



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
Faculdade de Engenharia Mecânica

**DIEGO ATAÍDE COUTO DE PAULA**

# **Balanceamento de Sistemas Rotativos sem Massas de Triagem**

CAMPINAS  
2023

**DIEGO ATAÍDE COUTO DE PAULA**

# **Balanceamento de Sistemas Rotativos sem Massas de Triagem**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientadora: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Prof. Dr. Diogo Stuani Alves

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DIEGO ATAÍDE COUTO DE PAULA E ORIENTADO PELA PROFA. DRA KÁTIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI

**CAMPINAS  
2023**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

P281b Couto de Paula, Diego Ataíde, 1985-  
Balanceamento de sistemas rotativos sem massas de triagem / Diego  
Ataíde Couto de Paula. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Kátia Lucchesi Cavalca Dedini.  
Coorientador: Diogo Stuani Alves.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade  
de Engenharia Mecânica.

1. Rotores. 2. Balanceamento de máquinas. 3. Otimização. I. Dedini, Kátia  
Lucchesi Cavalca, 1963-. II. Alves, Diogo Stuani, 1986-. III. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Balancing of rotating systems without trial masses

**Palavras-chave em inglês:**

Rotors

Machine balancing

Optimization

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Kátia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]

Gilberto Pechoto de Melo

Tobias Souza Morais

**Data de defesa:** 10-08-2023

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0001-1606-387X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7691154276129110>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

# **Balanceamento de Sistemas Rotativos sem Massas de Triagem**

Autor: Diego Ataíde Couto de Paula

Orientadora: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Prof. Dr. Diogo Stuaní Alves

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

**Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini Presidente**  
**Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM/DSI**

**Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo**  
**Universidade Estadual Paulista – UNESP/FEIS**

**Prof. Dr. Tobias Souza Morais**  
**Universidade Federal de Uberlândia – UFU/FEMEC**

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 10 de agosto de 2023.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho às minhas filhas, esposa, mãe, irmãs e especialmente a memória de meu querido pai Mateus Ferreira de Paula que sempre me incentivou nos estudos com muito entusiasmo, perseverança, amor e carinho.

## Agradecimentos

Este trabalho só foi possível de ser realizado com o suporte de algumas pessoas especiais a quem eu faço meus singelos agradecimentos.

À professora Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, por ter me aceito como aluno e ter me orientado e transmitido conhecimento e valores essenciais para realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Diogo Stuani Alves meu Coorientador que foi o precursor deste trabalho em sua tese de Doutorado, pela paciência e conhecimentos compartilhados ao longo desta jornada.

Ao meu amigo e colega nas disciplinas cursadas Amauri Coelho por ter me ajudado com o *Matlab* nos momentos mais difíceis e pela amizade prestada ao longo do curso.

À minha querida e estimada esposa, pelo companheirismo e força prestada nos momentos de agonia e desespero, principalmente, no começo do curso.

Às minhas filhas Maria e Sara por ser meu maior incentivo para superar as dificuldades e obstáculos da vida.

Aos meus amigos da Marinha do Brasil, CF (EN) Radé, CC (EN) Claudio, CC (EN) Alceu, CC (EN) De Cunto, CT (EN) Antenor, CT (EN) Kletson, Regina Calixto, Fábio Moreau e José Carlos Pelegrina pela ajuda na realização de atividades afetas ao curso de mestrado.

Aos colegas do LAMAR, Vítor, Iago, Nathali, Thales, Laís Visnardi, Natália Akemi, Arthur, Matheus e em especial ao Douglas que sempre me dava dicas de programação que ajudava meus programas a convergirem no final das contas.

À Marinha do Brasil que proporcionou esta oportunidade de ficar 2 (dois) anos dedicados exclusivamente na realização deste trabalho.

Adicionalmente, a Deus por sempre nos momentos de desespero mostrar uma luz e uma saída para cada desafio e obstáculo superado nesta jornada tão desafiadora e prazerosa.

## Resumo

Máquinas rotativas são utilizadas em diversas atividades industriais com grande ênfase na geração de energia, nas quais uma série de problemas característicos podem surgir de um sistema rotativo sobre suportes flexíveis ou rígidos. Neste sentido, modelos matemáticos representando as características dinâmicas dos rotores têm sido desenvolvidos para simular as suas condições de operação. Contudo, uma simples consideração do comportamento do eixo não é suficiente para representar a complexidade desses maquinários. Portanto, outros componentes como os mancais também devem ser considerados. Os mancais hidrodinâmicos possuem fluido lubrificante entre suas partes rígidas para eliminar o atrito seco e diminuir as temperaturas de operação e o desgaste das superfícies. Além de compreender as características do rotor, a melhoria do desempenho e a redução de custos são altamente desejáveis. Portanto, a detecção e identificação de falhas são fundamentais. O desbalanceamento é a causa mais comum de vibrações indesejáveis em sistemas rotativos. Mesmo pequenas massas desbalanceadas podem causar elevadas amplitudes de vibração devido à sua relação quadrática com a velocidade de rotação, o que pode ser um impedimento significativo para a operação segura da máquina. Portanto, o balanceamento é essencial para qualquer equipamento. Neste cenário, a modelagem de sistemas rotativos suportados por mancais hidrodinâmicos torna-se particularmente interessante na análise destes sistemas, bem como na solução da equação de Reynolds. A Função Resposta ao Desbalanceamento (FRD) é usada diretamente para calcular os parâmetros do desbalanceamento. Para isso, métodos de otimização são empregados para minimizar as diferenças entre as vibrações numéricas adicionadas pelo ruído (representando testes experimentais) e aquelas obtidas pela solução numérica. A metodologia proposta tem o potencial de eliminar o uso de massas de triagem durante tarefas de balanceamento em campo, economizando tempo precioso de manutenção e é adequada para balanceamento multiplano. A metodologia apresenta boa convergência, minimizando os erros encontrados para todos os casos analisados.

**Palavras Chave:** Máquinas Rotativas, Balanceamento, Identificação do Desbalanceamento, Técnicas de Otimização.



## Abstract

Rotating machines are used in several industrial activities with great emphasis on energy generation, in which a series of characteristic problems can arise from a rotating system on flexible, or rigid, supports. In this sense, mathematical models representing the dynamic characteristics of rotors have been developed to simulate their operating conditions. However, a simple consideration of the shaft behaviour is not enough for representing the complexity of this type of machinery. Therefore, other components such as bearings must be also considered. Hydrodynamic bearings have lubricating fluid between its rigid parts in order to eliminate dry friction and decrease operating temperatures and wear of the surfaces. In addition to understanding the rotor's characteristics, performance improvement and cost reduction are highly desirable. For these, fault detection and identification are paramount. Unbalance is the most common cause of undesirable vibrations in rotating systems. Even small unbalance masses can cause high vibration amplitudes due to its quadratic relationship with the rotating speed, which may be a significant impediment to the safe operation of the machine. Therefore, balancing is essential for any equipment. In this scenario, the modelling of rotating systems supported by hydrodynamic bearings becomes particularly interesting in the analysis of these systems, as well as the solution of the Reynolds equation. The Unbalance Response Function (FRD) is directly used to calculate the unbalance parameters. For this, optimization methods are employed to minimize the differences between the numerical vibrations added by noise (representing experimental tests) and just numerical ones. The proposed methodology has the potential to eliminate the use of trial masses during field balancing tasks, saving precious maintenance time, and is suitable for multi-plane balancing. The methodology presents good convergence, minimizing the errors found for all analyzed cases.

**Key Word:** Rotating Machines, Balancing, Unbalance Identification, Optimization Techniques.

## Lista de Ilustrações

Figura 1: Sistema de coordenadas utilizado por McVaugh e Nelson (1976).....	43
Figura 2: Bancada de testes do LAMAR. ....	45
Figura 3: Princípio de Funcionamento de um Mancal Hidrodinâmico (Mendes, 2011).....	46
Figura 4: Curva de Guembel e Locus.....	47
Figura 5: Representação das forças.....	49
Figura 6: Representação linear do mancal hidrodinâmico. ....	50
Figura 7: Ponto de mínimo.....	60
Figura 8: Bacias de atração (Mathworks, 2022). ....	61
Figura 9: Sistema rotativo composto por um disco.....	65
Figura 10: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3).....	66
Figura 11: Função resposta ao desbalanceamento do Disco (nó 9). ....	66
Figura 12: Diagrama de Campbell .....	67
Figura 12: Função resposta ao desbalanceamento com <i>awgn-40</i> para o mancal 1 e disco.....	67
Figura 13: Órbitas do Mancal 1 (nó 3) para velocidades de 50, 90, 147 e 250 rad/s.....	68
Figura 14: Órbitas do Disco (nó 9) para velocidades de 50, 90, 147 e 250 rad/s. ....	69
Figura 15: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 3) e Disco (nó 9) para 147 rad/s. ....	69
Figura 16: Modelo de sistema rotativo contendo dois discos (Alves, 2018). ....	70
Figura 17: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3) – fases a 180°. ....	71
Figura 18: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) – fases a 180°. ....	72
Figura 20: Diagrama de Campbell .....	72
Figura 19: FRD com <i>awgn-40</i> para o mancal 1 e disco 1 - fases a 180°. ....	73
Figura 20: Fator de amortecimento modal do sistema rotativo composto por dois discos. ....	74
Figura 21: FRD do Mancal 1 (nó 3) – Nós 6-12 (velocidades de 217 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	77
Figura 22: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-12 (velocidades de 217 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	77
Figura 23: FRD do Mancal 1 (nó 3) – Nós 6-12 (velocidades de 190, 240 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	78

Figura 24: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-12 (velocidades de 190, 240 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	78
Figura 25: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3) - fases a 90° .....	79
Figura 26: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) - fases a 90° .....	79
Figura 27: FRD com <i>awgn-40</i> para o mancal 1 e disco 1- fases a 90° .....	80
Figura 28: Órbitas do Mancal 1 (nó 3) para velocidades de 50, 120, 160, 217, 260 e 314 rad/s. ....	81
Figura 29: Órbitas dos Discos (nós 7 e 13) para as velocidades de 50, 120, 160, 217, 260 e 314 rad/s. ....	81
Figura 30: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 3) e Discos (nós 7 e 13) para 217 rad/s. ....	82
Figura 31: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3) – fases a 0° .....	83
Figura 32: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) - fases a 0° .....	83
Figura 33: FRD com <i>awgn-40</i> para o mancal 1 e disco 1 - fases a 0° .....	84
Figura 34: Modelo de Rotor com 3 discos pelo MEF. ....	85
Figura 35: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 2).....	86
Figura 36: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7). ....	86
Figura 39: Diagrama de Campbell .....	87
Figura 37: FRD com <i>awgn-40</i> para o mancal 1 e disco 1, nós 6-11-16.....	88
Figura 38: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 6-13-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	90
Figura 39: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-13-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	90
Figura 40: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 6-11-18. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	91
Figura 41: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-18. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	91
Figura 42: Órbitas do Mancal 1 (nó 2) para velocidades de 30, 57, 90 e 110 rad/s.....	92
Figura 43: Órbitas dos Discos (nós 7,12 e 17) para as velocidades de 30, 57, 90 e 110 rad/s. ....	92
Figura 44: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 2) e Discos (nós 7, 12 e 17) para 57 rad/s.....	93
Figura 45: Fator de amortecimento modal do sistema rotativo composto por três discos. ....	93

