N} [-\mathcal{R}_3 i_1 - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3)i_2 + \mathcal{R}_1 i_3]. \quad (4.18)$$

Para o fluxo total do polo 3, basta substituir (4.8),(4.12) e (4.16) em (4.3):

$$\phi_3 = \frac{n_c}{N}[-\mathcal{R}_2 i_1 + \mathcal{R}_1 i_2 - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) i_3]. \quad (4.19)$$

Como já era de se esperar, ao somar (4.17), (4.18) e (4.19) verificamos matematicamente que ocorre conservação do fluxo magnético, uma vez que

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0.$$

Naturalmente, tem-se que

$$\phi_1 = -\phi_2 - \phi_3. \quad (4.20)$$

Portanto, o fluxo magnético resultante das três bobinas percorre o caminho indicado pela Figura 4.7a. Pode-se também constatar esse direcionamento do fluxo magnético aplicando a regra da mão direita em cada uma das bobinas. Com as correntes nos sentidos já indicados, o comportamento das linhas de fluxo é conforme o mostrado na Figura 4.7b.

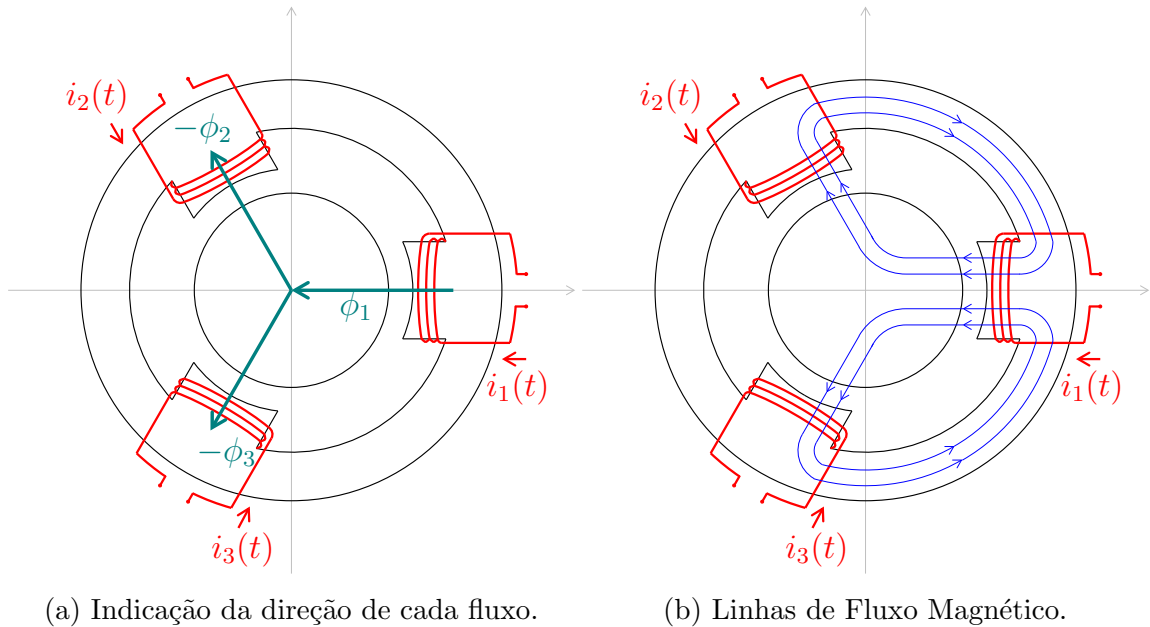


Figura 4.7: Caminho percorrido pelo fluxo.

As forças de relutância serão sempre atrativas, conforme indica a Figura 4.8a, e também terão módulo proporcional ao quadrado do fluxo magnético, conforme

mostrado na equação (2.13). Como existem 3 fluxos separados por 120° circulando, serão 3 forças agindo sobre o rotor.

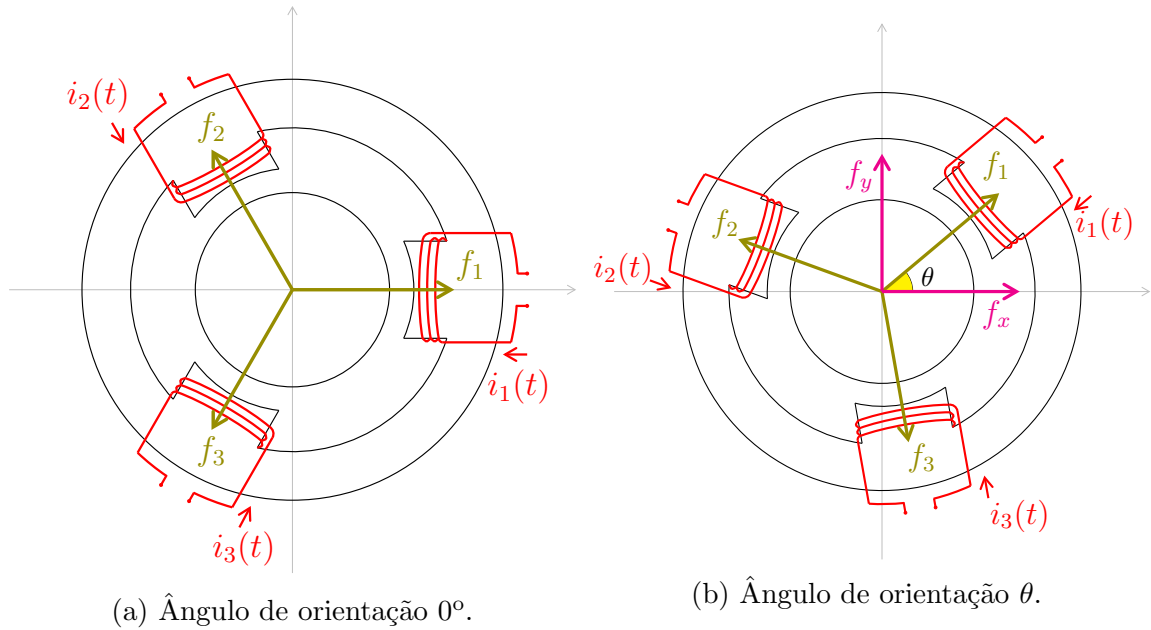


Figura 4.8: Forças de Relutância.

4.3 Forças de relutância resultantes para o Man- cal Magnético com configuração ótima

Nesta seção serão obtidas as forças de relutância para o mancal magnético de 3 polos, e elas dependerão do ângulo de orientação do estator e das correntes de base. Portanto, além da análise do circuito magnético é preciso também encontrar o ângulo de orientação que proporcione a maneira mais eficiente de sustentar o peso do eixo.

Para se analisar a componente horizontal e vertical da força de relutância resultante, é importante considerar que o mancal magnético tem ângulo de orientação θ em relação ao eixo x, $0 \leq \theta < 2\pi/3$. A figura 4.8b ilustra essa situação. O cálculo dessas forças utiliza o mesmo procedimento realizado em [9].

A componente horizontal da força resultante f_x é a soma das componentes hori-

zontais das três forças:

$$f_x = f_1 \cos(\theta) + f_2 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + f_3 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f_x = \frac{1}{2\mu_0 A_c} \left[\phi_1^2 \cos(\theta) + \phi_2^2 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \phi_3^2 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \quad (4.21)$$

De maneira análoga, a componente vertical da força resultante é dada por

$$f_y = f_1 \sin(\theta) + f_2 \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + f_3 \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f_y = \frac{1}{2\mu_0 A_c} \left[\phi_1^2 \sin(\theta) + \phi_2^2 \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \phi_3^2 \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \quad (4.22)$$

Para uma movimentação do rotor de x na horizontal e y na vertical, as respectivas relutâncias apresentadas em (4.4) sofrem alteração, uma vez que o comprimento do entreferro muda. Originalmente, o entreferro possuía comprimento h mas agora passa a ter comprimento h' , conforme Figura 4.9.

O movimento do rotor nas direções x e y pode ser projetado nas direções radial e tangencial com referência ao polo. O entreferro após a movimentação passa a ser: $h' = h - r \cos(\theta - \alpha)$. Portanto,

$$h' = h - r (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$$

$$h' = h - (r \cos \alpha) \cos \theta - (r \sin \alpha) \sin \theta$$

$$h' = h - x \cos \theta - y \sin \theta.$$

A nova relutância do Polo 1 passa a ser

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\mu_0 A_c} [h - x \cos \theta - y \sin \theta]. \quad (4.23)$$

Com procedimento análogo ao Polo 1, mas rotacionado em $\frac{\pi}{3}$, para o Polo 2 a relutância é

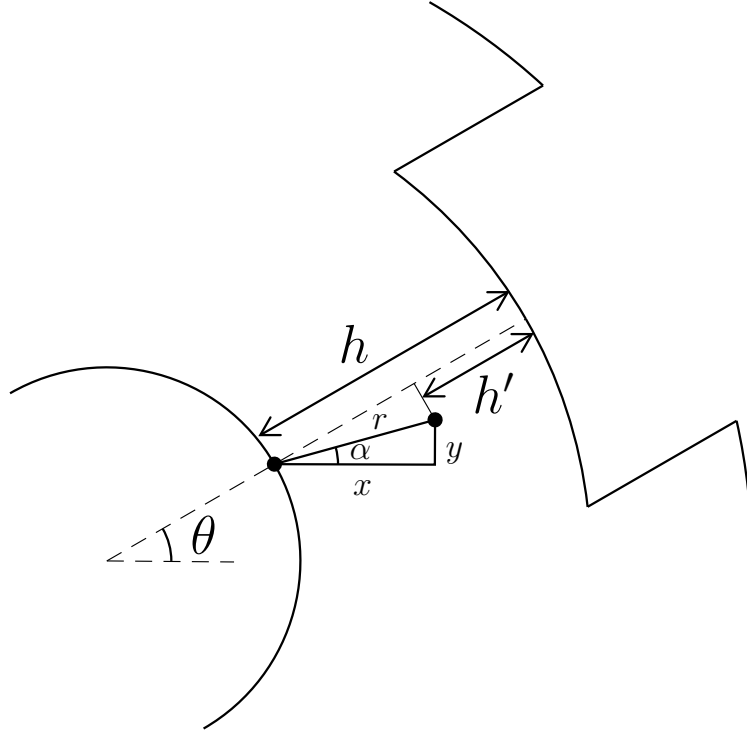


Figura 4.9: Diagrama ilustrando o entreferro do Polo 1 após sair da posição central.

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{\mu_0 A_c} \left[h + x \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) - y \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right]. \quad (4.24)$$

A relutância para o Polo 3 passa a ser

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{\mu_0 A_c} \left[h - x \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) + y \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \right]. \quad (4.25)$$

A forças magnéticas e as relutâncias vão depender do ângulo de orientação θ , e algumas perguntas ficam em aberto: Qual seria o melhor ângulo de orientação? No caso particular em estudo, com o mancal magnético e o rotor dispostos na horizontal, qual seria a influência da orientação no conjunto? As correntes (e consequentemente as perdas) sofreriam alteração? Para responder a essas perguntas, inicialmente é preciso separar a corrente das bobinas em duas parcelas: a corrente de base e a corrente diferencial, e verificar a influência do ângulo de orientação em cada uma delas.

A corrente da "j"ésima bobina(i_j) pode ser separada em uma parcela correspon-

dente à corrente de base (i_{Bj}) e outra parcela referente à corrente diferencial (i_{dj}). Esta última tem grande importância durante o transitório, quando o rotor ainda não está centralizado e precisa que o controle de corrente (ou tensão) atue gerando as forças de relutância necessárias para centralizar o eixo. Já a primeira gera a maior parcela do fluxo magnético cuja força mantém o rotor em equilíbrio durante o estado estacionário, e é a principal responsável pela perda Joule no cobre. A corrente da bobina é dada pela equação (4.26):

$$i_j = i_{Bj} + i_{dj}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.26)$$

A perda Joule, ou perda ôhmica no cobre, é expressa pela variável P_d :

$$P_d = R_{cu}(i_{B1}^2 + i_{B2}^2 + i_{B3}^2).$$

Em [3] é feita uma abordagem de otimização para obter as correntes de base que minimizam P_d , tendo como restrições as correntes de base que resultam em força resultante nula ($f_x = 0$ e $f_y = mg$, em que m é a massa do rotor). As correntes de base ótimas encontradas nessa referência foram:

$$i_{B1} = 2(1 + \sin \theta)i_0^*, \quad i_{B2} = [1 + 2 \sin(\theta + \pi/3)]i_0^* \quad \text{e} \quad i_{B3} = [1 + 2 \sin(\theta - \pi/3)]i_0^*,$$

com i_0^* dado por:

$$i_0^* = \frac{2\sqrt{1 - \sin(\theta - \pi/3)}}{\sqrt{3}[1 + 2 \sin(\theta + \pi/3)]}i_0, \quad i_0 = h\sqrt{\frac{\mu_0 A_c n_c^2}{mg}}.$$

As possibilidades de correntes de base que minimizam a perda no cobre vão depender do ângulo de orientação θ . Se houver uma escolha de ângulo que reduza o número de amplificadores, será vantajoso. Ora, como as correntes i_1 e i_2 geram fluxos em direções opostas, é possível utilizar a mesma corrente elétrica para energizar as duas bobinas. A maneira mais prática é utilizar o mesmo enrolamento para os dois polos, dessa forma será necessário apenas um circuito atuador para esse conjunto.

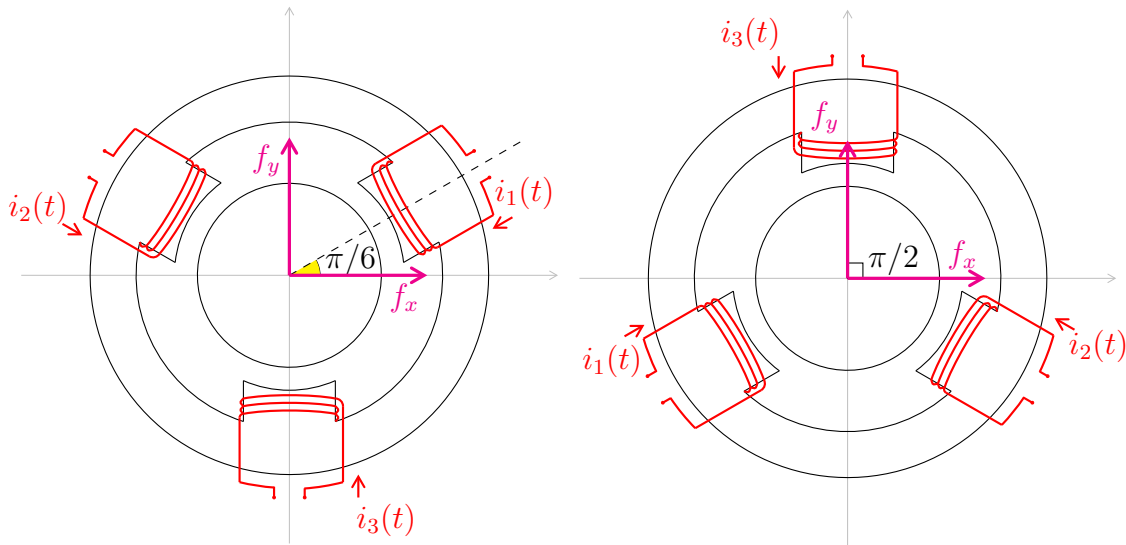
Equacionando o problema para encontrar θ , as correntes de base do polo 1 e do polo 2 são iguais:

$$\begin{aligned}
 i_{B1} &= i_{B2} \\
 2 [1 + \sin(\theta)] i_0^* &= [1 + 2 \sin(\theta + \pi/3)] i_0^* \\
 &\vdots \\
 \cos^2(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \Rightarrow \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Que tem como solução

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Com $\theta = \pi/6$, o mancal magnético possuirá a orientação da Figura 4.10a. $\theta = \pi/2$ fornecerá a imagem invertida com relação ao eixo horizontal, conforme Figura 4.10b.



(a) Ângulo de orientação $\theta = \pi/6$.

(b) Ângulo de orientação $\theta = \pi/2$.

Figura 4.10: Possíveis orientações do Mancal Magnético de 3 Polos.

A orientação com $\theta = \pi/2$, segundo [3], apresenta problemas de estabilidade durante o transitório, tornando essa opção inviável.

Escolhendo $\theta = \pi/6$ e substituindo nas equações das correntes de base, obtêm-se:

$$i_{B1} = i_{B2} = \sqrt{2}i_0, \quad (4.27)$$

$$i_{B3} = 0, \quad (4.28)$$

$$i_0 = h\sqrt{\frac{mg}{\mu_0 A_c n_c^2}}. \quad (4.29)$$

Portanto, as correntes em cada bobina são:

$$i_1 = i_2 = i_{B1} + i_{d1},$$

$$i_3 = i_{d3}.$$

É importante notar que consideramos inicialmente que a corrente da bobina 2 causaria uma atração no fluxo magnético, ao contrário da bobina 1. Caso não houvesse essa consideração inicial, existiria um sinal negativo em (4.27) e anteriores. Outro ponto é que a corrente de base ótima do polo 3 é zero, isto é, apenas com os polos 1 e 2 mantém-se o equilíbrio do rotor. Durante o transitório, pode ser necessário acionar a corrente diferencial i_{d3} para fins de estabilização. No equilíbrio em estado estacionário, a figura 4.11a exibe o caminho do fluxo, e a figura 4.11b mostra o diagrama de forças.

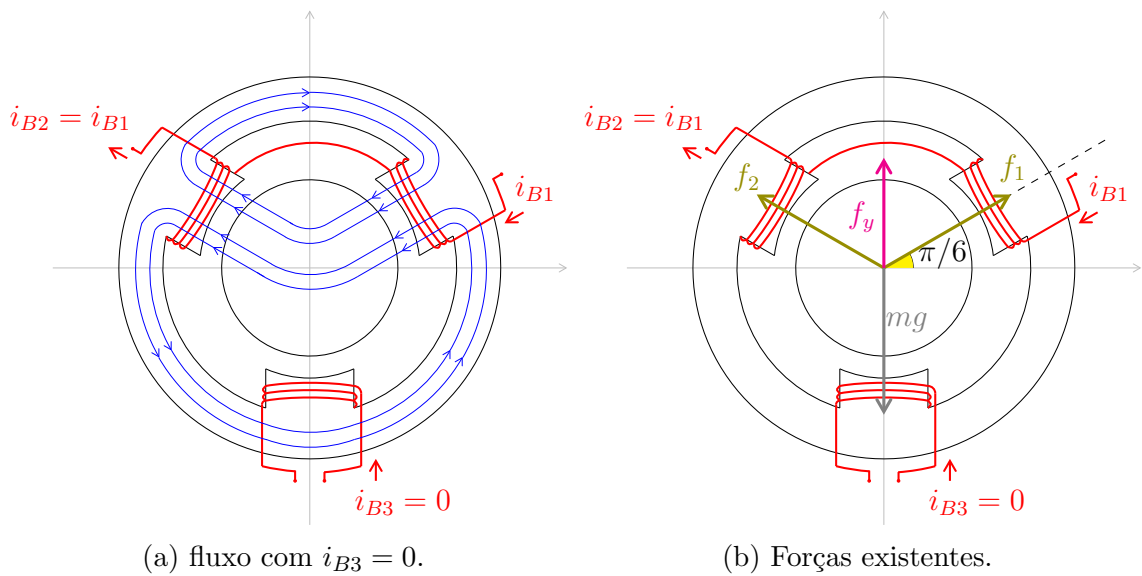


Figura 4.11: Fluxo magnético e forças para ângulo ótimo em estado estacionário.

Retornando à análise das forças, utilizando $\theta = \pi/6$ nas equações (4.21), (4.22), (4.23), (4.3) e (4.25) as forças para posicionamento do rotor são

$$f_x = \frac{1}{2\mu_0 A_c} \left[\phi_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \phi_2^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \phi_3^2 \cdot 0 \right] = \frac{\sqrt{3}}{4\mu_0 A_c} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \quad \text{e} \quad (4.30)$$

$$f_y = \frac{1}{2\mu_0 A_c} \left[\phi_1^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \phi_2^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \phi_3^2 \cdot (-1) \right] = \frac{1}{4\mu_0 A_c} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_3^2). \quad (4.31)$$

As relutâncias após o deslocamento do rotor passam a ser:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\mu_0 A_c} \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right), \quad (4.32)$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{\mu_0 A_c} \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{h+y}{\mu_0 A_c}. \quad (4.34)$$

Para encontrarmos a expressão completa de f_x e f_y , basta substituir as equações (4.32), (4.33) e (4.34) em (4.17), (4.18) e (4.19), e por sua vez utilizar as expressões de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 nas equações (4.30) e (4.31). Procedendo assim, obtém-se a seguinte expressão para a força horizontal:

$$f_x = \frac{4}{3}\mu_0 A_c n_c^2 q_x(h, x, y, i_{B1}, i_{d1}, i_{d3}), \quad \text{com} \quad q_x(h, x, y, i_{B1}, i_{d1}, i_{d3}) = \frac{N_1}{\Delta^2}. \quad (4.35)$$

Para a força vertical, a expressão obtida é

$$f_y = \frac{2}{3}\mu_0 A_c n_c^2 q_y(h, x, y, i_{B1}, i_{d1}, i_{d3}), \quad \text{com} \quad q_y(h, x, y, i_{B1}, i_{d1}, i_{d3}) = \frac{N_2}{\Delta^2}. \quad (4.36)$$

em que o valor de $\Delta = (x^2 + y^2 - 4h^2)$, N_1 é dado por

$$\begin{aligned} N_1 = & 6i_{B1}^2 h x + 3i_{B1}^2 x y + 4\sqrt{3}i_{B1} h^2 i_{d3} + 12i_{B1} h i_{d1} x + 6i_{B1} i_{d1} x y + \sqrt{3}i_{B1} i_{d3} x^2 \\ & - \sqrt{3}i_{B1} i_{d3} y^2 + 4\sqrt{3}h^2 i_{d1} i_{d3} + 6h i_{d1}^2 x + 2h i_{d3}^2 x + 3i_{d1}^2 x y + \sqrt{3}i_{d1} i_{d3} x^2 \\ & - \sqrt{3}i_{d1} i_{d3} y^2 - i_{d3}^2 x y \end{aligned} \quad ,$$

e N_2 é

$$\begin{aligned} N_2 = & 12i_{B1}^2 h^2 + 12i_{B1}^2 h y - 3i_{B1}^2 x^2 + 3i_{B1}^2 y^2 + 24i_{B1} h^2 i_{d1} + 24i_{B1} h i_{d1} y \\ & - 6i_{B1} i_{d1} x^2 + 6i_{B1} i_{d1} y^2 + 4\sqrt{3} i_{B1} i_{d3} x y + 12h^2 i_{d1}^2 - 4h^2 i_{d3}^2 + 12h i_{d1}^2 y \\ & + 4h i_{d3}^2 y - 3i_{d1}^2 x^2 + 3i_{d1}^2 y^2 + 4\sqrt{3} i_{d1} i_{d3} x y + i_{d3}^2 x^2 - i_{d3}^2 y^2. \end{aligned}$$

As forças de relutância em (4.35) e (4.36) são funções multivariáveis com comportamento não linear de análise bastante complexa. Porém, como a região de interesse de estudo é a região próxima ao ponto de operação $P_0 = (x, y, i_{d1}, i_{d3})_0 = (0, 0, 0, 0)$, podemos proceder com a linearização das forças por expansão em série de Taylor e avaliar a expressão no ponto de operação em questão.

A expressão de f_x linearizada em torno do equilíbrio P_0 é:

$$f_x = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial f_x}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial f_x}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial f_x}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y.$$

Igualmente, f_y linearizada em torno de P_0 é

$$f_y = \left. \frac{\partial f_y}{\partial x} \right|_{P_0} x + \left. \frac{\partial f_y}{\partial y} \right|_{P_0} y + \left. \frac{\partial f_y}{\partial i_x} \right|_{P_0} i_x + \left. \frac{\partial f_y}{\partial i_y} \right|_{P_0} i_y.$$

Com auxílio de ferramenta computacional para o cálculo simbólico, obtém-se

$$f_x = \frac{1}{2} g_p x + \frac{\sqrt{3}}{3} g_i i_{d3}, \quad \text{e} \quad f_y = \frac{1}{2} g_p y + g_i i_{d1}, \quad (4.37)$$

em que

$$g_p = \frac{\mu_0 A_c n_c^2 (i_{B1})^2}{h^3} \quad \text{e} \quad g_i = \frac{\mu_0 A_c n_c^2 (i_{B1})}{h^2}. \quad (4.38)$$

Pelas expressões (3.9), (3.20) e (4.37) verifica-se que não existe uma comparação direta entre o mancal magnético de 3 polos e as configurações de 8 e de 4 polos. Os fatores que multiplicam g_i são diferentes, e as correntes diferenciais não representam deslocamento exclusivamente em um eixo. Como g_p e g_i são constantes maiores que zero e considerando i_{d1} e i_{d3} positivas, uma análise qualitativa permite dizer que para

pequenos deslocamentos e correntes de base de mesma ordem de grandeza, as forças de restauração no mancal magnético de três polos são menores do que as forças de restauração nos mancais magnéticos de 8 e de 4 polos. Apesar disso, dependendo da aplicação, a redução de custo pode tornar a utilização vantajosa.

Outro fato curioso é que, apesar da grande complexidade do Sistema Não Linear, as equações linearizadas avaliadas no ponto de equilíbrio estão desacopladas, permitindo assim o emprego de técnicas de controle independentes em cada direção.

A abordagem feita nesta seção para o mancal magnético de 3 polos é para um caso particular de operação, com o dispositivo na horizontal. A assimetria desse arranjo dificulta o emprego na posição vertical, uma vez que o equilíbrio precisaria ser garantido apenas com as forças de relutância. Em todos os artigos que o autor teve acesso o posicionamento foi horizontal. Utilizando os resultados de Chen das correntes de base que minimizam as perdas no cobre e o ângulo de orientação que permite reduzir o uso de um amplificador operacional, foi proposto o modelo linearizado das forças de relutância. A partir desse modelo será feito o modelo dinâmico do sistema, a fim de aplicar o controle linear, que em geral é mais simples que o controle não linear. A linearização é uma ferramenta bastante empregada em controle, mas é necessário cautela. A região de análise deve ser estritamente próxima do ponto de linearização. No exemplo estudado, o ponto de linearização é o ponto de operação, e os deslocamento envolvidos costumam ser bastante pequenos, portanto a alternativa é válida.

4.4 Dinâmica Mecânica

As referências utilizadas para esta Seção foram [9], [2] e [12]. Nessas referências as equações da dinâmica rotacional aplicada a mancais magnéticos são apresentadas e desenvolvidas. Através da dinâmica rotacional é possível obter o modelo do sistema em espaço de estados, o que permitirá o emprego de técnicas de controle moderno.

Um mancal magnético operando num cenário real estará sujeito a distúrbios que contribuirão para deslocamento do eixo. No eixo cartesiano tridimensional,

considera-se que o mancal tem o eixo z como direção axial, e a gravidade atua na direção paralela ao eixo y , com sentido contrário ao sentido de crescimento desse eixo. Além disso, considera-se que o eixo é rígido e homogêneo, e possui uma extremidade apoiada por um pivô na origem do sistema de coordenadas. A Figura 4.12a mostra o arranjo.

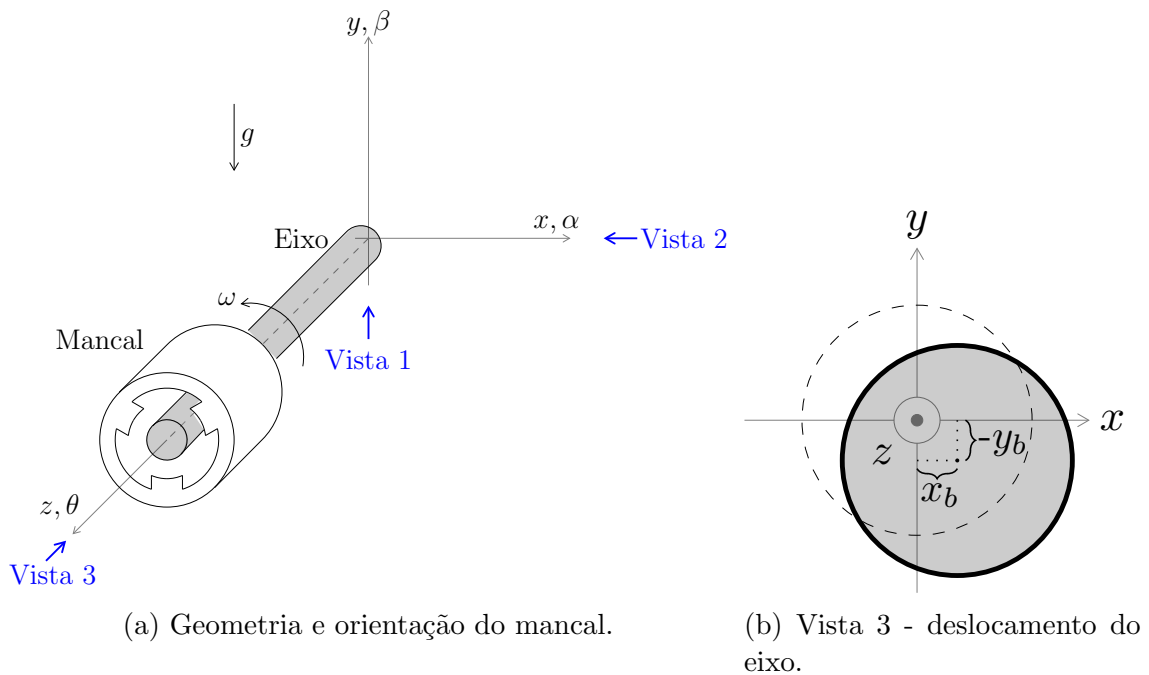


Figura 4.12: Posicionamento e Vista 3.

Na situação ideal, o centro do eixo coincide com o eixo z . Porém, numa situação real, o conjunto mancal e eixo estão submetidos à ação da gravidade e de outros fatores externos, e o centro do eixo pode deixar de coincidir com o eixo z . A Figura 4.12b exhibe a condição que o eixo está operando deslocado de x_b na horizontal e $-y_b$ na vertical, devido à ação de distúrbio externo.

Para obtermos a formulação da dinâmica rotacional do conjunto, será utilizado procedimento similar ao utilizado em [9], no Capítulo 2 (Eq. 2.13) de [12] e no Capítulo 4 de [2]. Os momentos de inércia em torno de cada eixo são J_x, J_y e J_z . Pela simetria do dispositivo, os momentos de inércia em x e y são iguais e renomeados pela variável J , portanto $J = J_x = J_y$. O rotor gira a uma velocidade constante e o movimento tridimensional pode ser decomposto em dois movimentos bidimensionais acoplados. A figura 4.13a exhibe a situação do mancal perante uma

vista do eixo y , e a dinâmica de rotação da mecânica clássica é equacionada em (4.39). Analogamente ao eixo y , a contribuição de torques externos vistos do eixo x , ilustrado na Figura 4.13b, chega-se à equação dinâmica de rotação conforme (4.40).

$$J\ddot{\beta} - \omega J_z \dot{\alpha} = E_\beta, \quad (4.39)$$

$$J\ddot{\alpha} + \omega J_z \dot{\beta} = E_\alpha. \quad (4.40)$$

Nestas equações, E_β e E_α representam todas as ações externas produzindo torque em torno do eixo y e x , respectivamente, e os ângulos β e α estão indicados nas Figuras 4.13a e 4.13b. Notar a existência do efeito giroscópico, que permite a influência de movimentos do eixo x e no eixo y .