Figura 46: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 57 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	94
Figura 47: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 57 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	95
Figura 48: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 32, 57 e 90 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	95
Figura 49: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 32, 57 e 90 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	96
Figura 50: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 30, 57, 90 e 110 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) direita sistema balanceado. ....	96
Figura 51: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 30, 57, 90 e 110 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	97
Figura 52: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 4-14-19. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	99
Figura 53: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 4-14-19. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	99
Figura 54: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 4-14-19 awgn-40. ....	100
Figura 55: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 9-10-15. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	101
Figura 56: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 9-10-15. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	101
Figura 57: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 9-10-15 awgn-40. ....	102
Figura 58: Modelo de Rotor com 3 discos por elementos finitos com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10-16. ....	102
Figura 59: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 10-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado. ....	104
Figura 60: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 10-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.....	104
Figura 61: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 10-16 awgn-40.....	105

## Lista de Tabelas

Tabela 1 – Detalhes do Sistema rotativo composto por um disco .....	65
Tabela 2 – Parâmetros dos mancais do Sistema rotativo composto por um disco.....	65
Tabela 3 – Valores encontrados e erros para os nós 8 e 10 com <i>awgn-40</i> .....	68
Tabela 4 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo dois discos (Alves, 2018). ....	70
Tabela 5 – Parâmetros dos mancais do modelo de sistema rotativo contendo dois discos (Alves, 2018).....	71
Tabela 6 – Valores encontrados e erros para os nós 6 e 12 sem adicionar o ruído.....	72
Tabela 7 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para <i>awgn-40</i> - fases a $180^\circ$ . ....	73
Tabela 8 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para <i>awgn-40</i> - fases a $180^\circ$ para as velocidades de 190, 240 e 270 rad/s.....	76
Tabela 9 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para <i>awgn-40</i> - fases a $180^\circ$ para as velocidades de 217 e 270 rad/s.....	76
Tabela 10 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para <i>awgn-40</i> - fases a $90^\circ$ . ....	80
Tabela 11 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para <i>awgn-40</i> - fases a $0^\circ$ . ....	84
Tabela 12 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo três discos. ....	85
Tabela 13 – Parâmetros dos mancais do sistema rotativo com 3 discos.....	86
Tabela 14 – Valores encontrados e erros para o nós 6, 11 e 16 sem adição de ruído, para as combinações das velocidades 57/510 rad/s e 231/510 rad/s. ....	87
Tabela 15 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-11-16, 8-13-18, 6-11-18 e 6-13-16, 6-13-18, 8-11-16, 8-11-18 e 8-13-16 para <i>awgn-40</i> . ....	89
Tabela 16 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 4, 14 e 19 para <i>awgn-40</i> .....	98
Tabela 17 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 9, 10 e 15 para <i>awgn-40</i> .....	100
Tabela 18 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo três discos com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10-16. ....	103
Tabela 19 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 10 e 16 para <i>awgn-40</i> .....	103

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### Letras Latinas

$[A]$	matriz ( $m \times n$ ) do sistema linear de equações de restrição
$A$	Área da seção transversal do elemento
$[Aee]$	Matriz do espaço de estados
$\{b\}$	vetor com o valor das restrições com dimensão ( $m \times 1$ )
$B(\chi)$	Função Barreira
$\{c\}$	Vetor de constantes reais de dimensão ( $1 \times n$ )
$c$	Coefficiente de Penalização
$[C]$	Matriz Global de Amortecimento
$Cr$	Folga Radial do Mancal
$D$	Diâmetro do Mancal
$D_k$	Matriz Hessiana pela fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
$d_{de}$	Diâmetro externo do disco
$d_{di}$	Diâmetro interno do disco
$d_k$	Direção de descida
$\{f_{ee}\}$	Vetor de forças espaço de estado
$\{f(t)\}$	Vetor de forças externas
$e$	Excentricidade
$E$	Módulo de elasticidade do material
$f_d$	Força de desbalanceamento
$f_{dy}$	Força de desbalanceamento na direção y
$f_{dz}$	Força de desbalanceamento na direção z
$f_h$	Força Hidrodinâmica no mancal
$f_r$	Força Radial no mancal
$f_t$	Força Tangencial no mancal
$f(\chi)$	Função objetivo pela técnica dos mínimos quadrados
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$[G]$	Matriz Global Giroscópica
$[G_d]$	Matriz giroscópica do disco
$[G_v]$	Matriz do efeito giroscópico do elemento de viga
$g(\chi)$	Vetor de restrição de desigualdade
$h$	Espessura do filme de óleo
$h(\chi)$	Vetor de restrição de igualdade
$k$	Fator de forma do cisalhamento

$[K_v]$	Matriz de rigidez do elemento de viga
$I$	Sistema de coordenadas fixo ou inercial (X, Y, Z)
$I_x$	Momentos de inércia polar
$I_y$ e $I_z$	Momentos de inércia radiais
$lb$	limite de fronteira inferior
$L$	Sistema de coordenadas rotacional (x, y, z)
$L_d$	Comprimento do disco
$L_m$	Comprimento do Mancal
$L_r$	Comprimento do Rotor
$L_v$	Comprimento do elemento de viga
$m$	Massa desbalanceada
$[M]$	Matriz Global de Massa
$m_d$	Massa do disco
$[M_d]$	Matriz de massa do elemento de disco
$me$	Momento de desbalanceamento
$me_{max}$	Momento de desbalanceamento máximo
$[M_{Rd}]$	Matriz de inércia de rotação do elemento de disco
$[M_{RV}]$	Matriz de inércia de rotação do elemento de viga
$[M_{Td}]$	Matriz de inércia de translação do elemento de disco
$[M_{TV}]$	Matriz de inércia de translação do elemento de viga
$[M_v]$	Matriz de massa do elemento de viga
$N$	Número de elementos
$nd$	Contador para o p-ésimo desbalanceamento presente no sistema
$p$	pressão
$\{q_{ee}\}$	Vetor dos graus de liberdade do espaço de estado
$\{q(t)\}$	Vetor dos graus de liberdade
$\{\bar{q}(t)\}$	Amplitude de vibração adicionada o ruído
$R_i$	Trabalho das forças não conservativas
$r_{ve}$	Raio externo do elemento
$R_m$	Raio do mancal
$r(\chi, c)$	Função penalizadora
$x, \theta$ e $z$	Coordenadas axial, circunferencial e vertical do mancal
$\{x\}$	Vetor das variáveis e possui dimensão (n x 1)
$\{x_0\}$	Vetor com ponto de partida inicial
$t$	tempo
$T_i$	Energia cinética
$ub$	limite de fronteira superior
$U_i$	Energia de deformação
$U_i, V_i$ e $w_i$	Velocidades do lubrificante nas direções x, $\theta$ e z
$V$	Velocidade tangencial linear da massa

$W_m$	Carga do Rotor
$W$	Carregamento no mancal

## Letras Gregas

$\vartheta$	Coefficiente de Poisson
$\omega$	Velocidade de rotação de precessão
$\theta$	Ângulo de rotação própria
$\Omega$	Velocidade de rotação do eixo
$\alpha$	Coefficiente de proporcionalidade para a massa
$\beta$	Coefficiente de proporcionalidade para a rigidez
$\rho_s$	Densidade do material
$\Phi$	fator de cisalhamento
$\rho$	Densidade do lubrificante
$\mu$	viscosidade do Lubrificante
$\varepsilon$	Excentricidade Adimensional
$\phi$	Ângulo de atitude
$\lambda$	Auto Valor
$\delta$	Ângulo de fase da massa desbalanceada
$\chi$	Vetor com os parâmetros do desbalanceamento
$\eta$	Variável auxiliar para transformar uma função objetivo não linear em uma função objetivo linear
$\alpha$	Passo na direção de Descida

## Siglas

AWGN – Add White Gaussian Noise (adição do ruído gaussiano branco)

BFGS - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

FRD - Função Resposta ao Desbalanceamento

FRF - Função Resposta em Frequência

LP – Linear Programming (Programação Linear)

MEF – Método dos Elementos Finitos

MINLP - Mixed-Integer Nonlinear Programming (Programação Não Linear Misto Inteiro)

MILP - Mixed-Integer Linear Programming (Programação Linear Misto Inteiro)

MW – Mega-Watts



NLP - Nonlinear Programming (Programação Não Linear)

OA - Outer Approximation

RPM – Rotação por Minuto

## Sumário

1	<i>INTRODUÇÃO</i> .....	20
2	<i>REVISÃO DA LITERATURA</i> .....	26
2.1	Modelo do Sistema Rotativo pelo Método dos Elementos Finitos .....	26
2.2	Mancais do Tipo Hidrodinâmicos .....	29
2.3	Balanceamento de Máquinas Rotativas.....	32
3	<i>TEORIA E MODELAGEM MATEMÁTICA</i> .....	42
3.1	Modelo do Sistema Rotativo pelo Método dos Elementos Finitos .....	42
3.2	Modelo de Mancais do Tipo Hidrodinâmicos.....	46
3.3	Solução da Equação de Movimento .....	52
3.3.1	Domínio da Frequência .....	52
3.3.2	Domínio do Tempo .....	53
3.4	Método de Balanceamento Proposto.....	53
3.4.1	Solução do Problema de Programação Não Linear (NLP) .....	57
3.4.2	Considerações Finais.....	61
4	<i>RESULTADOS E DISCUSSÕES</i> .....	63
4.1	Sistema Rotativo composto por 1 disco .....	64
4.2	Sistema Rotativo composto por 2 discos.....	69
4.2.1	Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas defasadas de 180°	71
4.2.2	Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas defasadas de 90°	78
4.2.3	Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas na mesma fase	82
4.3	Sistema Rotativo composto por 3 discos.....	85
4.4	Sistema Rotativo composto por 3 discos com parâmetros do desbalanceamento ao longo do rotor, fora dos discos .....	98
4.4.1	Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 4, 14 e 19...	98
4.4.2	Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 9, 10 e 15.	100
4.4.3	Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10 e 16.....	102

5	<i>CONCLUSÃO</i> .....	106
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>108</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Máquinas rotativas são empregadas em numerosas atividades industriais, com maior ênfase na produção de energia elétrica. Há uma enorme variedade de finalidades que se refletem na complexidade desses maquinários, que podem ser compostos de vários rotores, junção entre motor de acionamento e eixo, acoplamentos coaxiais entre eixos, mancais de rolamento, hidrodinâmicos ou magnéticos e selos de fluxo.

Desde meados do século XIX, a análise da dinâmica de rotores relacionada às funcionalidades tecnológicas vem sendo desenvolvida, quando o acréscimo da velocidade de rotação dos itens demanda a inserção deste tipo de estudo na análise do comportamento dinâmico das máquinas rotativas.