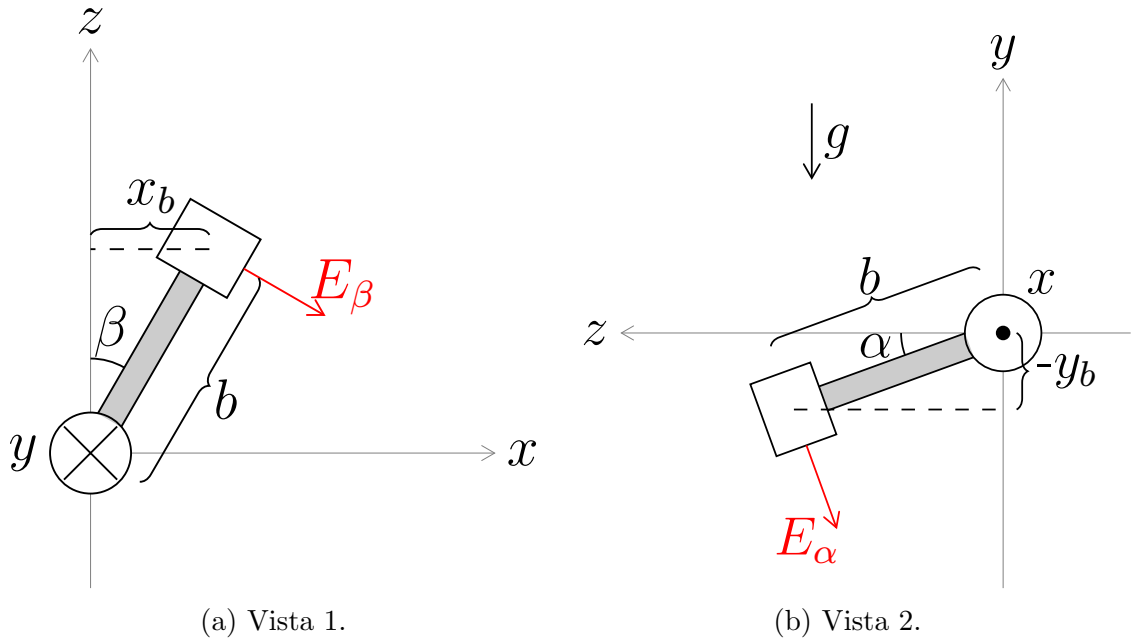


Figura 4.13: Vistas 1 e 2.

Dessa maneira, pode-se considerar que o sistema possui uma dinâmica rotacional descrita pelas equações (4.39) e (4.40). É conveniente trabalhar com essas equações no formato matricial, representada pela equação (4.41):

$$J \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ -\ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega J_z \\ -\omega J_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_\beta \\ -E_\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Para simplificar a notação, define-se

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_\beta \\ -E_\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & \omega J_z \\ -\omega J_z & 0 \end{bmatrix},$$

portanto a equação (4.41) pode ser reescrita como:

$$J\ddot{\mathbf{p}} + G\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{E}, \quad (4.42)$$

em que \mathbf{E} é o torque externo agindo no rotor, através de todas as contribuições externas: forças magnéticas (\mathbf{E}_m), força gravitacional (\mathbf{E}_g), mancal de suporte (\mathbf{E}_a) e desbalanço de massa (\mathbf{E}_d). Portanto

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_g + \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_d. \quad (4.43)$$

4.5 Torque da Força Magnética

Considerando os deslocamentos do rotor do mancal magnético em x_b e $-y_b$, as forças geradas em cada direção são:

$$f_x = \frac{1}{2}g_p x_b + \frac{\sqrt{3}}{3}g_i i_{d3} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{1}{2}g_p y_b + g_i i_{d1}. \quad (4.44)$$

Através das figuras 4.13a e 4.13b, e considerando que α e β são muito pequenos, então

$$\beta \approx \sin(\beta) = \frac{x_b}{b} \quad \text{e} \quad \alpha \approx \sin(\alpha) = \frac{-y_b}{b}. \quad (4.45)$$

E portanto, substituindo (4.45) em (4.44),

$$f_x = \frac{1}{2}g_p(\beta b) + \frac{\sqrt{3}}{3}g_i i_{d3} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{1}{2}g_p(-\alpha b) + g_i i_{d1}. \quad (4.46)$$

Considerando os torques $E_\beta = bf_x \cos(\beta) \approx bf_x$ e $E_\alpha = -bf_y \cos(\alpha) \approx -bf_y$,

$$E_\beta = \frac{1}{2}b^2g_p\beta + \frac{\sqrt{3}}{3}bg_i i_{d3} \quad \text{e} \quad -E_\alpha = -\frac{1}{2}b^2g_p\alpha + bg_i i_{d1}.$$

Reescrevendo no formato matricial, obtemos a expressão compacta para \mathbf{E}_m :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_\beta \\ -E_\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_m} = \frac{1}{2}b^2g_p \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}}_p + bg_i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i_{d3} \\ i_{d1} \end{bmatrix}}_u \quad (4.47)$$

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{2}b^2g_p\mathbf{p} + bg_i\mathbf{u}, \quad (4.48)$$

em que

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} E_\beta \\ -E_\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i_{d3} \\ i_{d1} \end{bmatrix}.$$

4.6 Torque da Força Gravitacional

O rotor está posicionado na horizontal, sob influência da gravidade, portanto a força peso exerce contribuição de torque permanentemente no conjunto.

Considerando que o centro de massa está localizado a uma distância h da origem (na situação ideal, $h = b$), a força peso exerce ação nesse ponto, em direção paralela ao eixo y , no sentido negativo. A figura 4.14 ilustra essa situação. A força peso, portanto, exerce torque \mathbf{E}_g em relação ao eixo x . Mas como no cálculo das correntes de base elas já foram projetadas para equilibrar o peso do eixo, esse torque não é contabilizado na contribuição total.

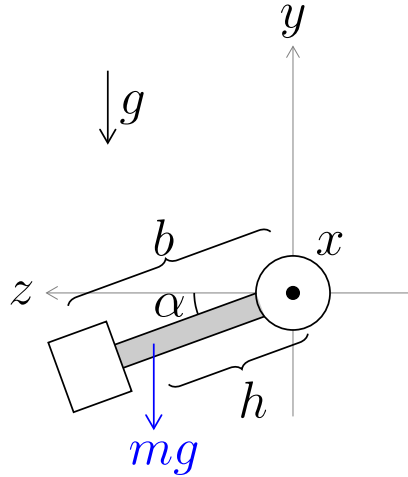


Figura 4.14: Vista 2- Contribuição do peso para o Torque

4.7 Torque do mancal de suporte

Conforme [9], o mancal axial possui efeito de amortecimento viscoso, com os torques sendo proporcionais às velocidades angulares dos deslocamentos em cada eixo.

Portanto, \mathbf{E}_a é dado por

$$\mathbf{E}_a = -C_a \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} = -C_a \dot{\mathbf{p}}. \quad (4.49)$$

4.8 Torque provocado pelo desbalanço de massa

O rotor do mancal magnético modelado neste trabalho é rígido, simétrico em relação ao eixo de rotação e, além disso, homogêneo. A homogeneidade é uma característica que indica que o rotor possui massa uniforme ao longo material. Caso exista um acréscimo ou falta de material em alguma parte dele, é dito que o rotor possui um desbalanço, ou um desequilíbrio de massa. Em [12] ele é categorizado em dois tipos: o desbalanceamento estático, em que ocorre mudança no centro de massa do conjunto e o desbalanceamento dinâmico, em que o excesso ou falta das massas não altera o centro de massa original. Para fins de simplicidade, o torque externo por desbalanço de massa (\mathbf{E}_d) não será contabilizado.

4.9 Equação dinâmica: Espaço de Estados

A soma de todas as contribuições externas de torque resulta no torque total \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_g + \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_d = \frac{1}{2}b^2g_p\mathbf{p} + bg_i\mathbf{u} - C_a\dot{\mathbf{p}}. \quad (4.50)$$

Para simplificar a notação, será utilizado a notação I_2 para a matriz identidade 2x2 e 0_2 a matriz de zeros 2x2:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Substituindo a equação (4.50) na equação (4.42), a dinâmica rotacional pode ser reescrita como

$$J\ddot{\mathbf{p}} + (G + C_a I_2)\dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{2}b^2g_p\mathbf{p} = bg_i\mathbf{u}. \quad (4.52)$$

Os sensores estão posicionados nas direções horizontal e vertical, localizados entre os polos do mancal. Devido ao número reduzido de polos, essa configuração permite uma instalação mais fácil.

Sendo x_s e y_s as posições medidas pelos sensores, α e β pequenos e assumindo que se trata de um rotor rígido e homogêneo, pela mesma relação apresentada em (4.45), $x_s = \beta d$ e $y_s = -\alpha d$, com d sendo a distância da origem até o sensor. O vetor posição \mathbf{p}_s é

$$\mathbf{p}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = d\mathbf{p}. \quad (4.53)$$

Multiplicando a equação (4.52) por d pela esquerda, $d \neq 0$, e lembrando que $dA = Ad$, quando A é matriz e d é escalar, têm-se

$$Jd\ddot{\mathbf{p}} + (G + C_a I_2)d\dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{2}b^2g_p d\mathbf{p} = dbg_i\mathbf{u}. \quad (4.54)$$

Fazendo uma substituição de variáveis conforme (4.53), chega-se a

$$J\ddot{\mathbf{p}}_s + (G + C_a I_2)\dot{\mathbf{p}}_s - \frac{1}{2}b^2 g_p \mathbf{p}_s = dbg_i \mathbf{u}. \quad (4.55)$$

Multiplicando pela esquerda pelo termo J^{-1} ,

$$\ddot{\mathbf{p}}_s + G_e \dot{\mathbf{p}}_s - K_e \mathbf{p}_s = J^{-1} dbg_i \mathbf{u}, \quad (4.56)$$

em que

$$G_e(\omega) = J^{-1}(G + C_a I_2) = J^{-1} \begin{bmatrix} C_a & \omega J_z \\ -\omega J_z & C_a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_e = \frac{1}{2} J^{-1} b^2 g_p.$$

Definindo o vetor de estados \mathbf{x} em função das posições e respectivas derivadas,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_s & \dot{\mathbf{p}}_s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_s & y_s & \dot{x}_s & \dot{y}_s \end{bmatrix}^T. \quad (4.57)$$

Ao derivar a equação (4.57) e utilizar a informação de (4.56), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_s \\ \ddot{\mathbf{p}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ K_e I_2 & -G_e(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_s \\ \dot{\mathbf{p}}_s \end{bmatrix} + J^{-1} dbg_i \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

O sistema dinâmico é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\omega)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),$$

em que

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ K_e I_2 & -G_e(\omega) \end{bmatrix}, \quad B = J^{-1} dbg_i \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Fixando a análise em uma velocidade angular ω constante, a matriz $A(\omega)$ passa a ser constante (notação A), assim o sistema dinâmico em malha aberta pode ser

reescrito como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (4.59)$$

com o a entrada \mathbf{u} sendo o vetor das correntes diferenciais de controle, $\mathbf{u} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}i_{d3} \quad i_{d1} \right]^T$. A saída do sistema dinâmico é o vetor \mathbf{y} , que são os valores medidos pelos sensores de posição, x_s e y_s ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}.$$

É usual representar \mathbf{y} em função do vetor de estados \mathbf{x} , de tal forma que

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x},$$

em que a matriz C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

O diagrama de blocos correspondente ao modelo apresentado (malha aberta) é exibido na Figura 4.15. Devido à linearização, essa análise é válida apenas na região próxima do ponto de equilíbrio, e para que a matriz de estados A seja constante a velocidade de rotação ω também deve ser.

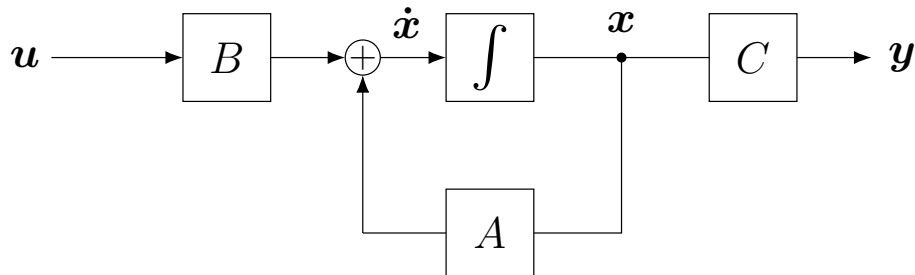


Figura 4.15: Sistema Dinâmico em malha aberta

Técnicas de controle linear poderão ser utilizadas a fim de encontrar a entrada \mathbf{u} que melhor atende às necessidades de controle, mantendo a estabilidade do sistema

que leve os estados para zero, através de determinado índice de desempenho.

4.10 Conclusão do Capítulo

Devido à relação entre forças de relutância e o fluxo magnético, foi necessário analisar separadamente a contribuição de cada bobina para encontrar o fluxo cada polo. Através dos fluxos obteve-se as forças de restauração, que possuem comportamento não-linear, mas que podem ser linearizadas porque a região de interesse é bem próxima do ponto de operação. Na modelagem do sistema dinâmico, estabeleceu-se relação entre essas forças de relutância, as correntes de entrada e as medidas dos sensores de posição para obter uma equação no formato de espaço de estados.

Esta análise é particular para um mancal magnético com operação na horizontal e no arranjo ótimo, isto é, com a orientação angular em $\pi/6$ e com os polos 1 e 2 compartilhando a mesma fiação. A modelagem do sistema detalhada neste capítulo é uma contribuição para tentar simplificar a análise desse sistema que possui forte acoplamento magnético, dinâmica não linear e alta complexidade. A linearização das forças permite simplificar o modelo para uma região próxima do ponto de operação.

Capítulo 5

Controle

5.1 Introdução

Este capítulo aborda os conceitos básicos de sistemas lineares, controle em espaço de estados e controle ótimo, através do Regulador Linear Quadrático na sua versão convencional (centralizada) e na versão descentralizada. Também é mencionado o conceito de Observador de estado, que costuma ser empregado quando é necessário realimentar os estados mas nem todos eles estão disponíveis.

As referências básicas para os conceitos da teoria de controle e modelagem em espaço de estados são os livros [30, 32–34]. O livro [35] foi o principal utilizado para as informações do Regulador Linear Quadrático e realimentação de estados. Além dessas, as referências [7, 12, 13, 39] foram fundamentais para compreender o controle centralizado e descentralizado.

5.2 Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade

A estabilidade de um sistema de controle é geralmente a primeira especificação a ser pensada durante o projeto. Como o sistema do mancal magnético de 3 pólos possui faixa de operação muito próxima do ponto de equilíbrio, o modelo lineari-

zado apresentado na Figura 4.15 é válido para o estudo de suas características e especificações.

A estabilidade de sistemas pode ser categorizada em dois tipos: a estabilidade (*Bounded Input-Bounded Output*), que diz respeito à análise da limitação de entradas e saídas, e a estabilidade interna, também conhecida como estabilidade no sentido de Lyapunov, que verifica se a partir de um estado inicial $x(t_0)$ a resposta do sistema $x(t)$ permanece limitada [33].