Rankine (1869) realizou um estudo dedicado unicamente à dinâmica de rotores; cujo tema abordado foi o aumento das vibrações próximo a frequência natural da máquina rotativa, a saber, sua velocidade crítica. Contudo, Rankine inferiu que o emprego de rotores além da velocidade crítica não seria possível. Esse paradigma foi superado somente após De Laval, por meio de experimentos, e Föppl e Jeffcott, de modo teórico, compreenderam assertivamente o funcionamento do rotor em condições supercríticas.

A partir disso iniciou-se a procura por soluções economicamente viáveis, que proporcionem aumento da potência, otimização de massa, elevação das velocidades e da confiabilidade desse tipo de equipamento. Diante desse cenário, o monitoramento de vibrações durante a operação das máquinas rotativas passou a ser empregado para avaliar se seu modo de funcionamento é estável ao longo do tempo. Dessa forma, as manutenções preventivas e preditivas são essenciais para atender as exigências no mercado.

As principais áreas da engenharia mecânica, quais sejam, dinâmica, transferência de calor, mecânica dos fluidos, controle e mecânica dos sólidos são utilizadas em sistemas rotativos, constituindo um campo de amplo interesse, além de ter profundidade e abrangência.

Portanto, um item rotativo sustentado em suportes flexíveis e transferindo potência gera uma gama de limitações características que são encontradas em numerosos equipamentos, sejam turbinas de grande ou pequeno porte, bombas, compressores, turbo-geradores ou motores. Na busca de melhor precisão, têm sido criados modelos matemáticos que

representam as causas e conseqüências dessas limitações para simular os ambientes de trabalhos dos sistemas rotativos.

Na análise desse tipo de máquina, além de examinar o desempenho dinâmico do rotor, deve-se considerar os outros itens do sistema rotativo, tais como, os mancais. Os mancais são geralmente utilizados para permitir movimento relativo entre as partes sólidas, impedindo contato direto.

O mancal hidrodinâmico tem fluido lubrificante introduzido entre as partes sólidas, de maneira a trocar o atrito seco pelo atrito viscoso e decrescer a temperatura de operação e a deterioração das superfícies, pois há uma diminuição do coeficiente de atrito. Normalmente são caracterizados por superfícies curvilíneas, sendo que a do tipo cilíndrica é amplamente empregada; neste caso, o mancal acomoda o eixo dentro de si. O fornecimento do lubrificante em local adequado é realizado no mancal por meio de rasgos ou furos.

A sustentação da teoria clássica da lubrificação hidrodinâmica é a equação diferencial parcial de segunda ordem denominada Equação de Reynolds, que foi desenvolvida em 1886 por Osborne Reynolds (1886). Essa equação indica que, para sustentar o carregamento aplicado, os mancais dependem do movimento translacional e do movimento rotacional do eixo, criando deste modo a distribuição de pressões no filme de fluido. As pressões no filme de óleo são geradas devido a velocidade relativa não nula entre o mancal e o eixo.

Adicionalmente, eixo e mancal, geralmente, não giram concêntricos. A excentricidade do centro geométrico do eixo no que tange o centro geométrico do mancal, em adição à compressão do filme de óleo, possibilita que o giro do eixo desloque as camadas de fluido numa cunha, ou seja, de uma área de maior para uma área menor, criando assim, um gradiente de pressões. A espessura do lubrificante tanto quanto a posição de excentricidade do eixo, são determinadas pela força aplicada ao mancal naquele momento. Portanto, a posição de excentricidade do eixo é ajustada iterativamente até que exista o balanço dinâmico entre a força aplicada e a pressão criada no filme de fluido convergente.

Contudo, o estudo de sistemas rotativos, levando em conta a flexibilidade dos mancais, aconteceu apenas com Smith (1933). Deste então, a lubrificação de mancais passou a ser representada por duas características singulares: a rigidez e o amortecimento. As forças hidrodinâmicas são linearizadas em relação ao ponto de equilíbrio do eixo dentro do mancal e, portanto, é possível obter os coeficientes de amortecimento e rigidez.

Além de dominar o funcionamento dinâmico dos rotores, há uma crescente necessidade pelo aumento da performance do sistema e diminuição dos gastos de funcionamento, onde a detecção e identificação de falhas agem de maneira primordial. Conforme Chen *et al.* (1999), a detecção de falhas é interpretada como admitir que uma falha ocorreu, ao passo que a identificação de falha, é obter a razão, o tipo, a intensidade e a posição da falha.

Métodos avançados de detecção são fundamentados em modelagem de sinais e processamentos matemáticos e em métodos de teoria de sistema e modelos de processos operacionais para caracterizar os indicativos da falha. Métodos de identificação empregam uma correlação falha-sintoma utilizando computação de elevado desempenho, inteligência artificial e métodos estatísticos.

A saída mais empregada para detecção e identificação de falhas em sistemas dinâmicos é a vibração. Programas de manutenções preditiva e preventiva por meio do monitoramento de vibrações têm-se mostrado eficientes economicamente, de acordo com Musynka (2005).

As medições de vibrações possuem técnicas de identificação de falhas que seguem dois enfoques: a embasada em sinais e a embasada em modelo. A fundamentada em sinais obtém propriedades qualitativas do sinal coletado, possibilitando ao investigador reconhecer a falha. A fundamentada em modelo emprega a modelagem matemática do rotor, em conjunto com as informações de vibração coletadas, para reconhecer a falha, contudo a identificação é vulnerável à qualidade da modelagem.

A formulação dos inúmeros tipos de falhas, como, desalinhamento, ovalização de mancais, empenamento de eixos, desbalanceamento, trincas, desgaste entre outras, depende da correta compreensão dos fenômenos que ocorrem em sistemas rotativos, assim como da reação dada pelo equipamento em razão de cada acontecimento. Desse ponto em diante, é preciso caracterizar a falha por meio de sua detecção, identificação e isolamento de maneira a eliminar posteriores adversidades funcionais e econômicas, tendo em vista que a identificação antecipada e a análise de sua severidade podem diminuir o período inativo do equipamento e o tempo despendido com manutenção corretiva, aumentando a estimativa de utilização e impedindo incidentes e falhas inesperadas.

A falha mais comum encontrada em sistemas rotativos é o desbalanceamento excessivo, tendo em vista que a montagem de múltiplos itens conduz conseqüentemente a essa anomalia. O desbalanceamento é constituído de forças que são funções harmônicas em relação ao tempo e sua intensidade tem relação quadrática com a velocidade de rotação. Desta feita, inclusive

pequenos valores de momentos de desbalanceamento são capazes de ocasionar elevados níveis de vibração em elevadas rotações, caracterizando um óbice significativo para o funcionamento da máquina. Portanto, balancear o equipamento é essencial para o funcionamento seguro.

Balancear um rotor implica na remoção ou inserção de massas de reparação pela extensão do eixo, de maneira que as forças inerciais criadas pela aceleração dessas massas sejam suficientes para compensar eventuais forças inerciais causadas pelas massas intrínsecas ao sistema rotativo. Dessa forma haverá redução das amplitudes de vibração. Em uma máquina real existem locais especiais, chamados planos de balanceamento, que possibilitam a remoção ou inserção de massas de balanceamento.

Na dinâmica de rotores são tradicionalmente, usados dois métodos de balanceamento: modal e por coeficientes de influência. Massas de reparação são adicionadas nos planos de balanceamento de maneira a assegurar o decréscimo da vibração em pontos específicos do rotor, para o método dos coeficientes de influência. Por outro lado, no balanceamento modal, os parâmetros do desbalanceamento para cada modo estudado são avaliados particularmente, de modo a diminuir a vibração de cada modo.

Normalmente, as técnicas de balanceamento empregam massas de testes para a obtenção dos coeficientes de influência. Com esse propósito, as massas são adicionadas no sistema rotativo e seu resultado é notado. Massas de triagem são utilizadas para mensurar ou calcular as deformações modais do sistema, no método modal. Entretanto, se houver uma modelagem teórica com exatidão, o balanceamento é capaz de ser obtido de modo direto das informações de vibração coletadas sem a utilização de massas de triagem; desta forma, evitam-se, grandes períodos de parada de equipamento e dispendiosos períodos de *set-up* para adicionar e remover as massas de triagem.

Os locais para coleta de vibrações estão reiteradamente sujeitos às posições dos mancais. As quantidades de vibrações mensuradas normalmente são menores que à quantidade de combinações independentes de balanceamento; desta forma é preciso, o emprego de procedimentos de otimização.

O presente trabalho visa continuar o desenvolvimento do método de balanceamento, em um plano desenvolvido por Alves (2018) e Alves e Cavalca (2021), que não emprega massas de triagem e pode ser aplicado apenas em uma rotação da máquina para balancear o primeiro modo.

A proposta é expandir este método para o balanceamento em 2 e 3 planos, utilizando sistemas rotativos compostos por 2 e 3 discos aumentando a quantidade de itens não nulos do vetor de forças da equação de movimento do sistema rotativo e conseqüentemente há um acréscimo na quantidade de restrições associadas com o processo de otimização da função objetivo. Este trabalho utiliza a teoria de Mancal curto desenvolvida por Dubois e Ocvirk (1953) para resolução da equação de Osborne Reynolds (1886) através de coeficientes lineares, conforme Krämer (1993).

Utiliza-se método numérico dos elementos finitos (MEF) para modelagem matemática do rotor. Assim sendo, o desbalanceamento será analisado como uma força virtual e o vetor de forças consiste na soma de cada elemento das forças analisadas: força de desbalanceamento, força peso, etc.

Tendo em vista que a quantidade de equações (quantidade de locais de aquisição de vibração) é inferior que a totalidade dos graus de liberdade do sistema, não há solução singular e é preciso a utilização de algum método de busca, tal como, o método de barreiras, para a caracterização dos indicadores do desbalanceamento. A estratégia corresponde em obter a resposta que minimize a diferença entre a vibração teórica adicionada pelo ruído (equivalente a experimental) e a vibração computada numericamente pelo modelo. Deste modo, no momento em que a diferença for mínima, a chance de determinar acertadamente a posição e a intensidade do desbalanceamento é maximizada.

A revisão bibliográfica dos assuntos afetos a este trabalho é realizada no Capítulo 2. Um histórico sobre a dinâmica de sistemas rotativos e a forma com que os modelos matemáticos foram concebidos até os rotores serem modelados pelo MEF é mostrado. Na sequência, são tratados o início do modelo de mancais hidrodinâmicos, assim como o aperfeiçoamento de sua representação na dinâmica de sistemas rotativos com o passar dos anos. Esse capítulo ainda demonstra a evolução dos principais métodos de balanceamento. Adicionalmente, os trabalhos mais relevantes, que tratam das técnicas de identificação de falhas em sistemas rotativos, com ênfase na identificação de desbalanceamento rotativo são apresentados.

A metodologia empregada para desenvolvimento do trabalho é demonstrada no Capítulo 3. Portanto, a modelagem dos sistemas rotativos pelo MEF é exposta no início do capítulo. Após isso, apresenta-se o modelo dos mancais hidrodinâmicos, a demonstração da equação de Reynolds e seu equacionamento pela teoria de mancal curto desenvolvida por Dubois e Ocvirk (1953), além da representação deste tipo de mancal por coeficientes lineares



de amortecimento e rigidez. Na sequência é abordada a solução do problema dinâmico de sistemas rotativos por meio da utilização dos coeficientes lineares, conforme Krämer (1993). Em seguida, mostra-se a obtenção da equação de movimento no domínio da frequência para Função Resposta ao Desbalanceamento e no domínio do tempo com a utilização do espaço de estados empregando o algoritmo de Runge-Kutta disponível na função *ode15s* do programa *Matlab*®. Em seguida, os métodos de otimização empregados para a caracterização do desbalanceamento rotativo são apresentados, nos quais a meta é a minimização da diferença entre as vibrações teóricas adicionadas pelo ruído (representando medições) e aquelas obtidas pela solução numérica.

Os resultados alcançados no trabalho são indicados no Capítulo 4. Primeiramente, os resultados para identificação do desbalanceamento para sistemas rotativos compostos por 1 disco e 2 dois discos são apresentados. Na sequência, aumentando o nível de complexidade, o sistema rotativo é modelado como um rotor com 3 discos, onde alguns casos são simulados e constata-se a eficácia do procedimento em efetuar o balanceamento sem massas de triagem em vários planos de balanceamento.

Adicionalmente, o Capítulo 5 mostra as conclusões mais significativas conseguidas pelos trabalhos desenvolvidos e observações para seguimento desse trabalho.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Modelo do Sistema Rotativo pelo Método dos Elementos Finitos

Os progressos na fabricação de turbo máquinas e as dificuldades enfrentadas para o aperfeiçoamento e a utilização de máquinas rotativas estão conectados à história da dinâmica de rotores. Dimarogonas (1992), Childs (2002), Vance (2010), Rao (2011) e Alves (2018) realizaram uma vasta e relevante pesquisa histórica a respeito do assunto.

O primeiro equipamento rotativo conhecido foi idealizado por Heron de Alexandria no ano de 62 DC, detalhando, em seu livro “Pneumática”, um mecanismo nomeado de Eolípila, capaz de rotacionar usando vapor e usado para transformar energia térmica em energia mecânica. Essa criação, que é a primeira turbina por reação, não produzia trabalho aproveitável, tendo em vista a não geração de vapor em escala suficientemente alta.

Os avanços tecnológicos durante a idade média, por sua vez, foram baseados, principalmente, no método da tentativa e erro, sem um embasamento exato do comportamento dos episódios que conduziam suas invenções. A partir do surgimento do Renascimento, e mais tarde com a Revolução Científica, esse panorama alterou-se, devido ao surgimento de cientistas renomados. Personagens como Daniel Bernoulli, Galileu Galilei, Gotfried Leibniz, Isaac Newton, Joseph Louis Lagrange, Leonardo da Vinci, Leonhard Euler, Rene Descartes, Robert Boyle, entre outros, contribuíram de forma relevante com conceitos em matemática, física e engenharia, que seriam empregados futuramente como fundamentos da dinâmica de rotores.

Os motores de movimento alternado criados por Denis Papin até o ano de 1788 eram máquinas a vapor, utilizadas geralmente para o bombeamento de água. A eficiência das máquinas existentes foi melhorada por James Watt, utilizando-se das novas descobertas na área térmica, de onde foi possível transformar o movimento alternado dos motores térmicos em movimento rotacional. Esse avanço foi primordial para a revolução industrial, tendo em vista a elevada demanda por motores que fossem capazes de gerar movimento rotacional para mecanizar a indústria.

Adicionalmente, com o surgimento dos movimentos rotativos, com o advento das turbinas a vapor, empregadas para movimentar moendas de grãos e serras circulares, e o

aperfeiçoamento das rodas d'água, as análises em dinâmica de sistemas rotativos tornaram-se fundamentais.

Os conceitos de vibração de vigas, membranas e placas foram bem fundamentados antes da metade do século XIX; contudo, era pouco ou quase escasso o conhecimento sobre de vigas atuando como eixos e, portanto, capazes de rotacionar e transferir potência. O primeiro trabalho dedicado especificamente à análise de rotores foi publicado no ano de 1869 por Rankine (1869). O efeito giroscópico não foi considerado nesse trabalho e assumiu-se que se a força de inércia causada por uma deformação virtual fosse menor que a força de restauração elástica do eixo, não ocorreria o movimento de precessão, chegando a conclusão de que o sistema acima da velocidade crítica se comportava de forma instável.

Em 1883, De Laval, desenvolveu a primeira turbina a vapor conhecida, entusiasmado pela necessidade de fabricar um equipamento capaz de separar a nata do leite. Esse modelo desenvolvido, com um disco instalado em um eixo flexível e fino alcançava rotações maiores que à velocidade crítica, ao contrário do que Rankine acreditava.

As frequências naturais de uma viga em vibração transversal são iguais às velocidades críticas de um eixo suportado em mancais, conforme relata Dunkerly (1894). Dessa feita, foi sugerida uma formulação para a obtenção das velocidades críticas para sistemas rotativos com inúmeros volantes e discos para diferentes configurações de sistemas rotativos. Föppl (1895) foi o primeiro a elaborar uma solução analítica representativa para o tipo de máquina rotativa sugerida por De Laval, onde foi analisado o comportamento do sistema rotativo ao desbalanceamento para velocidades aquém, durante e superior a velocidade crítica.

A partir disso, as turbomáquinas foram capacitadas a trabalhar em velocidades superiores a crítica; contudo, as anomalias causadas por vibrações excessivas persistiam, incentivando cada vez mais o estudo do comportamento dinâmico de sistemas rotativos. Uma análise das velocidades críticas e do movimento de precessão em presença de amortecimento foi efetuada por Jeffcott (1919). A gravidade foi ignorada e uma força de amortecimento viscoso foi proposta na realização de uma avaliação matemática.

Ficou evidenciado que as vibrações tinham uma amplitude limitada no decorrer do decurso pela velocidade crítica por causa do amortecimento, ocorrendo a inflexão da fase do desbalanceamento ao se passar pela velocidade crítica, sendo o movimento elíptico de precessão apto a atender a equação de movimento. A fundamentação técnica em dinâmica de rotores, até o presente, é constituída por essas análises.

Após a criação por Thomas Edison do dínamo e com a elevação da velocidade de giro obtida em sistemas rotativos, a oportunidade de gerar energia elétrica em capacidade comercial foi notada e a fabricação de turbinas a vapor, com eixos flexíveis, cresceu exponencialmente. Embora os estudos efetuados tenham proporcionado um entendimento maior do funcionamento de sistemas rotativos, era preciso a elaboração de um método interativo e eficiente para analisar esse tipo de máquina. No ano de 1924, Stodola (1924) publicou um livro sobre a dinâmica de rotores flexíveis. Esse livro continha uma técnica gráfica para encontrar as velocidades críticas, até mesmo para eixos com seção transversal não constante, e levava em conta efeitos rotacionais e da força gravitacional.

Contudo, o aumento de rotação proporcionou um efeito inusitado para aquele tempo, inicialmente, notado em compressores da General Electric (GE), onde o sistema rotativo era sujeito a um movimento de precessão com elevada amplitude e com frequência tão baixa que era visto a olho nu. Esse fato foi nomeado de “*shaft whipping*”. O fenômeno de vibrações instáveis foi investigado por Newkirk em dois estudos (Newkirk (1924) e Newkirk e Taylor (1925)). A conclusão desses trabalhos foi de que esse movimento era auto-excitado e surgia por causa da ocorrência de atrito interno na fabricação da máquina rotativa e das forças oriundas dos mancais flexíveis, em adição de possuir frequência de excitação permanente e com valor próximo ao da primeira velocidade crítica.

Deste momento em diante, os mancais flexíveis começaram a ser reiteradamente colocados nas avaliações de turbinas. Um sistema rotor-mancal com eixo e mancais flexíveis, foi modelado Smith (1933), aperfeiçoando o modelo proposto por Jeffcott.

Com o avanço da indústria de sistemas rotativos, o rotor Laval/Jeffcott não mais representava de forma satisfatória as análises desses sistemas. Portanto, conhecer com exatidão a resposta ao desbalanceamento de sistemas rotativos complexos, as formas modais e as velocidades críticas era necessário. Esse problema foi resolvido por Prohl (1945) por meio da criação de um método numérico que futuramente foi denominado método das matrizes de transferência. Myklestad (1944) desenvolveu a mesma técnica, contudo aplicou a análise a asas de avião. Prohl conduziu o método apenas para o uso em sistemas rotativos, levando em conta, portanto, a influência das inércias rotativas.

Com o surgimento dos computadores, o MEF passou a ser a principal ferramenta para as investigações vibracionais tanto de estruturas quanto de máquinas rotativas. Booker e Ruhl (1972) foram os primeiros a realizar o estudo de elementos finitos para rotores. A formulação

de elementos finitos utilizada nesse trabalho foi realizada com base nos trabalhos de Archer (1963), dedicado a turbomáquinas apoiadas em mancais flexíveis, para a obtenção da resposta ao desbalanceamento e estabilidade do sistema. Os resultados foram comparados ao método das matrizes de transferência, constatando-se, então, sua superioridade computacional.

Somente a energia elástica de deformação do sistema e a energia cinética de translação eram consideradas nos elementos de Booker e Ruhl (1972). Atributos relevantes para a dinâmica de sistemas rotativos como cisalhamento, amortecimento interno, momentos giroscópicos e a inércia rotacional não eram levados em conta. Os momentos giroscópicos e a inércia de rotação foram considerados nos elementos de Thorkildsen (1972).

McVaugh e Nelson (1976), fundamentando-se no elemento de viga de Rayleigh, implementaram o emprego de elementos finitos com o objetivo de investigar as noções básicas e o aperfeiçoamento da equação de movimento de um elemento de eixo rotativo finito. O elemento representava o sistema de equações, no referencial local e inercial e os efeitos da carga axial de flexão, momento giroscópico e de inércia rotacional foram acrescentados. Zorzi (1977) e Nelson (1980) adicionaram novos propósitos ao elemento como o torque axial e o amortecimento histerético e interno viscoso. O elemento finito de eixo fundamentado no elemento de viga de Timoshenko, que admitia o cisalhamento oriundo do movimento transversal, para obter as frequências naturais e velocidades críticas do sistema, foi desenvolvido por Nelson (1980).

O emprego do MEF para a análise da dinâmica de rotores estava definitivamente estabelecido, deste então. As análises foram, e ainda são empregadas por meio dos elementos desenvolvidos por Nelson (1980) na sua maioria. Autores como Ozguven e Ozkan (1984), Edney *et al.* (1990), Qin e Mao (1996), Ku (1998) seguiram a adicionar diferentes impactos ou gerar diferentes variedades de elementos de eixo, entretanto, apenas para situações específicas.