Um sistema relaxado é BIBO estável se, a toda e qualquer entrada limitada, corresponde uma saída também limitada. A estabilidade interna leva em conta a situação dos estados com a evolução da dinâmica do sistema e pode ser classificado como marginalmente estável, assintoticamente estável ou exponencialmente estável. Um Sistema será marginalmente estável (ou internamente estável) se para toda condição inicial limitada os estados futuros permanecerem limitados ($\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0, \delta, \varepsilon < \infty$), assintoticamente estável se, adicionalmente, todos os estados tenderem a zero quando o tempo crescer indefinidamente ($x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$), e exponencialmente estável se a curva de decrescimento dos estados for sempre menor ou igual a uma curva exponencial $ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|$, em que $c, \lambda \geq 0$. Em sistemas lineares e invariantes no tempo os critérios para estabilidade assintótica, exponencial e BIBO são os mesmos e pode-se falar apenas de estabilidade.

Para que um (Sistema Linear Invariante no Tempo) seja estável, todos os autovalores da matriz A devem possuir parte real menor que zero. Considerando uma velocidade de rotação do eixo ω constante, a matriz A é

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ K_e I_2 & -G_e(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_e & 0 & C_a J^{-1} & -\omega I_z J^{-1} \\ 0 & K_e & \omega I_z J^{-1} & C_a J^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Os autovalores da matriz de estados são também os pólos da matriz de transferência antes de algum cancelamento [31]. Portanto, se todos os autovalores da

matriz A tiverem parte real menor que zero, o sistema garantidamente será estável, e a matriz A é chamada de Hurwitz. Os valores numéricos dos autovalores vão depender das constantes K_e, ω e I_z , através de especificações de projeto.

Em [34] também é considerada a estabilidade de sistemas não lineares que foram linearizados localmente, ou estabilidade da linearização. Se o sistema linearizado for estável, então existe uma bola \mathbf{B} ao redor do ponto de equilíbrio x^{eq} tal que toda solução $x(t)$ do sistema não linear que inicia em $x(t_0) \in \mathbf{B}$ tem-se que $\|x(t) - x^{eq}\| \leq ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0) - x^{eq}\|, \forall t \geq t_0$, isto é, as soluções $x(t)$ decaem exponencialmente desde que as condições iniciais pertençam à bola \mathbf{B} ; o sistema é então localmente exponencialmente estável ao redor do ponto de equilíbrio. Detalhe que essa condição é a mesma para o caso em estudo.

Tão relevante quanto a estabilidade, a controlabilidade e a observabilidade são fundamentais tanto para a análise quanto para a síntese do projeto. Um sistema será controlável se for possível que a partir do sinal de entrada e de um valor inicial os estados consigam atingir quaisquer valores do conjunto alcançável em um intervalo de tempo finito. Uma maneira de aferir essa característica para um SLIT é analisando o posto da matriz de controlabilidade do sistema; a deficiência de posto representa o número de estados não controláveis. A matriz de controlabilidade é dada pela equação (5.2)

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = k_j l g_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & c_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{28} \\ 1 & 0 & C_a J^{-1} & -\omega I_z J^{-1} & \cdots & c_{38} \\ 0 & 1 & \omega I_z J^{-1} & C_a J^{-1} & \cdots & c_{48} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

A matriz \mathcal{C} para o caso em estudo possui dimensão 4x8, e apenas com a análise das quatro primeiras colunas é possível verificar que ela possui posto cheio, caracterizando uma realização controlável para o sistema.

O conceito dual ao de controlabilidade é o de observabilidade. Em muitos ca-

sos os estados não estarão disponíveis, uma vez que nem sempre é possível medir diretamente através do sistema ou até mesmo por inexistência de grandeza física associada. Mesmo sem a informação direta desses estados, em muitas situações é possível obter estimativas deles devido à observabilidade. O sistema será totalmente observável se for possível estimar todos os estados no instante inicial de um intervalo de tempo finito apenas com a informação da saída. Uma maneira de constatar a observabilidade de um SLIT é através do posto da matriz de observabilidade \mathcal{O} , dada pela equação (5.3), e que para o sistema em estudo possui dimensão 8×4 . Se a matriz \mathcal{O} possuir posto coluna completo, o sistema será totalmente observável.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ o_{81} \quad o_{82} \quad o_{83} \quad o_{84} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o_{81} & o_{82} & o_{83} & o_{84} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Substituindo os valores de C e A identificados em (4.60) e (4.58) verifica-se, analisando apenas as quatro primeiras linhas, que a matriz possui posto coluna completo, e por esse motivo, a realização é observável. Ora, como a realização apresentada tem o par (A, B) controlável e o par (A, C) observável, ela é a realização de ordem mínima do sistema!

5.3 Realimentação de Estados

No estudo de controle realimentado clássico, o erro entre a saída e a referência é aplicado ao controlador, que então fornecerá o sinal de entrada da planta para que a saída atenda a diversas especificações de desempenho, como erro em estado estacionário, tempo de subida, e outras. Isso é obtido realocando os pólos do sistema em malha fechada. Com a ferramenta matemática do espaço de estados, além de ser possível realocar os pólos, a análise é simplificada na presença de múltiplas

entradas/saídas e também permite formas mais robustas de controle e estimação de estados.

De maneira genérica, o objetivo de qualquer sistema de controle é obter a entrada $u(t)$ que atua no sistema para que a saída $y(t)$ rastreie um valor de referência $r(t)$. A depender do tipo do sinal $r(t)$, o problema é nomeado em:

- Regulação ($r(t) = 0, t \geq 0$): A referência a ser alcançada pelo sinal $y(t)$ é o valor zero, e o sistema parte de um estado inicial diferente de zero.
- Rastreamento ($r(t) = A, t \geq 0$): A referência a ser alcançada pelo sinal $y(t)$ é um valor constante, diferente de zero.
- Servomecanismo ($r(t) = \text{função não constante}$): A referência a ser alcançada pelo sinal $y(t)$ é uma função que depende do tempo.

Neste trabalho sobre o mancal magnético de três pólos, o vetor de saída \mathbf{y} representa as posições horizontal e vertical do eixo através das medidas dos sensores, e a referência $\mathbf{r} = 0$ representa a origem, portanto o controle possui as características de um Regulador.

A modelagem do sistema no formato de espaço de estados permite que seja feita a realimentação de estados. Ao invés de realimentar a saída, como é feito no controle clássico, os estados são realimentados para que o sistema adquira o desempenho desejado. O diagrama com a realimentação de estados é exibido na Figura 5.1. Após a realimentação de estados, a entrada \mathbf{u} é

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{r}}_0 + F\mathbf{x} = F\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

A entrada \mathbf{u} no caso em estudo representa as correntes de entrada:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i_{d3} \\ i_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.4) na equação (4.59) obtém-se a expressão para o sistema dinâmico em malha fechada:

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + BF)\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

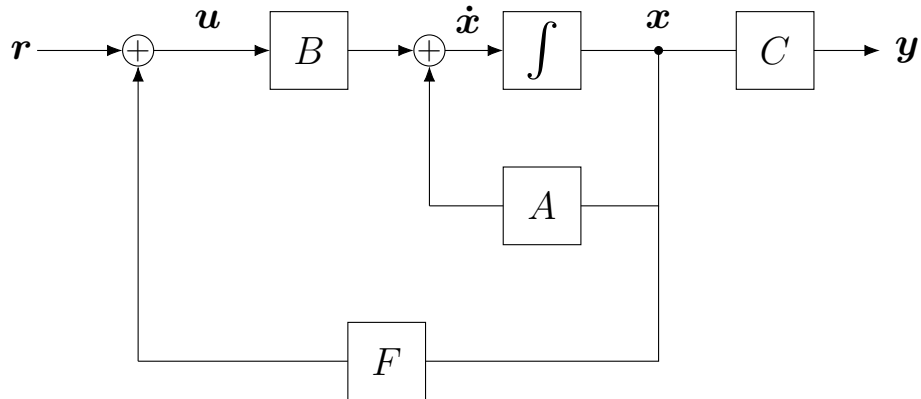


Figura 5.1: Diagrama da realimentação de estados

Através da escolha adequada dos elementos de F , os pólos da malha fechada podem ser alterados convenientemente, já que o sistema realimentado passa a ter matriz de estados $A + BF$. Mesmo que a matriz A não seja Hurwitz, o sistema realimentado pode ser ajustado para que os autovalores de $A + BF$ possuam parte real menor que zero, garantindo assim a estabilidade assintótica.

Uma particularidade de sistemas com múltiplas entradas e saídas é a possibilidade de correlação entre esses elementos, o que na literatura é chamado de acoplamento. Segundo [12], "(...) um sistema é desacoplado quando cada uma das suas variáveis de entrada afeta uma e apenas uma das suas variáveis de saída, e cada uma das suas variáveis de saída é afetada por uma e apenas uma variável de entrada(...)". Contrariamente, quando existe interação entre mais de uma entrada nas saídas ou vice-versa, o sistema possuirá acoplamento. O acoplamento é, portanto, uma característica de sistemas multivariáveis. Um SLIT será desacoplado quando a matriz de transferência for diagonal, e o controle para esses sistemas é mais simples do que para sistemas acoplados.

5.4 Regulador Linear Quadrático

Nesta seção foram utilizadas como referências o livro [35], [32] e as notas de aula [36].

Uma lei de controle \mathbf{u}^* será ótima se, ao realocar os pólos da malha fechada, ela também minimiza um determinado índice de desempenho, que tradicionalmente representa um compromisso entre a energia do sistema e o tempo de convergência dos estados. Caso se queira que os estados converjam rapidamente, as entradas precisam ter valores altos, aumentando o custo energético. Contudo, se for aplicado um sinal de entrada muito baixo, o custo energético diminuirá porém os estados levarão muito mais tempo para convergirem.

Em sistemas lineares, o índice de desempenho utilizado para um Regulador é através de uma integral da soma de duas funções quadráticas. Uma quadrática penaliza os estados não nulos e outra quadrática penaliza a entrada de controle. Essa penalização, ou ponderação entre estados e entrada, é feita através dos valores das matrizes Q e R , respectivamente. Nomeando o índice de desempenho por $V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_0)$ e sendo Q e R simétricas e positivas definidas, para um horizonte de tempo infinito,

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt. \quad (5.7)$$

O resultado para SLIT já conhecido na literatura é a lei de controle ótimo \mathbf{u}^* que minimiza $V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_0)$ dada por

$$\mathbf{u}^* = F^* \mathbf{x}, \quad \text{em que} \quad F^* = -R^{-1} B^T P. \quad (5.8)$$

P é a solução da equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (5.9)$$

O índice de desempenho ótimo de $V(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_0)$, isto é, o valor mínimo de V é

$$V^* = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}. \quad (5.10)$$

Em [36] são citadas quatro maneiras para escolha das matrizes Q e R , aqui descritas:

1. Inicialmente se escolhe $Q = I$ e $R = \rho I$, então varia-se o parâmetro ρ e analisa-se a resposta em cada situação.
2. Pesos diagonais: a segunda alternativa é escolher Q e R diagonais, mas cada uma com elementos diferentes. Assim é possível estabelecer pesos individuais para cada estado.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_n \end{bmatrix} \quad R = \rho \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix}$$

3. Ponderação de saída: Considerando a observabilidade do par (A,C) , atribui-se $Q = C^T C$ e $R = \rho I$ e então é feita a escolha dos melhores valores que atendam ao compromisso entre $\|y\|^2$ e $\rho \|u\|^2$.
4. A última alternativa é fazer as escolhas puramente por tentativa e erro.

Na aplicação estudada em [39], são utilizadas as alternativas mais simples de seleção das matrizes Q e R , que são matrizes identidades com dimensões adequadas. Neste trabalho utilizar-se-á a mesma abordagem.

Neste trabalho optou-se pela técnica 1, com Q e R sendo matrizes identidades de dimensões adequadas.

5.5 Controle Centralizado e Descentralizado

A principal referência utilizada para esclarecer os conceitos de controle centralizado e descentralizado foi [12], mas os trabalhos [39], [13], [16] e [7] também abordaram este tema e foram utilizados nesta seção.

Segundo [39], o controle descentralizado consiste na realimentação em que são evitadas interações entre diferentes estados no controle, e isto é obtido através de zeros em certas posições na matriz de realimentação. No controle centralizado há relação entre diferentes estados.

Utilizando o programa Matlab fica bastante simples encontrar a matriz de ganho de realimentação ótima: $\text{lqr}(A, B, Q, R)$. A solução da equação algébrica de Riccati para encontrar a matriz P da equação (5.9) também pode ser obtida através de um único comando, $\text{care}(A, B, Q)$. Essas funções fornecem a solução para o problema sem restrições, cujo índice de desempenho é dado pela equação (5.10).

O controle conhecido como descentralizado é obtido anulando certos elementos da matriz F , de modo que cada componente da entrada depende de apenas alguns componentes do estado. Para o nosso caso, a primeira componente da entrada é a corrente responsável pela geração da força horizontal f_x . No geral teríamos

$$u_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + f_{14}x_4,$$

isto é, a corrente que alimenta a força na direção x depende de $x_1 = x_s$, $x_2 = y_s$, $x_3 = \dot{x}_s$, $x_4 = \dot{y}_s$, depende portanto de todas as variáveis de estado.

Algo do tipo

$$u_1 = f_{11}x_1 + f_{13}x_3$$

significa que os comandos da direção x dependem apenas das medidas nessa mesma direção. Se algo análogo acontece com a outra componente da entrada, temos o controle descentralizado.

Esta proposta simplifica a implementação prática e em mancais magnéticos é bastante utilizada. Em [39] foi apresentado um procedimento para encontrar a matriz F_d^* para o caso descentralizado, que consiste em manipular algebricamente cada entrada a fim de impor uma matriz de ganho de realimentação em que cada entrada possui relação com apenas uma saída e sua derivada. Para o caso em estudo,

a matriz F_d^* deverá possuir a seguinte configuração

$$F_d^* = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Definindo o vetor \mathbf{x}_1 como a posição medida pelo sensor em x e sua derivada, e \mathbf{x}_2 como a posição medida pelo sensor em y e sua derivada, tem-se:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} y_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Os vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 se relacionam com \mathbf{x} através das matrizes C_1 e C_2 , mostradas em (5.13) e (5.14):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = C_2 \mathbf{x}. \quad (5.14)$$

Sendo B_1 e B_2 respectivamente a primeira e a segunda coluna da matriz B , u_1 o primeiro elemento de \mathbf{u} e u_2 o segundo elemento, pode-se reescrever a equação (4.59) como

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 u_1 + B_2 u_2. \quad (5.15)$$

No controle descentralizado cada entrada possui o ganho de realimentação de independente,

$$u_1 = F_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{e} \quad u_2 = F_2 \mathbf{x}_2, \quad (5.16)$$

em que F_1 e F_2 são definidos como

$$F_1 = \begin{bmatrix} p_1 & d_1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} p_2 & d_2 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

A entrada \mathbf{u} para o caso centralizado pode ser decomposta:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \mathbf{x}_1 \\ F_2 \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 C_1 \\ F_2 C_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (5.18)$$

Realizando a multiplicação matricial $F_1 C_1$ e $F_2 C_2$, obtém-se

$$F_1 C_1 = \begin{bmatrix} p_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & d_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$F_2 C_2 = \begin{bmatrix} p_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Ao substituir esses termos na equação (5.18) obtém-se a lei de controle resultante da restrição imposta, que é justamente a condição desejada ao descentralizar:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = F_d^* \mathbf{x}. \quad (5.21)$$

O procedimento de obtenção da matriz de ganho descentralizada descrito a partir daqui até o final desta seção foi o mesmo utilizado nos trabalhos [39], [13], [16] e [7]

Como já mencionado, o controle ótimo visa minimizar um determinado índice de desempenho. O Regulador Linear Quadrático descentralizado deve ser capaz de minimizar o mesmo índice de desempenho para o caso centralizado, mostrado na equação (5.7). Para isso, será necessário explicitar o vetor \mathbf{x} em função da matriz de transição de estados $\phi(t)$. O sistema dinâmico com a lei de controle descentralizado é obtido substituindo u_1 e u_2 da equação (5.18) em (5.15):