## **2.2 Mancais do Tipo Hidrodinâmicos**

A partir dos trabalhos de Stodola (1925) e Hummel (1926), que possuíam como meta aperfeiçoar a obtenção da velocidade crítica de máquinas rotativas, notou-se que a dinâmica

de vibração de sistemas rotativos encontrava-se diretamente relacionada à aplicabilidade dos mancais. Contudo, os trabalhos relacionados a mancais e suas consequências iniciaram-se no decorrer da revolução industrial e permanecem até a atualidade. Pinkus (1987), em celebração ao centenário da equação de Reynolds realizou uma abrangente recapitulação a respeito da lubrificação hidrodinâmica.

Primeiramente, o atrito era um dos relevantes inconvenientes vistos nos mancais, o que causava elevação da temperatura de funcionamento desses componentes e reduzia a efetividade dos equipamentos. Para superar este obstáculo, a colocação de lubrificante entre as partes móveis e estáticas foi avaliada. A mecânica da lubrificação hidrodinâmica como é hoje conhecida, é proveniente de três trabalhos independentes entre si, cujos autores são Petrov (1883), Tower (1885) e Reynolds (1886).

Os estudos sobre a lubrificação, cujo principal objetivo era na área do atrito foram iniciados por Nicolai Petrov (1883). Em 1883, pressupôs que o atrito não era essencialmente, determinado pela densidade e sim pela viscosidade. Adicionalmente, inferiu que o atrito gerado em um mancal não era proveniente do contato entre as superfícies, mas sim do cisalhamento viscoso do fluido entre as mesmas. Portanto, Petrov (1883) sugeriu a característica hidrodinâmica do atrito em mancais. Petrov (1883) em seus estudos não faz nenhuma menção a respeito da habilidade dos mancais de suportar carregamento, o que foi evidenciado por Tower (1885).

Muitas publicações sobre atrito foram conduzidas, após as descobertas feitas por Petrov. Tower entre os anos de 1883 e 1885 produziu diversos testes em mancais ferroviários observando a existência de pressão hidrodinâmica no filme de óleo. A entrada do óleo no mancal testado por Tower era realizada por meio de furação na parte superior do mancal. Tower (1885) notou que o óleo era transportado para o exterior do mancal com o início do movimento de rotação do eixo. Portanto, uma rolha foi inserida no orifício, com o intuito de impedir o vazamento, porém esta foi ejetada a uma certa rotação. Contudo, observou-se que o filme de lubrificante, que isolava o eixo do compartimento, era submetido a elevadas pressões. Dessa forma, nasceu a teoria de lubrificação hidrodinâmica.

Os conceitos criados por Petrov e Tower foram materializados em resultados experimentais. As comprovações teóricas foram realizadas paralelamente por Osborne Reynolds (1886), que desenvolveu a equação diferencial, que é uma ferramenta primordial até hoje, tendo em vista que reproduz as bases matemática e física da tribologia. A formulação

trouxe a teoria de que a ação hidrodinâmica precisa de uma seção geométrica convergente para a geração das pressões, em adição das decorrências relacionadas à compressão do filme de óleo.

A equação de Reynolds é de difícil solução analítica, pois possui coeficientes variáveis e é uma equação diferencial parcial não homogênea. Desde então, diversos esforços foram envidados para sua solução. A consideração de mancal com comprimento axial infinito é uma das possíveis soluções dessa equação, sendo esta hipótese assumida, inclusive pelo próprio Reynolds, contudo, sem êxito. Sommerfeld (1904) efetuou essa consideração de mancais infinitamente longos e, ao contrário de Reynolds (1886), conseguiu obter a expressão analítica evidente para carga, campo de pressão, coeficiente de atrito e lugar geométrico do eixo.

Entretanto, a resolução para mancais infinitamente longos tinha geração de pressão antissimétrica, o que não condizia com os fatos. Isso aumentava a capacidade de carregamento do mancal e mantinha o ângulo de equilíbrio fixo em  $90^\circ$ . A partir de então, investigações para solução de mancal infinitamente curto foram realizadas, porém somente Dubois e Ocvirk (1953) forneceram uma resolução robusta e precisa para o caso de mancais curtos. De acordo com Pinkus (1987), essa proposta era mais compreensível, consistente e sofisticada que a proposta para mancais longos.

Muitos dos avanços científicos alcançados pela indústria militar foram utilizados, após os períodos das guerras mundiais, pela sociedade, tornando-se o computador, por exemplo, uma ferramenta indispensável.

Pinkus (1956) conseguiu, com a utilização de computadores, solucionar a equação de Reynolds completa, utilizando de hipóteses apropriadas, empregando métodos numéricos para mancal cilíndrico. Os mancais elípticos e trilobulares também foram estudados por Pinkus, respectivamente em 1956 e 1958.

Em função das adversidades em solucionar a equação de Reynolds algumas suposições e condições de contorno relacionadas as técnicas de criação de pressão e mudança das características do fluido, foram sugeridas, criando diversas soluções para a solução da referida equação diferencial com aplicações específicas. Dowson (1962) demonstrou a equação de Reynolds de maneira geral. Essa equação generalizada advinda das equações imprescindíveis da hidrodinâmica com o mínimo de cenários restritivos e possibilitava a mudança das características fundamentais do fluido, como a densidade e a viscosidade, do filme de óleo.

Adicionalmente, no final de seu trabalho, utilizou as restrições clássicas para fluido isoviscoso e incompressível, encontrando a solução original de Reynolds.

A abordagem mais tradicional para incluir os efeitos dos mancais hidrodinâmicos na dinâmica de rotores é a partir da consideração do filme de óleo como um sistema equivalente de molas e amortecedores. Lund (1964, 1978, 1987) foi um dos primeiros a trabalhar na obtenção de coeficientes lineares. Esses coeficientes lineares demonstravam o amortecimento e a rigidez dos mancais.

### **2.3 Balanceamento de Máquinas Rotativas**

O balanceamento de rotores é fundamental para assegurar uma operação estável deste tipo de maquinário. O balanceamento é o ato de acrescentar, ou retirar, baixas quantidades de massa, em uma ou mais localizações angulares e axiais, de maneira a colaborar com o equilíbrio das forças rotativas do sistema.

A obtenção de um balanceamento adequado abrange uma gama de particularidades como: quantidade de planos de balanceamento, peso das massas de correção, posição angular correta e modos a serem balanceados. Um levantamento assertivo com respeito ao balanceamento de máquinas rotativas foi elaborado por Darlow (1989) e Foiles et al. (1998), onde as metodologias aplicadas e seus respectivos conceitos físicos foram apresentados. Racic e Hidalgo (2007) também contribuíram para descrever o estado da arte.

O balanceamento de turbinas era realizado na prática, anteriormente aos trabalhos desenvolvidos por De Laval e do conceito matemático postulado por Jeffcott. Martinson construiu, por volta de 1870, provavelmente, o primeiro aparato que balanceava máquinas rotativas. O eixo era instalado em cima de molas suaves e posto para rotacionar nesse aparato. A coordenada com maior deflexão era assumida como a posição da maior massa desbalanceada, e era registrada pelo avanço gradativo de um fragmento de giz.

A não disponibilidade para o emprego de instrumentos para obter as medições de vibrações vitais com exatidão limitou a efetividade dos métodos primordiais de balanceamento, aliados a escassez de conhecimento teórico prévio. Após surgimento dos vibro-estroboscópios no ano de 1930 essa situação começou a se alterar. Por meio do uso de



“unidades de movimento”, Rathbone (1929) elaborou uma técnica de balanceamento para diminuir as vibrações nas bordas do sistema rotativo. A aplicação de um desbalanceamento conhecido resultava nas “unidades de movimento” que eram o movimento elíptico das extremidades. A partir disso, Rathbone diminuía a vibração nas bordas do rotor utilizando uma técnica iterativa gráfica. Esse foi o início do surgimento do método dos coeficientes de influência.

Thearle (1934) desenvolveu uma técnica semi-gráfica para balanceamento de rotores, na qual a resposta era obtida analiticamente, em vez de ser um processo reiterado como proposto por Rathbone (1929). Nos dias atuais essa metodologia é classificada como balanceamento de máquinas rotativas em dois planos.

Até os anos 50, essa técnica foi amplamente empregada, tendo em vista que os trabalhos eram efetuados em sua maioria em rotores rígidos. Os eixos, com o passar todo tempo, ficaram mais flexíveis e as condições de funcionamento mais adversas, devido ao elevado crescimento do uso das turbinas a vapor. Portanto, os métodos de balanceamento existentes não eram eficazes.

Uma discussão sobre as técnicas de balanceamento correntes, que normalmente eram utilizadas em rotores rígidos e efetuadas a pequenas revoluções, foi realizada por Bishop e Gladwell (1959). De acordo com esses apontamentos, essas técnicas não eram plausíveis para máquinas rotativas flexíveis, que operavam em revoluções supercríticas, pois o balanceamento realizado podia ser danoso para casos em que a máquina rotativa não se comportava como rígida.

Em continuidade, estes autores apresentam um método, designado balanceamento modal, onde cada modo teria que ser balanceado de maneira a não prejudicar o balanceamento do modo predecessor, até o enésimo modo obtido pelo equipamento. O efeito de empenamento e da massa do rotor foi analisado nesse procedimento.

No caso do desenvolvimento do balanceamento, também é nítido que o surgimento dos computadores avançados e o aperfeiçoamento da instrumentação foram essenciais para os avanços necessários. A técnica dos coeficientes de influência, por exemplo, necessitava da resolução de enormes sistemas lineares.

Goodman (1964) introduziu de forma prática a técnica dos coeficientes de influência em seu trabalho. Um procedimento para máquinas rotativas flexíveis submetidas a velocidades de rotações e cargas variáveis foi desenvolvido por este autor. A solução era computada de forma

direta quando havia uma quantidade de medições igual ou inferior que a quantidade de planos de balanceamento. Um processo de otimização teria que ser aplicado, caso a totalidade de medições fosse superior que a totalidade de planos de balanceamento. Uma vibração residual mínima era gerada por meio da aplicação das técnicas dos mínimos quadrados e mínimos quadrados ponderados para o alcance das intensidades e fases do balanceamento.

Algumas melhorias ao método apresentado por Goodman foram adicionadas por Lund e Tonnesen (1972). Experimentalmente, eles investigaram a eficácia e exatidão da técnica dos coeficientes de influência no alcance das massas de reparação. Adicionalmente, foi constatada a relevância de se empregar dois ou três planos de reparação e de inúmeros instrumentos para a aquisição das medições de vibrações. Portanto, verificou-se que a técnica dos coeficientes de influência era robusta e exata e que as medições poderiam ser coletadas pelos sensores à disposição no mercado naquele tempo, uma vez que calibrados adequadamente, e que havendo medições em quantidades necessárias, o balanceamento era efetuado com êxito para casos com mais de dois planos de balanceamento.