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 F_1 C_1 \mathbf{x} + B_2 F_2 C_2 \mathbf{x}, \quad (5.22)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B_1 F_1 C_1 + B_2 F_2 C_2) \mathbf{x} = A_0 \mathbf{x}. \quad (5.23)$$

A resposta da equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = A_0\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x} = \phi(t)\mathbf{x}_0 = e^{A_0 t}\mathbf{x}_0 \quad (5.24)$$

Reescrevendo o índice de desempenho mostrado em (5.7) através das variáveis \mathbf{x} , u_1 e u_2 para o caso descentralizado, e também, conforme já mencionado, considerando que o peso das entradas é uma matriz diagonal $R = \text{diag}\{r_1, r_2\}$,

$$V = \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u_1^T r_1 u_1 + u_2^T r_2 u_2) dt. \quad (5.25)$$

Substituindo \mathbf{x} pela equação (5.24) e u_1 e u_2 pela equação (5.18), expande-se para

$$V = \int_{t_0}^{\infty} [(\phi\mathbf{x}_0)^T Q (\phi\mathbf{x}_0) + (F_1 C_1 \mathbf{x})^T r_1 F_1 C_1 \mathbf{x} + (F_2 C_2 \mathbf{x})^T r_2 F_2 C_2 \mathbf{x}] dt. \quad (5.26)$$

Novamente substituindo \mathbf{x} pela equação (5.24), chega-se em

$$V = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}_0^T \phi^T Q \phi \mathbf{x}_0 + (F_1 C_1 \phi \mathbf{x}_0)^T r_1 F_1 C_1 \phi \mathbf{x}_0 + (F_2 C_2 \phi \mathbf{x}_0)^T r_2 F_2 C_2 \phi \mathbf{x}_0] dt \quad (5.27)$$

Realizando manipulações algébricas,

$$V = x_0^T \left\{ \int_{t_0}^{\infty} [\phi^T (Q + C_1^T F_1^T r_1 F_1 C_1 + C_2^T F_2^T r_2 F_2 C_2) \phi] dt \right\} x_0, \quad (5.28)$$

o que resulta no índice de desempenho dependente das condições iniciais, dado por

$$V = x_0^T P_d x_0. \quad (5.29)$$

Com P_d definido por

$$P_d = \int_{t_0}^{\infty} [\phi^T (Q + C_1^T F_1^T r_1 F_1 C_1 + C_2^T F_2^T r_2 F_2 C_2) \phi] dt. \quad (5.30)$$

Antes de mostrar um algoritmo para encontrar F_d^* de forma iterativa, é preciso ter

as condições necessárias para a descentralização. Inicialmente, a primeira condição necessária é que a matriz X dada por

$$X = \int_{t_0}^{\infty} xx^T = \int_{t_0}^{\infty} \phi X_0 \phi^T dt \quad (5.31)$$

deve atender à 1ª equação de Lyapunov

$$A_0 X + X A_0^T = -X_0, \quad (5.32)$$

em que A_0 é Hurwitz e X_0 é definida por

$$X_0 = x_0 x_0^T. \quad (5.33)$$

A próxima condição necessária é que a matriz P_d deve satisfazer à 2ª equação de Lyapunov:

$$A_0^T P_d + P_d A_0 + Q + C_1^T F_1^T r_1 F_1 C_1 + C_2^T F_2^T r_2 F_2 C_2 = 0 \quad (5.34)$$

E por fim, atendendo ao critério de otimalidade, o gradiente do índice de desempenho V deve ser zero, resultando em:

$$r_1 F_1 C_1 X C_1^T = B_1^T P_d X C_1^T, \quad (5.35)$$

$$r_2 F_2 C_2 X C_2^T = B_2^T P_d X C_2^T. \quad (5.36)$$

O algoritmo apresentado em [39] e depois trabalhado em [13] e também em [16] consiste nos seguintes passos:

1. Obter A_0 com a matriz F^* para o caso centralizado: $A_0 = A + BF^*$. A partir da 2ª iteração, usar F_d^* encontrado ao final deste algoritmo.
2. Obter matriz X através da solução da 1ª equação de Lyapunov - equação (5.32) (É necessário saber a condição inicial x_0 a fim de obter matriz X_0).

3. Obter a matriz P_d que atenda à 2ª equação de Lyapunov - equação (5.34).
4. Por fim, obter F_1 e F_2 que atendam ao critério de otimalidade, mostrado nas equações (5.35) e (5.36).
5. Se necessário, repetir loop retornando ao item 1, com F_1 e F_2 obtidos para formar a matriz F_d^* .

5.6 Estimadores de Estados

Para esta seção as referências utilizadas foram os livros [10], [30], [32] e [35].

A teoria de realimentação de estados apresentada considera que todos os estados estarão disponíveis para medição, mas isso nem sempre acontece, já que normalmente não há disponibilidade de sensores específicos para medir \dot{x}_s e \dot{y}_s . O estimador de estados ou observador aparece como uma ferramenta útil para solução desse tipo de problema, considerando que o par (A, C) seja observável (o que acontece para o sistema em estudo).

Além da estimação de estados, existem outras alternativas: Uma é utilizar sensores de velocidade para medir \dot{x}_s e \dot{y}_s , mas isso geralmente não é viável pois aumenta o custo e a complexidade do *setup*. Outra alternativa seria diferenciar os sinais analógicos de x_s e y_s , porém o inconveniente é a amplificação dos ruídos em alta frequência que estão presentes nesses sinais.

Contudo, a maioria das implementações de mancais magnéticos é feita com ferramentas digitais: os sinais dos sensores passam por uma conversão Analógico/Digital e então o controle é implementado de forma digital em um processador digital de sinais. O controle digital oferece inúmeras vantagens em relação ao analógico, como facilidade de alteração de parâmetros via *software*, menor variação de parâmetros devido a fatores externos, possibilidade de implementação de leis de controle mais elaboradas e possibilidade de diagnóstico em tempo real.

Com a implementação digital, a alternativa utilizada para estimar os estados desconhecidos é a derivada numérica, que consiste em dividir a diferença entre duas

medições de posição pelo tempo de amostragem dessas medidas. As características dos sensores, do conversor Analógico/Digital, a frequência de amostragem vão depender da disponibilidade financeira do projeto. A referência [10] diz que para aplicações em mancais magnéticos as taxas de amostragem geralmente estão entre 5 e 10 kHz, mas em alguns casos 20 kHz pode ser necessário.

O estimador pode ser em malha aberta ou em malha fechada. O estimador em malha aberta utiliza apenas a informação das entradas para realizar a predição (\hat{x}), conforme mostrado na figura 5.2. Ele é basicamente uma réplica do sistema original e bem mais simples que a malha fechada, mas tem dois grandes problemas que inviabilizam o seu uso: o estado inicial precisa ser conhecido ou determinado cada vez que o estimador for requerido, e se a matriz A não for Hurwitz o erro entre o estado real e o estado estimado cresce com o passar do tempo [33]. O estimador de estado em malha fechada utiliza tanto os dados de entrada como os de saída para fazer a predição do estado (\hat{x}), conforme ilustrado na figura 5.3.

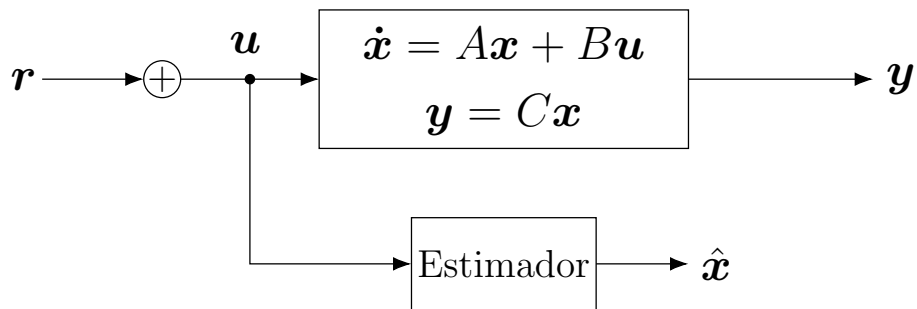


Figura 5.2: Estimador em malha aberta.

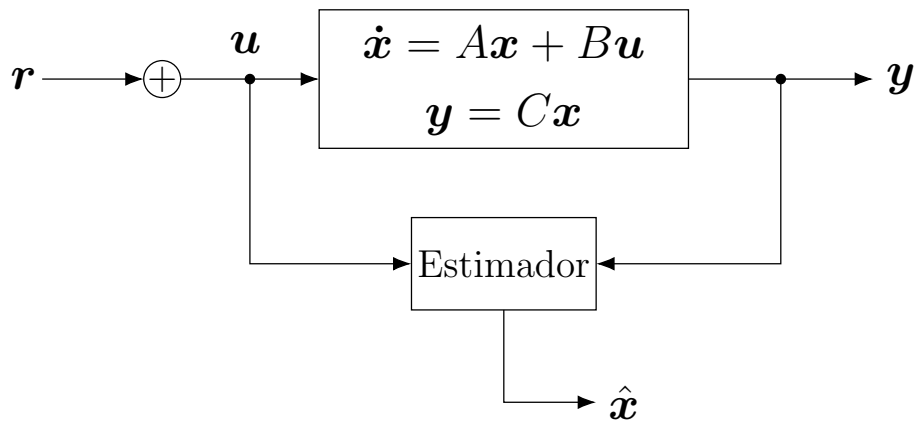


Figura 5.3: Estimador em malha fechada.

Detalhando melhor o bloco do estimador e considerando que ele é de ordem completa, pela figura 5.4 verifica-se que no seu diagrama há uma réplica dos parâmetros da Planta através das matrizes A , B e C , mas além disso, o erro entre a saída real \mathbf{y} e a saída estimada $\hat{\mathbf{y}}$ é multiplicada por um ganho L , que é realimentado no sistema dinâmico estimado. A equação dinâmica do Observador (ou estimador) é dada pela equação (5.37).

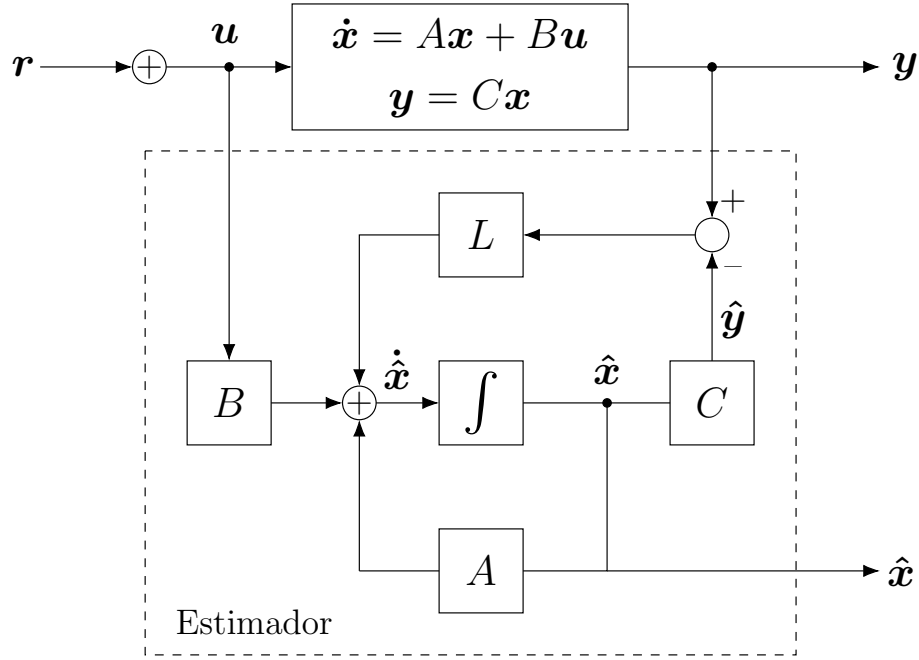


Figura 5.4: Estimador em malha fechada detalhado.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}) = (A - LC)\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + L\mathbf{y}. \quad (5.37)$$

Definindo erro entre o estado real e o estimado por \mathbf{e} , então ele será dado pela equação (5.38):

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (5.38)$$

Após derivar os dois lados da equação (5.38), substituir $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ pela expressão obtida em (5.37) e fazer manipulações algébricas, tem-se

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - LC)\mathbf{e}. \quad (5.39)$$

A equação (5.39) garante que se todos os autovalores de $A - LC$ possuírem

parte real menor que zero, o erro entre o estado real e o estado estimado convergirá para zero, isto é, o estado estimado representará fielmente o estado da planta! A situação aqui é dual à da controlabilidade (equação (5.6)), mas a exigência para que os autovalores de $A - LC$ possam ser alocados arbitrariamente é que o par (A, C) seja totalmente observável, e essa exigência é cumprida pelo modelo em questão!

O projeto do bloco estimador da Figura 5.3 pode ser categorizado em determinístico ou estocástico. Sendo determinístico, pode subdividir-se no estimador de ordem completa ou no estimador de ordem reduzida, e o estimador estocástico é o filtro de Kalman, ou estimador ótimo – *Linear Quadratic Estimator*.

$$\text{Estimador} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinístico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ordem completa} \\ \text{Ordem reduzida} \end{array} \right. \\ \text{Estocástico: Filtro de Kalman (LQE)} \end{array} \right.$$

Entre o estimador de ordem completa e o de ordem reduzida, existe um compromisso entre os benefícios de cada um. Os fatores citados em [35] são: complexidade do projeto, robustez, propriedades de filtragem de ruídos e desempenho transitório. Como desvantagens do observador de ordem reduzida pode-se citar a maior complexidade na sua implementação e pior desempenho na presença de ruído em relação ao observador de ordem completa, mas em compensação apresenta como vantagem maior robustez frente à incerteza nos parâmetros da planta. A escolha fica a critério do projetista do sistema.

5.7 Rastreamento Assintótico e Rejeição de Perturbações

A realimentação de estados ou de estados estimados equivale a um controle Proporcional-Derivativo, e por isso ela não é capaz de rastrear assintoticamente a referência quando ocorrem perturbações constantes nos estados. A solução para esse problema é, além da realimentação de estados, realizar a realimentação de saída

com integral do erro. A integral do erro é multiplicada por um ganho, que por sua vez será combinado com a realimentação de estados para proporcionar a entrada do sistema. A Figura 5.5 exibe o diagrama.

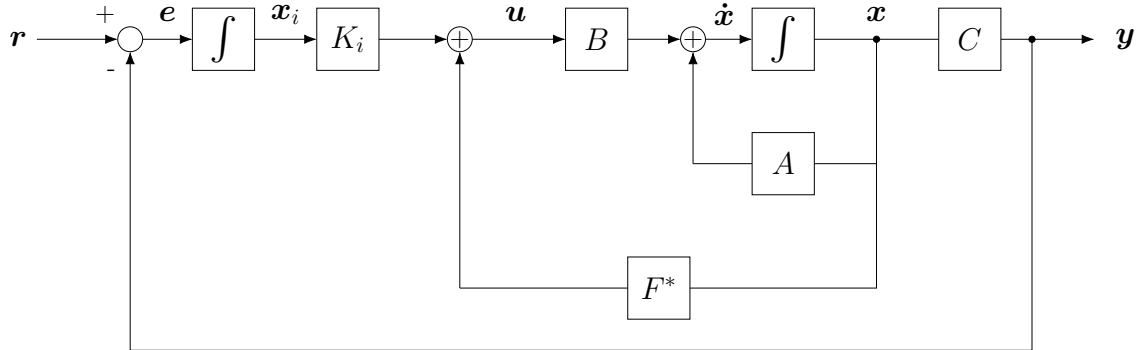


Figura 5.5: Realimentação de estados e de saída com integral do erro.

Omitindo o desenvolvimento algébrico, as equações de estado desse sistema são:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} A + BF & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}, \quad (5.40)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \int \mathbf{e} \, dt, \quad \mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}. \quad (5.41)$$

O valor do ganho K_i pode ser escolhido convenientemente, para que a matriz de estados ampliada possua autovalores com parte real negativa.