Contudo, os pesquisadores da época não tinham exatidão quanto à definição da quantidade de planos de balanceamento. Kellenberger (1972) trouxe à tona o debate da quantidade de planos de balanceamentos que eram necessários para um balanceamento modal. Naquela época a regra era aplicar a quantidade de planos igual à quantidade de modos (N) que se almejava balancear. Em seus estudos Kellenberger evidenciou que mais duas equações, afetas aos modos de corpo rígido, teriam que ser adicionadas no sistema linear que determinava a obtenção das massas de reparação. As vibrações residuais seriam diminuídas consideravelmente, com a utilização de um total de  $N+2$  planos no balanceamento modal.

Darlow (1982) preocupado também com a quantidade de planos de balanceamentos a serem empregados, elaborou uma técnica para a caracterização e remoção de planos dependentes, para a técnica dos coeficientes de influência. Os planos não independentes gravavam um mau condicionamento da matriz empregada para a obtenção dos coeficientes de influência, criando massas de reparações ilógicas, nesse caso. Tal procedimento, portanto deveria, ser efetuado antes do cálculo dos coeficientes, de maneira a garantir a utilização de apenas planos que criassem um sistema de equações linearmente não dependentes.

Um aperfeiçoamento na técnica de balanceamento de Gash e Drechsler (1978) foi apresentado por Gnielka (1983), aplicando-o em máquinas rotativas com empenamento e suportadas por múltiplos mancais. O método de balanceamento modal proposto não utiliza

massas de triagem para obter dados da máquina rotativa. A partir dos modos obtidos teoricamente, da massa modal, e aquisições de vibração efetuadas em revoluções próximas às velocidades críticas, era viável caracterizar o desbalanceamento por meio da técnica de mínimos quadrados.

Ambos os métodos dos coeficientes de influência e modal tem pontos positivos e negativos. O balanceamento modal tem limitações com relação à utilização de mancais hidrodinâmicos devido a dependência dos autovetores com respeito à velocidade, enquanto os coeficientes de influência têm a inconveniência de precisar de um elevado número de massas de testes. Portanto, o procedimento denominado como método unificado de balanceamento tenta conjugar os pontos positivos de ambos os métodos e remover os pontos negativos. Dessa feita, massas de testes são empregadas em velocidades de revolução que estimulam preponderantemente o modo a ser balanceado, criando assim coeficientes de influência para o modo em análise. Um manual em balanceamento de rotores flexíveis no qual são apresentadas as metodologias a serem aplicadas nesses três métodos, além de fazer uma correlação prática entre os mesmos, foi publicado por Darlow (1987).

Uma técnica para encontrar o estado de desbalanceamento de um rotor utilizando medições oriundas dos pedestais, assumindo-se que se a modelagem matemática do equipamento fosse minimamente robusta o desbalanceamento podia ser encontrado direto das informações de vibrações mensuradas na caixa dos mancais, foi apresentada por Lees e Friswell (1997). Sem a consideração de amortecimento, o sistema rotativo foi modelado a partir de parâmetros modais e a força oriunda dos mancais era encontrada por meio da lei de Hooke com rigidez fixa. Para uma modelagem, que possuía somente um grau de liberdade de translação, foi plausível encontrar bons valores para a amplitude do desbalanceamento, contudo não ocorreram estimativas adequadas para a fase devido à falta de precisão no modelo dos mancais, comprovando que o método era robusto somente para mancais rígidos.

Este mesmo grupo de pesquisadores seguiu com a identificação desse tipo de falha nos anos posteriores, devido à relevância de se encontrar o desbalanceamento e, na sequência, realizar o balanceamento em rotores como uma forma de evitar falhas não previstas e inesperadas do equipamento.

Uma nova técnica para obter os coeficientes de influência foi desenvolvida por Yu (2004). Um grupo de massas de teste utilizadas paralelamente aos planos de balanceamento foi considerado nesse método. Os coeficientes de influência obtidos em balanceamentos

posteriores podiam ser utilizados para a obtenção dos novos. Entretanto, havia a necessidade de que a quantidade de rodadas experimentais fosse, pelo menos, igual à quantidade de planos de balanceamento que ainda não haviam sido empregados em balanceamentos anteriores. Uma boa redução de vibração foi obtida em testes realizados por meio dessa técnica em uma turbina a vapor de geração de energia elétrica.

Untaroiu *et al.* (2008) propõem a técnica de balanceamento ótimo min-max LMI, para considerar as limitações nas amplitudes de vibrações residuais e a intensidade das massas de reparação. Por meio da minimização da norma infinita das medições de vibração nas localizações mais críticas do sistema rotativo, o método calcula os coeficientes de influência. Um sistema linear de inequações é aplicado às restrições. Com a utilização de dois exemplos numéricos os autores validaram teoricamente o novo método. Uma performance melhor em comparação ao método tradicional que aplica os mínimos quadrados foi evidenciada pelos autores.

Tiwari e Chakravarthy (2009) fundamentando-se em sinais temporais adquiridos por meio da resposta “*run-down*” e ao impulso fizeram a identificação concomitante dos parâmetros dinâmicos de mancais de uma máquina rotativa rígida e do desbalanceamento residual. Os resultados, obtidos por meio da resposta ao impulso, tanto experimental quanto teórico, foram contrapostos aos alcançados pelo “*run-down*”, indicando que os dois métodos representavam satisfatoriamente o desbalanceamento atuante no sistema e os mancais.

Máquinas rotativas apoiadas em mancais hidrodinâmicos e com uma junção flexível de conexão entre dois eixos flexíveis, particularmente para diagnóstico e predição de falhas que frequentemente acontecem nestes sistemas (desbalanceamento e desalinhamento) foram estudados por Camargo *et al.* (2010). Foi empregado um algoritmo genético para analisar individualmente cada função objetivo, estabelecendo assim um limite de Pareto ótimo de respostas, com o intuito de detectar os parâmetros de falha não conhecidos. Contudo, o dispêndio computacional exigido para impedir mínimos locais no método de busca e a aleatoriedade dos métodos evolutivos, foram limitantes.

A caracterização de desbalanceamento rotativo empregando o método da minimização das forças equivalentes foi realizada por Sudhakar e Sekhar (2011). Por meio de uma matriz modal de transferência as vibrações coletadas por meio de experimentos nas estações de medição eram estendidas para todo sistema. Por meio de um modelo exato do MEF do sistema rotativo, a resposta do sistema era inserida possibilitando obter a posição e a

magnitude das forças que ocasionavam a falha. Essas forças na sequência eram associadas às forças encontradas em uma modelagem teórica variando-se a localização, intensidade e fase do desbalanceamento e procurando minimizar a diferença. Por meio de experimentos o método evidenciou boa concordância com as massas aplicadas.

Um balanceamento modal para reparar um desbalanceamento distribuído na extensão de um sistema rotativo com empenamento foi utilizado por Deepthikumar *et al* (2013). Por meio de uma matriz de transferência para movê-lo para o sistema global o sistema rotativo foi modelado pelo MEF e o desbalanceamento foi desenvolvido como uma curva polinomial para cada elemento. O método foi analisado teoricamente e experimentalmente para o primeiro modo de um sistema rotativo na vertical somente em um plano de balanceamento e uma rodada teste, mostrando-se vantajoso.

A detecção de desbalanceamento empregando uma máquina rotativa modelada por elementos com não linearidades oriundas de um atuador magnético foi proposta por Morais *et al.* (2014). Os parâmetros do sistema como amortecimento proporcional do rotor, amortecimento dos mancais e rigidez são definidos por meio de experimentos pela função resposta em frequência (FRF) e da aplicação do método estocástico “*particle swarm*”, num primeiro momento. Depois de caracterizados os parâmetros do sistema, a modelagem é empregada para a caracterização do desbalanceamento, aplicando novamente o método “*particle swarm*” para minimização da função objetivo. O método foi analisado experimentalmente e numericamente, para casos de linearidade e não-linearidade, obtendo amplitudes aceitáveis de vibração.

O formato das órbitas provenientes dos mancais tem influência direta da localização na qual o desbalanceamento está posicionado no rotor. Esse fato pode ser empregado como maneira de caracterizar os parâmetros do desbalanceamento existentes no sistema. Um modelo de sistema rotativo com anisotropia nos mancais e massas concentradas foi adotado como uma solução dinâmica harmônica, fundamentando-se em coeficientes que calculavam a diferença entre os formatos das órbitas encontradas com excitação posicionada em todos os nós do sistema rotativo, por Lang *et al.* (2015). A partir da resposta orbital experimental empregou-se a técnica para detectar o desbalanceamento em uma turbomáquina de geração de energia elétrica.

Knopf *et al* (2015) apresentaram uma abordagem estendida da norma ISO 11342 que é adequada para reproduzir exatamente o comportamento vibracional nos planos de medição,

geralmente localizados próximos aos mancais. Essa abordagem foi baseada em coeficientes de influência físicos para a estimativa dos desbalanceamentos residuais fora da condição de ressonância, na faixa de velocidade operacional de um rotor flexível.

A metodologia mostra que dois desbalanceamentos residuais são necessários para condições de operação fora de ressonância, por exemplo, para o caso de velocidades operacionais, que geralmente estão entre duas velocidades críticas. Ao olhar para os planos de medição, as amplitudes e fases de vibração podem ser representadas exatamente com a aproximação de dois desbalanceamentos residuais.

Uma técnica de identificação de desgaste em mancais pelas respostas ao desbalanceamento em coordenadas direcionais (componentes retrógrada e direta) foi apresentada por Machado e Calvalca (2016). Para a modelagem de desgaste apresentada, os parâmetros identificados foram extensão do desgaste, posição circunferencial e profundidade. As respostas numéricas foram comparadas com os dados experimentais, tendo uma equiparação aceitável. Mendes *et al.* (2017) aperfeiçoaram o método para uma avaliação pelo emprego da FRF, alcançando resultados satisfatórios, em trabalhos posteriores.

Yao *et al.* (2018) propuseram dois métodos para a identificação das características do desbalanceamento: o primeiro é baseado na expansão modal combinada com o uso de algoritmos de otimização para um sistema rotativo com um disco, enquanto o segundo se refere ao uso da técnica de expansão modal aplicada ao problema inverso para um rotor com dois discos.

Tanto as simulações quanto os resultados experimentais demonstraram a eficácia dos métodos. O primeiro método de identificação proposto permite, além de detectar a localização do desbalanceamento, estimar também seus parâmetros característicos. O Segundo método proposto superou a limitação das aplicações de problemas inversos de última geração no campo, que dependem do conhecimento prévio da localização axial do desbalanceamento. Além disso, a comparação entre o método que combina expansão modal e otimização e aquele com expansão modal integrada/problema inverso/otimização mostra que os resultados identificados usando esta última metodologia são mais precisos no caso de um sistema rotativo com dois discos. Para identificar os parâmetros de desbalanceamento, diferentes algoritmos de otimização foram utilizados para otimizar a função objetivo (Antlion (ALO), Simulated annealing (SA) e fly fruit algorithm (FOA)).