5.8 Conclusão do capítulo

No capítulo foram apresentados os conceitos de Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade, que são fundamentais para a compreensão de Sistemas Lineares (ou linearizados). Pelas características, o sistema é Controlável e Observável, o que permite realizar a estabilização através da realimentação de estados. Com o Regulador Linear Quadrático, é possível obter a matriz de ganho de realimentação que realoca os polos do sistema em malha aberta. Também é descrito o algoritmo para obter a matriz de ganho de realimentação do caso descentralizado a partir da matriz

do caso centralizado. Essa teoria já se encontra bem estabelecida na literatura mas aqui são lembrados apenas os pontos necessários para bom entendimento do controle utilizado neste trabalho.

Capítulo 6

Resultados e simulações computacionais

6.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é mostrar algumas características dos protótipos de mancais magnéticos de 8 e 4 polos da UFRJ e apresentar alguns resultados de simulações computacionais feitos com o software Matlab. Optou-se por utilizar os dados e dimensões físicas dos protótipos de 8 e 4 pólos já existentes, apresentados no item 5 da referência [9], para ser possível encontrar as correntes de base. Mesmo assim, as comparações diretas com o mancal de 3 polos são problemáticas. Os estudos realizados nos mancais de 8 e 4 polos foram feitos com uso na vertical, já o mancal de 3 polos tem o seu modelo com uso na horizontal.

6.2 Cálculo das correntes de base para equilibrar o rotor

O objetivo desta seção é encontrar a relação entre a corrente de base necessária para sustentar o peso do rotor no modelo de mancal magnético de 3 polos. Para o cálculo da corrente de base necessárias para sustentar o peso do rotor, serão utilizadas as

equações (4.27) e (4.29):

$$i_{B1} = \sqrt{2}i_0 = h\sqrt{\frac{2mg}{\mu_0 A_c n_c^2}}. \quad (6.1)$$

Substituindo as variáveis $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $g = 9,8$ m/s², tem-se

$$i_{B1} = (5,06 \times 10^{-4})h\sqrt{\frac{An^2}{m}}. \quad (6.2)$$

Verifica-se que a corrente de base possui relação com o entreferro, o número de voltas nas bobinas, a área da seção transversal do polo, e a massa do rotor. Existe aí uma flexibilidade na escolha desses parâmetros para o que melhor se adequa as questões construtivas. Para estabelecer uma relação direta entre corrente de base e massa, é preciso escolher valores para o entreferro, a área da seção transversal e o número de voltas da bobina. Os valores escolhidos estão na Tabela 6.1, que são os mesmos de um já existente mostrado em [27].

Tabela 6.1: Valores escolhidos para projeto

Exemplo de Especificações	
Entreferro (h)	0,5 mm
Área do polo (A)	4×10^{-4} m ²
Voltas da Bobina (N)	300/polo

Substituindo os valores da tabela 6.1 na equação (6.2), a relação entre corrente de base e massa é

$$i_{B1} = 0,33\sqrt{m}. \quad (6.3)$$

O gráfico dessa relação entre corrente de base necessária para suspender a massa do rotor está na Figura 6.1. O projeto do dispositivo e a escolha das dimensões físicas determinará a corrente de base necessária para essa sustentação. Como exemplo, para sustentar um rotor de $m = 0,5$ kg, a corrente de base necessária é $i_{B1} = 0,22325$ A.

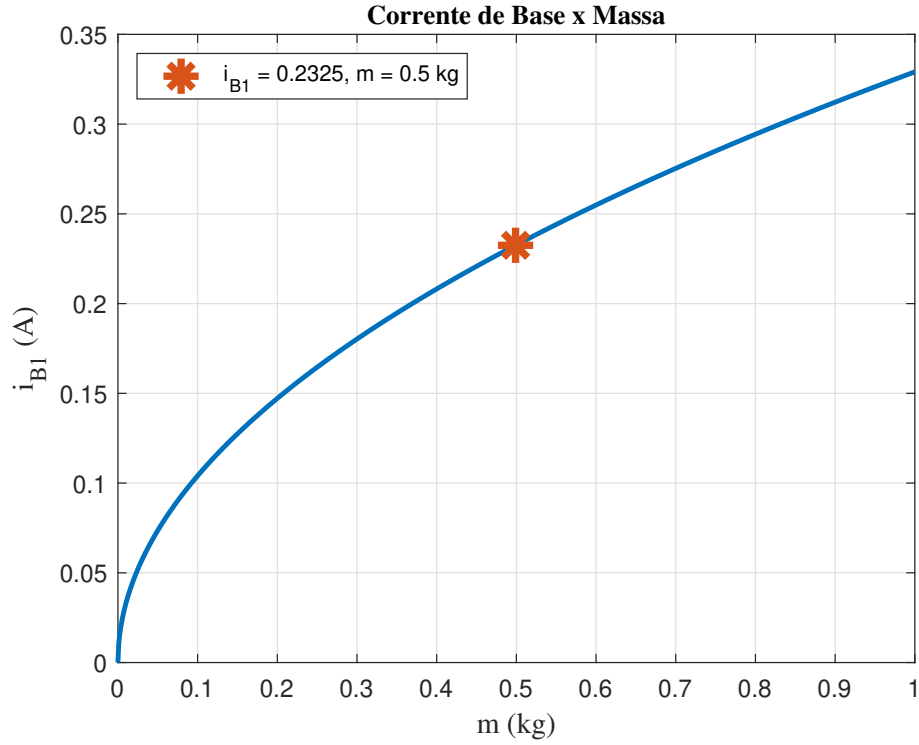


Figura 6.1: Relação entre i_{B1} e m com dados da Tabela 6.1.

6.3 Simulações e Gráficos

Para realizar as simulações foi preciso escolher os valores de dimensões físicas e valores de momentos de inércia. Com base nos protótipos já existentes, as constantes escolhidas foram as seguintes: comprimento do eixo $b = 0,137$ m, distância dos sensores $d = 0,203$ m, momento de inércia em relação ao eixo z , $I_z = 0,0017$ kg.m², $J = 0,0592$ kg.m² e corrente de base $i_{B1} = 0,2325$ A, que proporciona constantes $k_p = 19.563,58$ kg/s² e $k_i = 42,07$ kg.m/(A.s²). Considerando também a velocidade angular $\omega = 3.400$ rpm ≈ 356 rad/s e coeficiente de atrito viscoso $C_a = 0,0303$ m²/s, pode-se obter as matrizes A e B da equação (4.58), dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.101,2 & 0 & -0,51 & -10,23 \\ 0 & 3.101,2 & 10,23 & -0,51 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 19,76 & 0 \\ 0 & 19,76 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

O diagrama do sistema simulado pelo Simulink foi conforme a Figura 6.2.

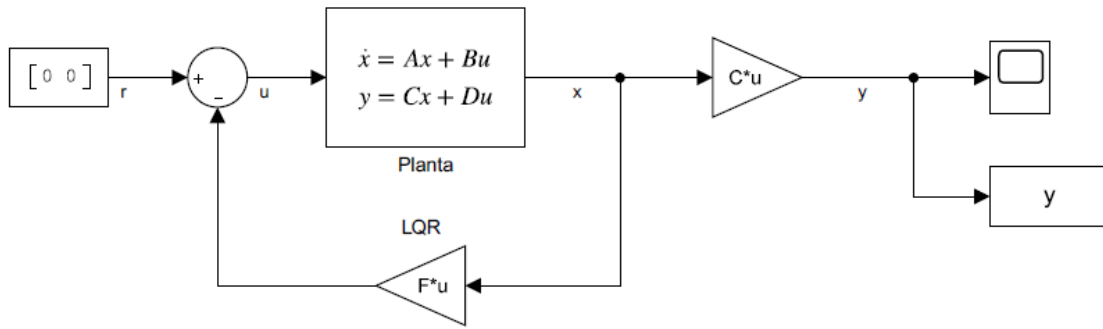


Figura 6.2: Diagrama do sistema no Simulink.

Os autovalores da matriz A são $-55,71 \pm j5,13$ e $55,2 \pm j5,08$, portanto em malha aberta o sistema não é estável, devido aos autovalores com parte real positiva. A Tabela 6.2 mostra a comparação entre os autovalores do sistema em malha aberta para a configuração de 3 pólos, aqui apresentada, e as configurações de 8 e 4 pólos obtida em [9].

Tabela 6.2: Autovalores da matriz A para os mancais de 3, 8 e 4 pólos

Autovalores de A		
3 Polos	8 Polos	4 Polos
$-55,71 \pm j5,13$	$-256,84 \pm j5,12$	$-513,50 \pm j5,11$
$55,2 \pm j5,08$	$256,33 \pm j5,11$	$512,99 \pm j5,11$

Devido à controlabilidade do sistema, a realimentação de estados é uma alternativa para estabilização. Definindo o peso das matrizes Q e R como identidades de dimensões adequadas e utilizando a ferramenta computacional Matlab, obtém-se a matriz de ganho de realimentação F^* centralizada para estabilização ótima através do Regulador Linear Quadrático (LQR),

$$F^* = \begin{bmatrix} 311,27 & 28,24 & 5,68 & 0 \\ -28,24 & 311,27 & 0 & 5,68 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Os autovalores da malha fechada do controlador com estabilização ótima $A + BF^*$ são $-66,22 \pm j6$ e $-46,45 \pm j4,2$. Também em [9] foram apresentados os autovalores da malha fechada dos mancais de 8 e 4 pólos, naturalmente as matrizes de ganho

de realimentação F^* para esses mancais são diferentes da matriz F^* apresentada em (6.5) para o mancal de 3 pólos. A comparação entre os autovalores da malha fechada das três configurações de mancal magnético são exibidas na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Autovalores da matriz $A + BF^*$, para os mancais de 3, 8 e 4 pólos

Autovalores de $A + BF^*$		
3 Polos	8 Polos	4 Polos
$-66, 22 \pm j6$	$-263, 18 \pm j5, 24$	$-539, 93 \pm j5, 37$
$-46, 45 \pm j4, 2$	$-250, 16 \pm j4, 98$	$-487, 88 \pm j4, 85$

Apenas pela análise dos autovalores da malha fechada (que também são os pólos da função de transferência) é possível tirar conclusões qualitativas a respeito das respostas do sistema. Se os autovalores forem números complexos, a resposta terá comportamento subamortecido, em que quanto mais negativa a parte real, mais rápido será o decaimento da curva exponencial envoltória. Apenas com essa informação é possível saber que o mancal de 3 pólos terá resposta mais lenta que o mancal de 8 polos e o de 4 polos. Para efeito de comparação à simulação já feita em [9], considerando uma condição inicial $x_s = 0.2$ mm e $y_s = -0.2$ mm, a resposta da estabilização do eixo para os mancais de 3, 8 e 4 polos é ilustrada pela Figura 6.3.

Essa matriz de ganho de realimentação permite uma convergência dos estados de posição em cerca de 80 ms.

Analisando o ganho de realimentação ótimo obtido na equação (6.5), observa-se que se trata de controle centralizado, devido aos valores 28.24 e -28.24 , conforme explicado no fim da subseção 5.3. Um questionamento a se fazer é: Qual seria o desempenho do sistema se fosse aplicado um controle descentralizado, isto é, eliminando os elementos fora das diagonais?

Como resposta a essa pergunta, o algoritmo para obtenção da matriz de ganho descentralizado F_d^* , descrito na seção 5.5, foi implementado. Após 5 iterações, a diferença entre a norma matricial de F^* e F_d^* foi menor que $3,7 \times 10^{-5}$, e isso foi utilizado como critério de parada. A matriz obtida é mostrada na equação (6.6). O índice de desempenho para o caso centralizado e para o descentralizado foi

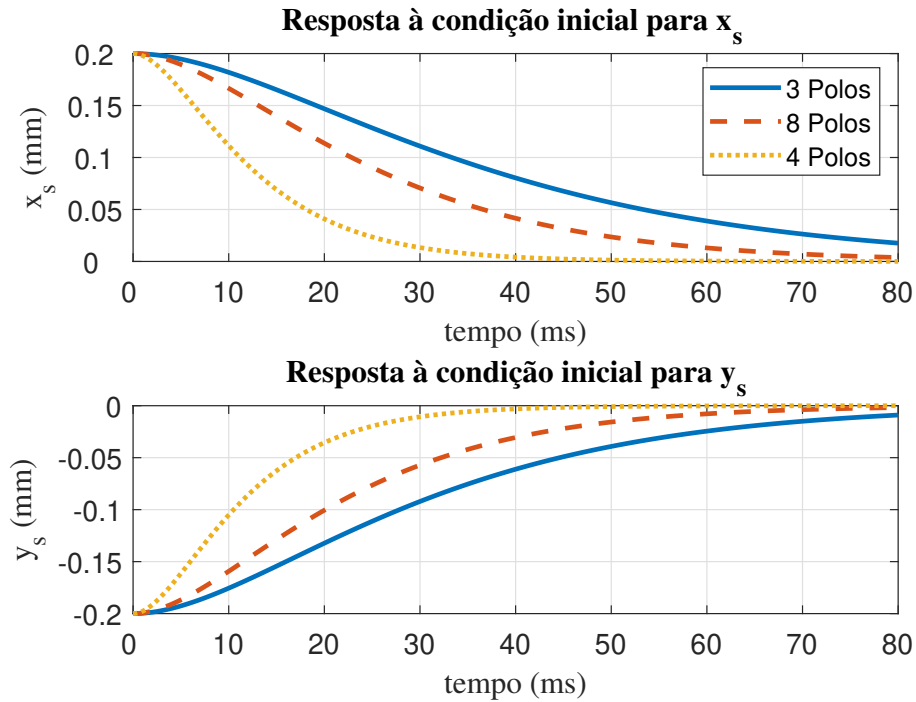


Figura 6.3: Resposta dos mancais de 3, 4 e 8 pólos.

$$V = 7,189 \times 10^{-5}.$$

$$F_d^* = \begin{bmatrix} 280,66 & 0 & 5,42 & 0 \\ 0 & 337,09 & 0 & 5,48 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Ao impor essa nova matriz de ganho de realimentação, os quatro autovalores da malha fechada $A + BF_d^*$ passam a ser 36,57; -50,86 e $-64,49 \pm j22,88$, para a velocidade de rotação $\omega = 3.400$ rpm.

Apesar dos autovalores da malha fechada serem diferentes, a resposta do controle descentralizado para a velocidade de rotação $\omega = 3.400$ rpm é idêntica à resposta do controle centralizado. A opção pelo controle descentralizado sem dúvida é uma alternativa válida, já que ele permite uma simplificação e, conseqüentemente, uma diminuição no número de amplificadores necessários para o controle. A partir de uma velocidade de rotação de cerca de 18.144 rpm, as diferenças entre as estratégias de controle centralizado e descentralizado começaram a aparecer, portanto a velocidade de operação é um dado que vai ser determinante na resposta e no controle aplicado.

Em uma velocidade bem mais alta, como $\omega = 38.197$ rpm, os autovalores da ma-

lha fechada para o caso centralizado e descentralizado já são bem diferentes entre si, como exibido na tabela 6.4. A resposta do sistema também passa a ter componentes oscilatórios bem mais elevados que em velocidades mais baixas. A figura 6.4 exhibe as trajetórias dos autovalores para as velocidades de rotação de $\omega = 3.400$ rpm até $\omega = 38.197$ rpm, quando o controle centralizado é utilizado. Os autovalores quando o controle descentralizado é utilizado são mostrado na Figura 6.5. O sistema apresentaria instabilidade na velocidade $\omega = 38.197$ rpm, porque apresenta autovalores com parte real positiva.

Tabela 6.4: Autovalores para duas velocidades de rotação, para as estratégias de controle LQR Centralizado e Descentralizado

Autovalores da Malha Fechada		
	$\omega = 3.400$ rpm	$\omega = 38.197$ rpm
Centralizado (F^*)	$-66,2 \pm j6$	$-32,68 \pm j82,32$
	$-46,46 \pm j4,21$	$-12,92 \pm j32,54$
Descentralizado (F_d^*)	$-36,57, 50, 86$	$32,7 \pm j82,32$
	$-64,49 \pm j22,9$	$-12,92 \pm 32,54$

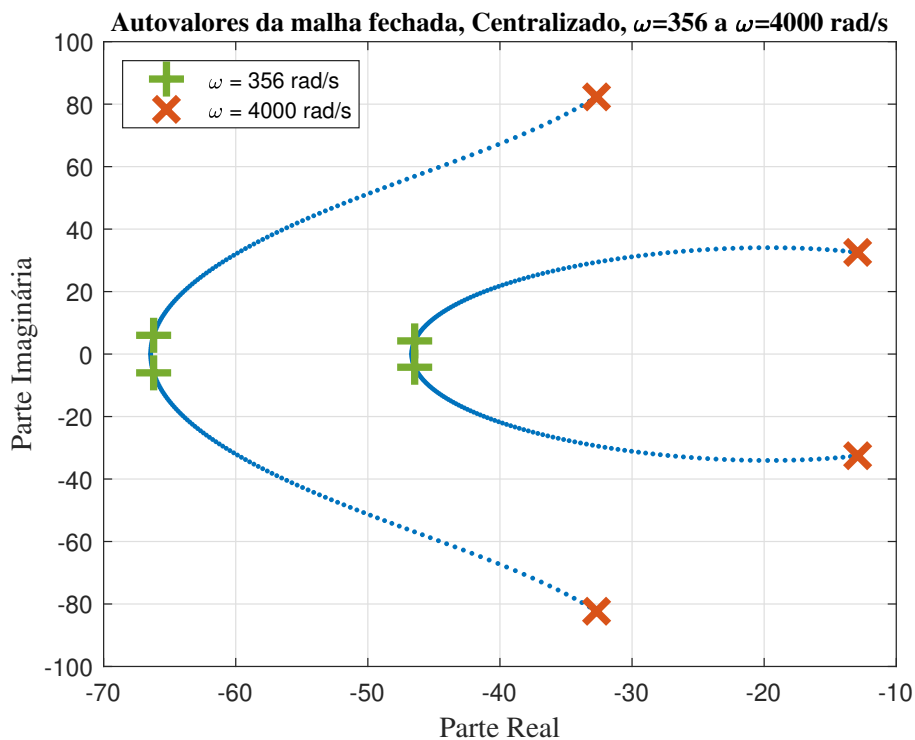


Figura 6.4: Trajetórias dos autovalores variando a velocidade em $\omega = 0$ até $\omega = 38.197$ rpm

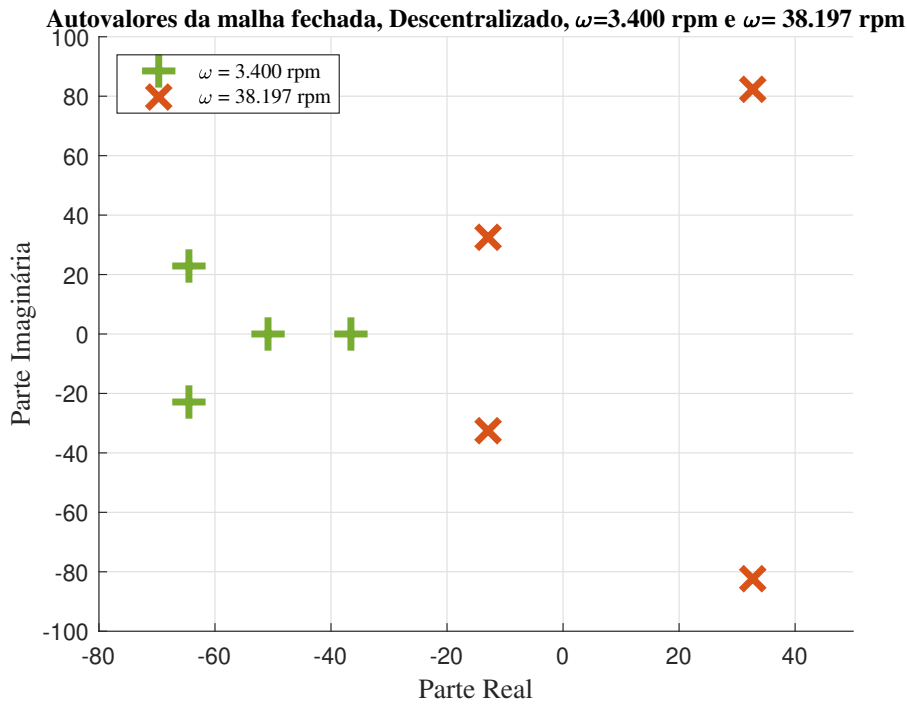


Figura 6.5: Trajetória dos autovalores, com controle descentralizado, com $\omega = 3.400$ rpm a $\omega = 38.197$ rpm

A realimentação de estados com controle ótimo equivale a um controlador proporcional-derivativo. Caso um distúrbio constante atue no conjunto, esse controle não será capaz de rejeitá-lo. Para ilustrar, se o sistema da Figura 6.2 após a estabilização for forçado novamente a retornar a condição inicial, o controle não o estabilizará na origem, como desejado, mas conforme Figura 6.6

Para obter rastreamento assintótico e rejeição de distúrbios constantes é necessário, além da realimentação de estados, a realimentação de saída com ação integral. Isso acaba aumentando a ordem do sistema, mas soluciona o problema. A Figura 6.7 exhibe o diagrama do sistema com integração do erro.

Ao inserir o controle integral realimentado, o sistema rejeita perturbações constantes. Na Figura 6.8, no instante de tempo 0,5 s o sistema sofre uma mudança na condição de equilíbrio, mas mesmo assim consegue rejeitar a perturbação e estabilizar novamente, por volta de 3,5 s.

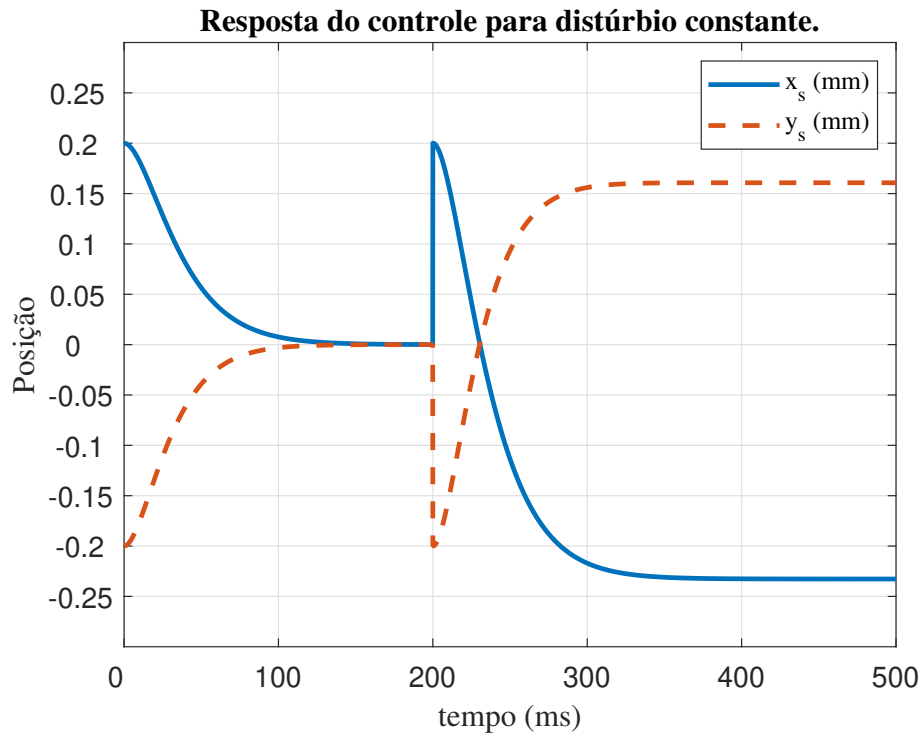


Figura 6.6: Resposta do mancal de 3 polos com distúrbio externo alterando o posicionamento após estabilização.

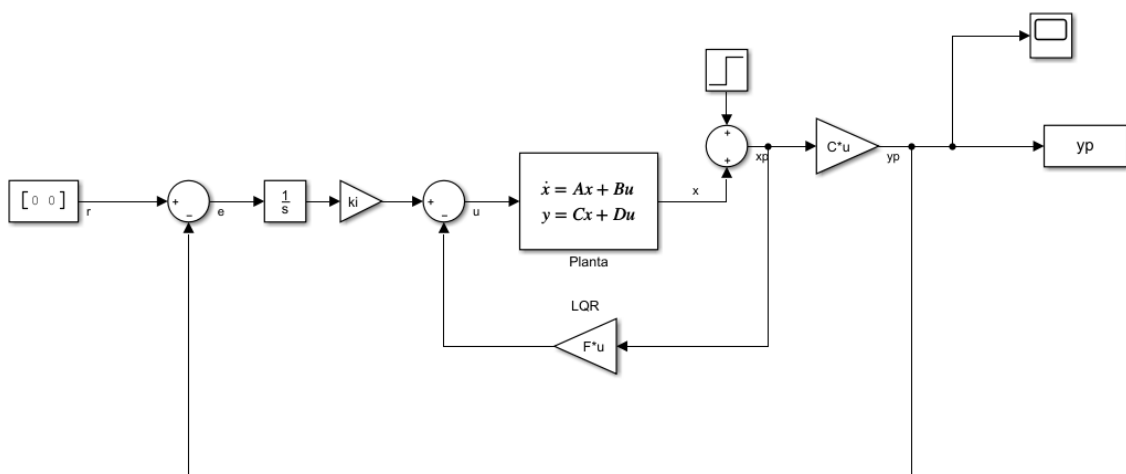


Figura 6.7: Realimentação de estados ótima com controle integral.

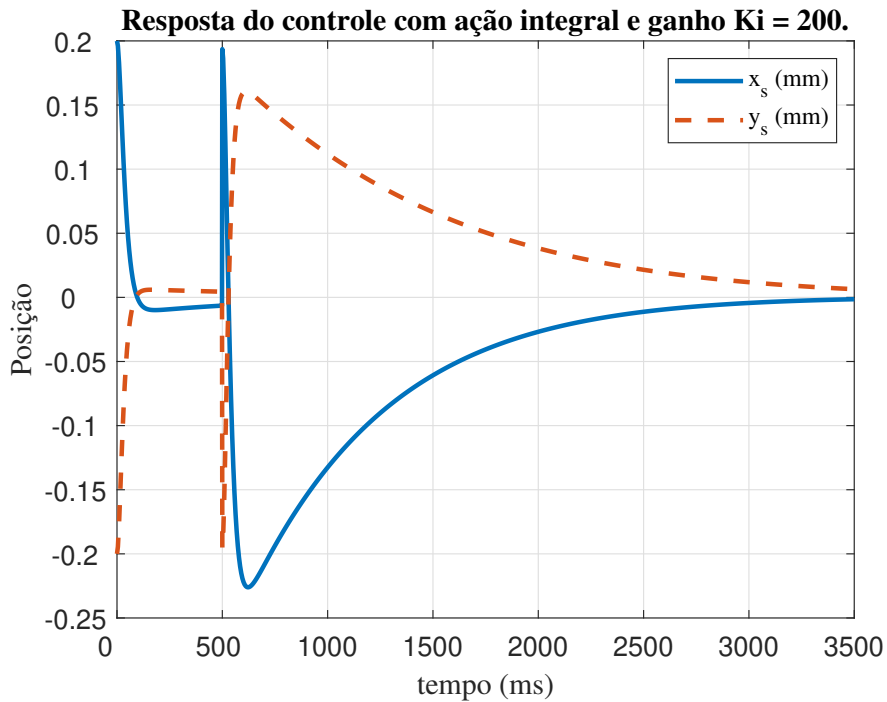


Figura 6.8: Controle com rejeição de perturbação constante.

6.4 Conclusão do Capítulo

Com alguns dados dos protótipos dos mancais de 4 e 8 polos, foram feitas simulações para o mancal magnético de 3 polos para fim de comparação. Em malha aberta, o sistema dinâmico é instável, mas devido à Controlabilidade total do sistema, com a realimentação de estados é possível estabilizá-lo. Para a velocidade de rotação $\omega = 356 \text{ rad/s}$, a matriz de ganho de realimentação centralizada já possui uma estrutura quase descentralizada: não existe interação entre as entradas e as duas derivadas dos estados. Atendendo ao mesmo índice de desempenho, a matriz descentralizada possui valores próximos da matriz centralizada, mas ocorre mudança significativa nos autovalores dos dois casos. Na velocidade $\omega = 4.000 \text{ rad/s}$, o sistema já não é mais estável, porque possuirá autovalores com parte real positiva.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Este capítulo apresenta as considerações finais acerca do estudo realizado. Inicialmente, apresentou-se a importância da utilização dos mancais magnéticos no contexto tecnológico e industrial, mostrando as vantagens e desvantagens do uso da levitação de rotores. Por natureza, o mancal magnético é um produto com tecnologia de diferentes áreas e que pode ser estudado sob vários aspectos diferentes, com o enfoque em engenharia elétrica, engenharia mecânica, engenharia de controle e computação, por exemplo.

Para o entendimento da modelagem através da análise dos circuitos magnéticos, foram expostas algumas equações do eletromagnetismo clássico e também apresentado o problema de levitação simples, que guarda bastante semelhança com o princípio de funcionamento de um mancal magnético.

Em seguida foi apresentado um modelo linearizado para o mancal magnético de 3 polos com configuração ótima, através da análise dos circuitos magnéticos e das contribuições de cada bobina para o fluxo total no dispositivo. A partir dos fluxos magnéticos resultantes em cada polo foi possível obter a força magnética resultante no eixo horizontal e no eixo vertical, que são funções multivariáveis não lineares de alta complexidade.

A linearização por série de Taylor permitiu uma simplificação dessas equações,

uma vez que o ponto de operação é bem próximo da origem. O resultado teórico da linearização permitiu concluir que as forças de relutância obtidas apresentam constantes multiplicativas menores que as respectivas forças nas geometrias de 4 e 8 polos. Nas mesmas condições, o mancal magnético com 3 polos pode apresentar as características de uma suspensão mais flexível que as outras, mas essa característica também é passível de alteração através do aumento das correntes de base, por exemplo.

Os mancais magnéticos são sistemas não lineares, mas normalmente eles operam bem próximo do ponto central. O modelo não linear é completo mas o modelo linearizado é adequado para se analisar as características. Nos mancais magnéticos, por segurança, são instalados mancais mecânicos, o que impossibilita a operação do eixo longe do ponto central.

Além da modelagem das forças de restauração, neste trabalho foi feito o modelo da dinâmica mecânica de rotação, considerando o torque exercido no eixo. Com o auxílio das equações de Euler para dinâmica de corpos rígidos e de álgebra matricial, foi possível escrever a dinâmica rotacional no formato de espaço de estados, permitindo a implementação de técnicas de controle já conhecidas na literatura. Para essa modelagem, contudo, a velocidade de rotação precisa ser considerada constante, uma vez que a matriz de estados é dependente da velocidade.

Com a dinâmica em espaço de estados foi possível analisar algumas características do sistema de maneira quase direta, como a estabilidade, através dos autovalores da matriz de estados, e também a controlabilidade e a observabilidade.

A possibilidade de realizar a realimentação de estados é bastante interessante, e o controle ótimo com o emprego do regulador linear quadrático permitiu encontrar a melhor entrada de controle que atenda a um compromisso entre custo energético e velocidade de convergência dos estados. Ainda com o controle LQR, é possível simplificar a matriz de realimentação de estados com a técnica descentralizada. Ela atendeu ao mesmo índice de desempenho da versão centralizada, mas a matriz de ganho de realimentação possui mais elementos nulos, simplificando a implementação.