Um novo método de identificação de cargas desbalanceadas usando o MEF do rotor combinado com algoritmos de filtro de Kalman aumentado (AKF) foi proposto por Zou *et al.* (2019). Sua precisão de identificação foi estudada por simulação e experimento e demonstrou a exatidão do método proposto.

Este método é um método determinístico-estocástico, no domínio do tempo e é insensível a erros de medição e modelagem. Os resultados da pesquisa mostraram que o método proposto pode identificar os parâmetros de desbalanceamento online e em tempo real. Enquanto isso, os erros do modelo dinâmico e do sinal de medição podem ser considerados e efetivamente filtrados em tempo real, melhorando assim a precisão da estimativa do desbalanceamento.

Alves *et al.* (2019) propõem o uso de acelerações provenientes dos mancais com a utilização de coeficientes de influência e verificam experimentalmente que o balanceamento pode ser bem-sucedido também em condições de altas não linearidades para mancais hidrodinâmicos.

Primeiro, as características não lineares do filme de óleo são introduzidas por meio de um modelo analítico simples. Em seguida, diferentes comportamentos foram investigados experimentalmente por meio de um rotor de bancada de testes apoiado em três mancais hidrodinâmicos, projetado para suportar os efeitos não lineares do filme de óleo. Os efeitos não lineares são quantificados através de desvios em relação ao comportamento linear e desenvolvimento de harmônicas superiores na resposta do filme de óleo. É mostrado que esses efeitos podem afetar seriamente a possibilidade de balanceamento com o uso de coeficientes de influência. Por fim, verificou-se experimentalmente que o balanceamento com o uso da aceleração do mancal para cálculo dos coeficientes de influência teve sucesso, conforme o esperado.

Yao *et al.* (2020) desenvolveram um método de balanceamento dinâmico para rotores flexíveis suportados por rolamentos de rolos usando várias velocidades para otimização de objetivo duplo (DOM). O método foi utilizado para superar as deficiências que o método clássico de coeficiente de influência (CI) com mínimos quadrados (LSM), pode induzir ao gerar vibrações residuais excessivas em velocidades específicas do rotor quando um rotor flexível é balanceado dinamicamente.

A técnica descrita pelos autores envolve duas etapas de otimização consecutivas. Durante a primeira etapa, um peso de correção ótimo da população de parâmetros é

identificado usando um algoritmo genético (GA) aplicado a uma função objetivo feita a partir da soma dos quadrados das vibrações residuais. Esta primeira etapa de otimização é executada várias vezes para obter um conjunto de pesos de correção otimizados. Um segundo processo de otimização é então realizado minimizando o valor máximo da vibração residual do rotor. Cada peso de correção pertencente ao primeiro conjunto de otimização é incorporado a uma equação que representa a vibração residual para obter o peso de correção ideal final. A validade do método proposto foi verificada por meio de simulações e experimentos relacionados a um sistema rotativo com dois discos. Os resultados mostram que o DOM fornece uma estratégia de balanceamento mais eficaz do que aquela obtida usando GA e LSM clássico para o balanceamento dinâmico de um sistema rotativo com múltiplas velocidades. O número de velocidades considerado durante o balanceamento dinâmico também tem um impacto significativo no efeito geral do balanceamento. Os experimentos mostram que três velocidades são necessárias, simultaneamente, para um balanceamento dinâmico eficiente em um rotor flexível contendo a primeira velocidade crítica no regime operacional.

Um algoritmo híbrido de salp swarm–Nelder–Mead (SSA–NM) foi proposto por Abbasi *et al.* (2022), onde a função objetivo foi considerada como a diferença ponderada ao quadrado entre a resposta ao desbalanceamento analítica e predita neste estudo. Parâmetros de otimização foram ajustados sistematicamente usando os métodos de design de experimentos de Taguchi para comparação dos resultados. Além disso, foi feita a comparação da eficiência computacional do algoritmo proposto com os algoritmos de otimização recentes, como: whale optimization algorithm (WOA), grasshopper optimization algorithm (GOA), salp swarm algorithm (SSA), and Harris hawk optimization (HHO).

A metodologia foi demonstrada em um sistema rotativo com disco único e dois discos. A precisão do método proposto foi superior do que os outros algoritmos considerados neste estudo de caso. Além disso, este estudo mostrou que a metodologia proposta pode identificar os parâmetros do desbalanceamento com precisão para diferentes velocidades do rotor na presença de diferentes níveis de ruído. Adicionalmente, um experimento foi conduzido para verificar o método proposto. O algoritmo proposto foi capaz de detectar as características de desbalanceamento com precisão aceitável.

Mian *et al.* (2022) desenvolveram um método para identificação do desalinhamento e desbalanceamento aplicando Machine Learn com medição de vibração e imagem térmica



infravermelha (câmera termográfica) e compararam os resultados com três algoritmos: Naive Bayes (NB), k-Nearest Neighbor (k-NN), e Support Vector Machine (SVM).

Um classificador Naive Bayes trabalha com modelos probabilísticos usando o teorema de Bayes. O algoritmo k-Nearest Neighbor usa a similaridade e procura uma classe vizinha com base no termo chamado distância euclidiana. O algoritmo SVM funciona com base no princípio de busca em um hiperplano e maximizando o intervalo entre as classes.

Os resultados alcançados com o algoritmo SVM foram melhores que os obtidos pelos demais algoritmos e o diagnóstico de falha por imagens térmicas infravermelhas tiveram precisão superior do que aqueles utilizando medições de vibração, demonstrando ser um método promissor.

O tema e os métodos utilizados nesse trabalho são recentes e constituem uma continuação do trabalho desenvolvido por Alves (2018) e Alves e Cavalca (2021) para o balanceamento, em um plano, que não empregava massas de triagem e pode ser aplicado apenas em uma rotação da máquina para balancear o primeiro modo.

Portanto, o presente trabalho utilizará os coeficientes lineares e a expansão do método de balanceamento sem necessidade de massas de triagem para mais de um plano de balanceamento. A proposta é expandir este método para o balanceamento em 2 e 3 planos, utilizando sistemas rotativos compostos por 2 e 3 discos.

### 3 TEORIA E MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem numérica necessária para obtenção da resposta dinâmica do sistema rotativo linear, assim como para o balanceamento do sistema rotativo, é apresentada nesse capítulo. O modelo do rotor por meio do MEF, caracterizado pela montagem de matrizes globais de rigidez, amortecimento e inércia, oriunda do somatório exclusivo das matrizes elementares é evidenciada na seção 3.1.

A seção 3.2 discorre sobre os mancais, onde a equação de Reynolds é apresentada. Esta equação é primordial para obtermos das forças hidrodinâmicas. Adicionalmente, o mancal será representado pela linearização dos coeficientes de amortecimento e rigidez.

A seção 3.3 mostra a resolução da equação de movimento no domínio da frequência para Função Resposta ao Desbalanceamento (FRD) e no domínio do tempo com a utilização do espaço de estados, empregando o algoritmo de Runge-Kutta disponível na função *ode15s* do programa *Matlab*®.

Por derradeiro, o subitem 3.4 introduz a técnica de identificação utilizada para caracterização do desbalanceamento, assim como as técnicas de otimização dinâmica essenciais para este propósito.

#### 3.1 Modelo do Sistema Rotativo pelo Método dos Elementos Finitos

Uma máquina rotativa é composta por elementos típicos tais como, os eixos, os selos, os mancais e a estrutura de suporte ou fundação. A Figura 1 ilustra uma configuração típica, na qual também são evidenciados os sistemas de coordenadas empregados para a montagem das equações de movimento que representam a dinâmica do sistema.

O referencial  $XYZ$  (I) mostrado é o inercial, no qual  $X$  é o eixo axial,  $Y$  é o eixo transversal horizontal e  $Z$  o eixo transversal vertical. O sistema  $xyz$  (L) é o referencial rotacional, sendo que este referencial segue o giro do sistema rotativo, considerando que os eixos  $X$  e  $x$  são semelhantes com a linha neutra do sistema rotativo sem deformação. Portanto,

assumindo  $\omega$  como a velocidade de revolução de precessão, os eixos transversais, em cada um dos referenciais, estarão espaçados de um ângulo  $\omega t$  entre si

É concebível adotar os deslocamentos angulares ( $B, \Gamma$ ) na prática colineares com os eixos ( $Y, Z$ ) de modo respectivo, quando se admitem pequenas deformações transversais. Supondo  $\Omega$  como a velocidade de giro próprio da máquina rotativa, o ângulo de rotação particular  $\theta$ , para deformação torcional desprezível, é dado por  $\Omega t$ .

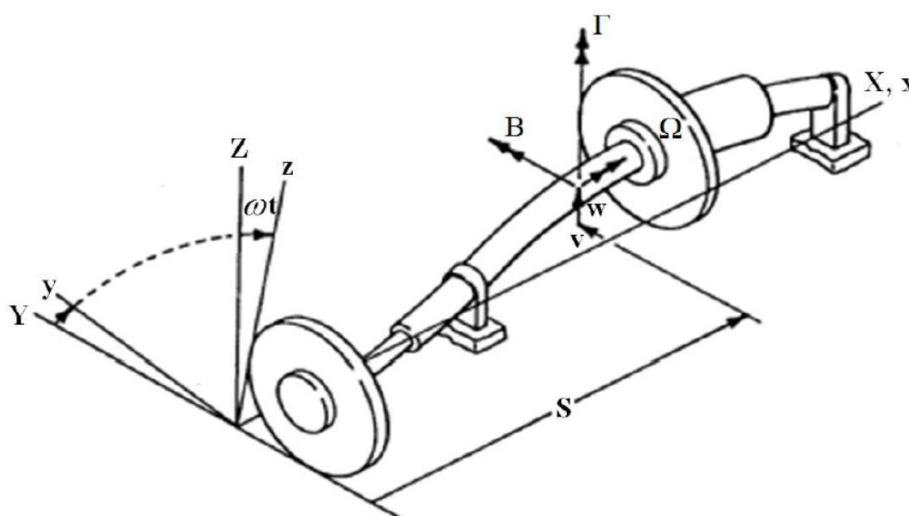


Figura 1: Sistema de coordenadas utilizado por McVaugh e Nelson (1976).

Tomando como base o modelo demonstrado por Tuckmantel (2010) e Alves (2018), um sistema contínuo é discretizado pelo método dos elementos finitos em um grupo de elementos que serão adotados como contínuos individualmente, sendo que cada elemento é conectado aos seus adjacentes por meio de nós. O MEF possibilita a conexão inercial, de rotação e translação, entre os elementos do sistema, pela matriz de massa, fato que não ocorre em modelagens simplistas como a de parâmetros concentrados, tornando esse método mais eficaz na resolução das equações de movimento, de acordo com Adams (2010). O método dos elementos finitos, conforme Childs (1993) possibilita também a junção do efeito giroscópico entre os elementos, que é essencial para o estudo de máquinas rotativas. O enrijecimento do sistema devido à inserção de discos de inércia pode ser reproduzido somente com a aplicação do método dos elementos finitos, conforme evidenciam Lalanne e Ferraris (1998).