Verificou-se que para as mesmas medidas físicas dos protótipos já existentes de 4 e 8 polos o mancal de 3 polos teve o tempo de resposta mais lento. O emprego do observador (ou estimador de estados) não é necessário, porque através de ferramentas digitais é possível obter os estados de velocidades através dos estados de posição.

Por fim, o mancal de 3 polos permitiu um arranjo mais compacto e com menor gasto energético, o que é bastante interessante para aplicações que necessitem de tamanho reduzido. O controle descentralizado é uma alternativa válida de controle linear, mas apresenta limitações, como tornar o sistema instável em elevada velocidade de operação.

7.2 Trabalhos Futuros

Como sugestões de trabalhos futuros, pode-se verificar os seguintes tópicos:

- Construir um protótipo físico para fins de validação experimental.
- Testar estratégias de controle não linear e/ou controle robusto.
- Implementar controle digital na configuração de 3 polos.
- Conceber uma forma de conseguir operar o mancal magnético de 3 polos na vertical, para ser possível comparar com mais propriedade as características dos mancais.

Referências Bibliográficas

- [1] SOTELO, G. G. *Modelagem de Supercondutores Aplicada ao Projeto de Mancais Magnéticos*. Tese de doutorado, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, 5 2007.
- [2] CHIBA, A., FUKAO, T., ICHIKAWA, O., et al. *Magnetic Bearings and Bearingless Drives*. 1 ed. , Elsevier, 2005. ISBN: 9780080478975.
- [3] CHEN, S., HSU, C. “Optimal design of a three-pole active magnetic bearing”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 38, n. 5, 2, pp. 3458–3466, SEP 2002. ISSN: 0018-9464. doi: {10.1109/TMAG.2002.802709}.
- [4] MEEKER, D. C., MASLEN, E. H. “Analysis and Control of a Three Pole Radial Magnetic Bearing”. Martigny, Switzerland, ago. 2006.
- [5] DARBANDI, S. M., BEHZAD, M., SALARIEH, H., et al. “Linear Output Feedback Control of a Three-Pole Magnetic Bearing”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, v. 19, n. 4, pp. 1323–1330, AUG 2014. ISSN: 1083-4435. doi: {10.1109/TMECH.2013.2280594}.
- [6] KIANI, M., SALARIEH, H., ALASTY, A., et al. “Hybrid control of a three-pole active magnetic bearing”, *Mechatronics*, v. 39, pp. 28–41, NOV 2016. ISSN: 0957-4158. doi: {10.1016/j.mechatronics.2016.07.004}.
- [7] FRANCO, A. R. *Posicionamento de Eixo com Motor Mancais Magnético utilizando Controle H-inf*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, set. 2013.
- [8] GARCIA, J. D. G. *Critérios de Avaliação de Desempenho para Controladores Aplicados a Mancais Magnéticos*. Tese de doutorado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, jun. 2014.
- [9] DAVID, D. F. B., SANTISTEBAN, J. A., GOMES, A. C. D. N. “Modeling and Testing Strategies for an Interconnected Four-Pole Magnetic Bearing”, *Actuators*, v. 6, n. 3, SEP 2017. ISSN: 2076-0825. doi: {10.3390/act6030021}.

- [10] SCHWEITZER, G., BLEULER, H., MASLEN, E. H., et al. *Magnetic Bearings: Theory, Design, and Application to Rotating Machinery*. , Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 978-3-642-00496-4. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00497-1>.
- [11] ZHANG, W., ZHU, H. “Radial magnetic bearings: An overview”, *Results in Physics*, v. 7, pp. 3756–3766, 2017. ISSN: 2211-3797. doi: {10.1016/j.rinp.2017.08.043}.
- [12] STEPHAN, R. M., PINTO, F. A. N. C., GOMES, A. C. D. N., et al. *Mancais Magnéticos - Mecatrônica sem Atrito*. 1ª ed. , Editora Ciência Moderna, 2013. ISBN: 978-85-399-0479-2.
- [13] DAVID, D. D. F. B. *Levitação de Rotor por Mancais-Motores Radiais Magnéticos e Mancal Axial Supercondutor Auto-estável*. Tese de Doutorado, , 2000. Disponível em: <http://w2.files.scire.net.br/atricio/ufrj-pem_up1//THESIS/1462/pemufrj2000dscdomingosdefariasbritodavid.pdf>.
- [14] CARDOSO, N. N. *Controle Simultâneo de Velocidade e Posição em Mancais Motores Magnéticos*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, mar. 2003.
- [15] JUNIOR, R. N. *Controle por Tensão de Velocidade em Mancais Motores Magnéticos*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, abr. 2005.
- [16] RODRIGUES, L. S. *Controle Ótimo Descentralizado a dois Parâmetros para Mancais-Motores Magnéticos*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, abr. 2005.
- [17] GOMES, R. R. *Motor Mancal com Controle Implementado em um DSP*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, mar. 2007.
- [18] KAUSS, W. L. *Motor Mancal Magnético com Controle Ótimo implementado em um DSP*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, mar. 2008.
- [19] PINTO, P. H. S. *Comparações Teóricas e Práticas sobre Geometrias de Mancais Magnéticos*. Dissertação de mestrado, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, mar. 2018.

- [20] HSU, C. T., CHEN, S. L. “Exact linearization of a voltage-controlled 3-pole active magnetic bearing system”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 10, n. 4, pp. 618–625, JUL 2002. ISSN: 1063-6536. doi: {10.1109/TCST.2002.1014681}.
- [21] HSU, C.-T., CHEN, S.-L. “Nonlinear control of a 3-pole active magnetic bearing system”, *Automatica*, v. 39, n. 2, pp. 291 – 298, 2003. ISSN: 0005-1098. doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00207-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00207-8). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109802002078>>.
- [22] CHEN, S., CHEN, S., YAN, S. “Experimental validation of a current-controlled three-pole magnetic rotor-bearing system”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 41, n. 1, 1, pp. 99–112, JAN 2005. ISSN: 0018-9464. doi: {10.1109/TMAG.2004.839735}.
- [23] CHEN, S.-L., LIN, S.-Y. “Adaptive Imbalance Compensation for a Three-pole AMB System”. In: *12th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA)*, pp. 962–965, Kathmandu, Nepal, jun. 2016. IEEE.
- [24] CHEN, S.-L., WENG, C.-C. “Robust Control of a Voltage-Controlled Three-Pole Active Magnetic Bearing System”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, v. 15, n. 3, pp. 381–388, JUN 2010. ISSN: 1083-4435. doi: {10.1109/TMECH.2009.2027015}.
- [25] CHEN, S.-L., HSIAO, Y.-H. “Nonlinear High-gain Observer for a Three-pole Active Magnetic Bearing System”. In: *Proceedings of 2011 8th Asian Control Conference (ASCC)*, pp. 155–159, Kaohsiung, Taiwan, maio 2011. 8th Asian Control Conference (ASCC), IEEE.
- [26] CHEN, S.-L. “Nonlinear Smooth Feedback Control of a Three-Pole Active Magnetic Bearing System”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 19, n. 3, pp. 615–621, MAY 2011. ISSN: 1063-6536. doi: {10.1109/TCST.2010.2048903}.
- [27] CHEN, S.-L., MAO, C.-K. “Performance Evaluation of a Three-pole Magnetic Rotor-Bearing System”. In: *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM): Mechatronics for Human Wellbeing*, IEEE ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, pp. 662–667. IEEE, 2013. ISBN: 978-1-4673-5320-5.
- [28] CHEN, S.-L., HSIAO, Y.-H. “Smooth voltage controller and observer for a three-pole active magnetic bearing system”, *Mechanical Engineering*

Journal, v. 4, n. 5, SI, 2017. ISSN: 2187-9745. doi: {10.1299/mej.16-00718}.

- [29] CHEN, S.-L., LIU, K.-Y. “Sensorless Control for a Three-pole Active Magnetic Bearing System”, *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, v. 32, n. 8, pp. 720–725, AUG 2017. ISSN: 1054-4887.
- [30] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Fifth edition ed. , Prentice Hall, 2010. ISBN: 978-0-13-615673-4.
- [31] NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 6 ed. , LTC, 2016. ISBN: 978-85-216-2135-5.
- [32] DUTTON, K., THOMPSON, S., BARRACLOUGH, B. *The Art of Control Engineering*. , Addison Wesley Longman, 1997. ISBN: 0-201-17545-2.
- [33] CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. Third edition ed. New York, NY, USA, Oxford University Press, 1998. ISBN: 0195117778.
- [34] HESPANHA, J. P. *Linear Systems Theory*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, Sep. 2009. ISBN: 978-0-691-14021-6. Information about the book, an errata, and exercises are available at <http://www.ece.ucsb.edu/~hespanha/linearsystems/>.
- [35] ANDERSON, B. D. O., MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods (Dover Books on Engineering)*. , Dover Publications, Inc., 1990. ISBN: 978-0-486-45766-6.
- [36] MURRAY, R. M. “Control and Dynamical Systems Lecture Notes”. 2006. Disponível em: <<https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>>.
- [37] FITZGERALD, A. E., KINGSLEY JR., C., UMANS, S. D. *Máquinas Elétricas*. 6 ed. , Bookman, 2006. ISBN: 978-85-60031-04-7.
- [38] REITZ, J. R., MILFORD, F. J., CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. , Elsevier / Editora Campus, 1982. ISBN: 85-7001-103-2. Tradução da 5ª ed. - Foundations of Electromagnetic Theory, de Addison-Wesley Publishing, Inc.
- [39] BLEULER, H. *Decentralized control of magnetic rotor bearing systems*. Tese de Doutorado, ETH Zurich, , 1984. Diss. Techn.Wiss. ETH Zürich, Nr. 7573, 0000. Ref.: Schweitzer, G. ; Korref.: Mansour, M..

Apêndice A

Código-fonte em Matlab para Linearização das Forças de Relutância

```
% Este código será utilizado para obtenção da expressão analítica
% das forças de relutância horizontal e vertical
syms A n mu i1 i2 i3 x y h alpha1 alpha2 alpha3 beta1 beta2 beta3
i0 ix iy xnew ynew ixnew iynew theta;
clc;
%% Relutâncias
%R1 = (1/(mu *A))*sqrt((h*(sqrt(3)/2)-x)^2+((h/2)-y)^2);
%R2 = (1/(mu *A))*sqrt((h*(sqrt(3)/2)+x)^2+((h/2)-y)^2);
%R3 = (1/(mu *A))*sqrt(x^2+(h+y)^2);

% As relutâncias também podem ser aproximadas pelas expressões abaixo.
% 0 resultado é o mesmo
R1 = (1/(mu *A))*(h-x*sqrt(3)/2-y/2);
R2 = (1/(mu *A))*(h+x*sqrt(3)/2-y/2);
R3 = (1/(mu *A))*(h+y);
```



```

N = R1*R2 + R1*R3 + R2*R3;

%% Correntes nas bobinas
%i1= i0 + alpha1 * ix + beta1 * iy;
%i2 = i1;
%i2= i0 + alpha2 * ix + beta2 * iy;
%i3= i0 + alpha3 * ix + beta3 * iy;

%% Fluxos totais
phi1 = (n/N)*((R2 + R3)*i1 + R3*i2 - R2*i3);
phi2 = (n/N)*(-R3*i1 -(R1+ R3)*i2 - R1*i3);
phi3 = (n/N)*(-R2*i1 +R1*i2 +(R1 + R2)*i3);

%% Força horizontal e vertical
% Força horizontal e vertical (3 Polos)
%fx = (sqrt(3)/(4*mu*A))*((phi1)^2-(phi2)^2)
%fy = (1/(4*mu*A))*((phi1)^2 + (phi2)^2 - 2*(phi3)^2);

% Força horizontal e vertical (8 Polos)
fx = (mu * A * n^2/4)*(((i0+ix)/(h-x*cos(theta)))^2-...
((i0 - ix)/(h+x*cos(theta)))^2);
fy = (mu * A * n^2/4)*(((i0+iy)/(h-y*cos(theta)))^2-...
((i0 - iy)/(h+y*cos(theta)))^2);;

%% Derivadas Parciais de fx e fy
dfxdx = diff(fx,x);
dfxdy = diff(fx,y);
dfxdix = diff(fx,ix);
dfxdiy = diff(fx,iy);

```

```

dfydx = diff(fy,x);
dfydy = diff(fy,y);
dfydix = diff(fy,ix);
dfydiy = diff(fy,iy);

%% Ponto de equilibrio desejado
x = 0;
y = 0;
ix = 0;
iy= 0;

%% Avaliação das derivadas parciais no ponto de eq. acima
f1 = subs(dfxdx);
f2 = subs(dfxdy);
f3 = subs(dfxdix);
f4 = subs(dfxdiy);

f5 = subs(dfydx);
f6 = subs(dfydy);
f7 = subs(dfydix);
f8 = subs(dfydiy);

%% Expressão das forças Linearizadas avaliadas no pto de equilibrio
fxlin =f1 * xnew + f2* ynew + f3 * ixnew + f4* iynew;
fxlin = simplify(fxlin)
fylin =f5 * xnew + f6* ynew + f7 * ixnew + f8* iynew;
fylin = simplify(fylin)

```

Apêndice B

Código-fonte em Matlab para Controle Descentralizado

```
% Função que retorna o ganho de realimentação descentralizado
%
% Baseado na dissertação Leonardo Sodré Rodrigues-Controle Ótimo
% Descentralizado a 2 parâmetros para MMM e também na tese de Bleuler 1984.
%
% Fdn - ganho descentralizado após última iteração
% Fd - ganho descentralizado na 1ª iteração
% F - ganho centralizado
%
% delta - critério de parada, diferença entre norma matricial de duas
% iterações da matriz de ganho descentralizado
%
function [Fdn, delta, Jc, Jd]=descentralizado(x0,A,B,Q,R)
X0 = x0 * x0';

F = lqr(A,B,Q,R);
```

```

A0 = A-B*F;
B1 = B(:,1);
B2 = B(:,2);

C1 = [1 0 0 0;0 0 1 0];
C2 = [0 1 0 0;0 0 0 1];

%1º passo - usando matriz F centralizada p/ o algoritmo
X = lyap(A0,X0);
N = Q + F(1,:)'*R(1,1)*F(1,:) + F(2,:)'*R(2,2)*F(2,:) ;
Pd = lyap(A0',N);
F1 = inv(R(1,1))*B1'*Pd*X*C1' * inv(C1*X*C1');
F2 = inv(R(2,2))*B2'*Pd*X*C2' * inv(C2*X*C2');

Fd = [F1*C1;F2*C2];

x = 0; % variavel para fazer a contagem do loop de controle

Fdi = Fd; % Fdi = Fd da iteração
while x < 10

    %Fdi = Fd; % Fdi = Fd da iteração
    A0i = A-B*Fdi;
    Xi = lyap(A0i,X0);
    Ni = Q + Fdi(1,:)'*R(1,1)*Fdi(1,:) + Fdi(2,:)'*R(2,2)*Fdi(2,:) ;
    Pdn = lyap(A0i',Ni);
    F1i = R(1,1) \ B1'*Pdn*Xi*C1' /(C1*Xi*C1');
    F2i = R(2,2) \ B2'*Pdn*Xi*C2' /(C2*Xi*C2');
    Fdn = [F1i*C1;F2i*C2];

```

```

delta = norm(Fdi-Fdn);
Fdi = Fdn;
    if delta < 1e-5
        break
    end

x = x+1;
end

F;
Fd;
Fdn;

% Índice de desempenho
Jc = x0' * Pd * x0; %índice caso centralizado
Jd = x0' * Pdn * x0; %índice caso centralizado
end

```