As energias, cinética ( $T_i$ ) e de deformação ( $U_i$ ) e o trabalho das forças não conservativas ( $R_i$ ) de cada elemento  $i$ , em função dos movimentos dos nós em sua

extremidade, são calculados em função dessa propriedade. Portanto, para uma estrutura com  $N$  elementos, a energia total do sistema é obtida pelo somatório das energias individuais de cada elemento, ou seja:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i, \quad U = \sum_{i=1}^N U_i, \quad R = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (1)$$

A energia cinética, a energia de deformação e o trabalho das forças não conservativas globais segundo McVaugh e Nelson (1976), são apresentados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \Omega \dot{q}^T G q + \frac{1}{2} I_p \Omega^2, \\ U &= \frac{1}{2} q^T K q, \\ R &= \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q}. \end{aligned} \quad (2)$$

Para obtenção da equação de movimento do sistema completo, aplica-se a equação de Lagrange (Equação 3), conforme (Krämer, 1993; Lalanne e Ferraris, 1998; Genta, 2005):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

na qual,  $q_i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada e  $F_i$  é a componente generalizada da força agindo na direção da  $i$ -ésima coordenada generalizada.

Substituindo-se as respectivas derivadas das Equações (2) na equação de Lagrange, obtém-se a equação de movimento do sistema completo:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (4)$$

em que,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[G]$  e  $[K]$  são de modo respectivo as matrizes globais de massa, de amortecimento, giroscópica e de rigidez,  $\{q(t)\}$  é o vetor dos graus de liberdade e  $\{f(t)\}$  é o vetor de forças externas. Adicionalmente, a matriz de amortecimento pode ser calculada proporcional às matrizes de massa e rigidez dos elementos. Desse modo:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (5)$$

Entretanto, de acordo com Weiming e Novak (1996) e Santana (2009) o valor de  $\alpha$  para eixos de material metálicos pode ser considerado praticamente nulo.

As equações de movimento utilizando elementos de viga de Timoshenko e de disco rígido, conforme demonstradas por McVaugh e Nelson (1976) e Nelson (1980), serão as empregadas na modelagem por elementos finitos. A deformação de um elemento é dada pelas translações nodais  $V$  e  $W$ , respectivamente nas direções  $Y$  e  $Z$  do referencial inercial e a direção do elemento é fornecida pelas rotações nodais  $B$  e  $\Gamma$  em torno dos eixos  $Y$  e  $Z$  do referencial inercial, de acordo com o demonstrado na Figura 1. Portanto, o vetor de coordenadas generalizadas é dado por:

$$\{\mathbf{q}\} = \{V_i \ W_i \ B_i \ \Gamma_i\}^T. \quad (6)$$

A fundação e os mancais hidrodinâmicos ainda precisam ser modelados para obtermos o sistema rotativo completo. A fundação será adotada rígida neste trabalho, pois a bancada experimental do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR), utilizada como parâmetro para essa modelagem possui 10 fixadores que limitam a transmissibilidade de vibração, conforme evidencia a Figura 2.

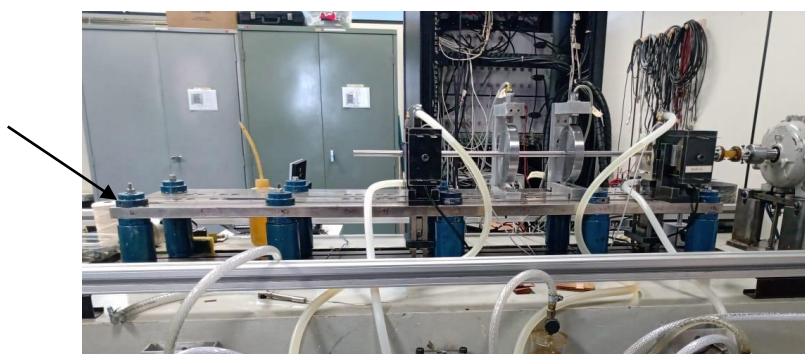


Figura 2: Bancada de testes do LAMAR.

A modelagem do filme de óleo levará em conta as singularidades geométricas do mancal e a força empregada no sistema rotativo, ou até mesmo, a localização do eixo dentro do mancal, para os mancais do tipo hidrodinâmicos. Desta forma, é viável calcular as pressões

hidrodinâmicas e, por conseguinte, a força oriunda do mancal. A seção 3.2 trata exclusivamente sobre os mancais.

### 3.2 Modelo de Mancais do Tipo Hidrodinâmicos

Mancais, em geral, são elementos de máquinas de apoio, cuja função é conectar a parte móvel à parte fixa de um rotor, permitindo movimento relativo entre as mesmas. O papel do mancal é delimitar os graus de liberdade do eixo, dissipando o mínimo de energia e, em alguns casos, contribuir com o amortecimento do sistema. No caso de mancais a lubrificação hidrodinâmica, o eixo é suportado por um filme de óleo no interior de um compartimento, ou folga, com geometria curva cilíndrica, elíptica ou multilobular, que caracterizam contatos conformes, a saber, quando o filme lubrificante envolve a superfície do eixo.

Com o início da rotação do eixo, são geradas tensões de cisalhamento, responsáveis pela circulação do lubrificante no entorno do eixo, e tensões de esmagamento, que pressionam o óleo lubrificante na parte convergente da folga do mancal. Tais efeitos físicos promovem uma pressão hidrodinâmica que leva à sustentação do carregamento da máquina rotativa ( $W_m$ ). Uma consequência desse mecanismo de operação é a presença de contato metal-metal (causada pela falta do filme de óleo) no começo e no final da operação do sistema rotativo, de acordo com o notado na Figura 3.

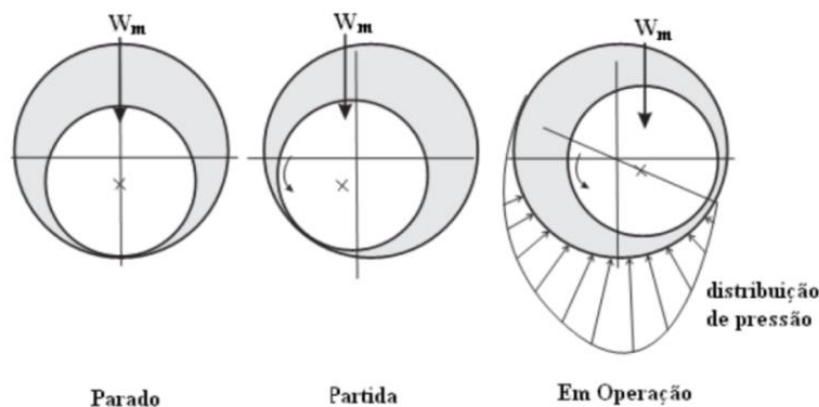


Figura 3: Princípio de Funcionamento de um Mancal Hidrodinâmico (Mendes, 2011).

Outra influência particular a esse tipo de mancal é a tendência a auto centragem do eixo. Com a elevação da velocidade de revolução ( $\Omega$ ), ocorre o acréscimo da pressão de óleo e, por conseguinte, da espessura mínima do filme de óleo; o que conduz a centralização do eixo no interior do mancal, de acordo com o notado na Figura 4. A Curva de Guembel é representada na cor vermelha, e significa a localização estática do centro do eixo, conforme a mudança de sua velocidade de giro.

Nota-se que, que na velocidade nula, o eixo está posicionado na parte inferior do mancal, enquanto que em rotação infinitamente elevada, tende a se posicionar na parte central do mancal.

As órbitas encontradas para esse tipo de mancal acontecem à volta do ponto “C”, demonstrado na Figura 4 da Curva de Guembel equivalente à velocidade de revolução do eixo. Esse ponto tem a designação de “Locus”, na dinâmica de rotores.

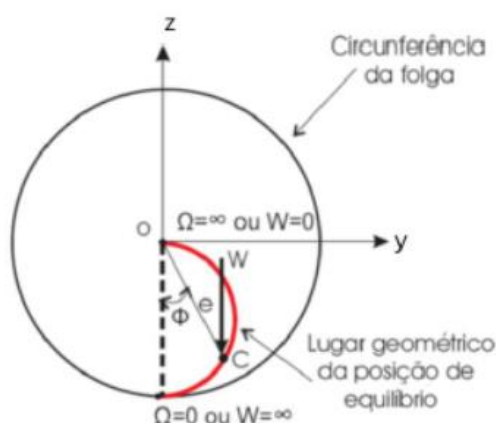


Figura 4: Curva de Guembel e Locus.

A fundamentação da teoria clássica da lubrificação hidrodinâmica é a equação de Reynolds. Por meio do uso combinado das equações da conservação da massa para um fluido viscoso e de conservação de quantidade de movimento é possível chegar à equação de Reynolds. A resolução desta equação gera o campo de pressão no óleo, quando utilizada na análise do filme de óleo de mancais. O conhecimento essencial para a solução da maioria das adversidades comuns no estudo de mancais hidrodinâmicos é o campo de pressão.

A equação de Reynolds, após a adoção de medidas simplificadoras, de acordo com Dowson (1962); considerando o estado incompressível e isoviscoso, densidade invariável

com o tempo e demais hipóteses pertinentes de velocidades do fluido é apresentada na Equação (7):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 6\mu \left( V \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (7)$$

em que,  $x$ ,  $\theta$  e  $z$  são, de modo respectivo, as coordenadas axial, circunferencial e vertical do mancal,  $p$  é a pressão,  $V$  é a velocidade do lubrificante na direção  $\theta$ ,  $\mu$  é a viscosidade do lubrificante,  $\rho$  é a densidade e  $h$  é a espessura do filme lubrificante apresentada na Equação (8) e  $\frac{\partial h}{\partial t}$  é a evidenciada na Equação (9).

$$h = C_R + y \sin(\theta) + z \cos(\theta), \quad (8)$$

sendo,  $C_R$  a folga radial do mancal.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{y} \sin(\theta) - \dot{z} \cos(\theta). \quad (9)$$

Como a equação de Reynolds é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, sua solução analítica integral não é obtida algebricamente. Contudo, Sommerfeld (1904) e Dubois e Ocvirk (1953), por meio de hipóteses que supunham o mancal infinitamente longo, ou infinitamente curto, de modo respectivo, alcançaram soluções analíticas unidimensionais.

Dentre essas aproximações, a mais empregada é a consideração de mancal curto, que reduz a Equação de Reynolds (7) para a expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 6\mu \left( V \frac{\partial h}{\partial \theta} \right). \quad (10)$$

Segundo Krämer (1993), para um mancal curto, a mudança de pressão na direção circunferencial é pequena no que concerne à mudança de pressão na direção axial. Assim, na Equação de Reynolds (7), pode-se, com razoável aproximação para  $L_m/2R_m \leq 1/2$ , remover o primeiro termo, tal como, mostrado na Equação (10).

Dubois e Ocvirk no ano de 1953 obtiveram a resolução da equação de Reynolds para mancais curtos, assumindo que  $p=p_a=0$ , para  $x=L_m/2$  e  $x=-L_m/2$  e considerando  $z=R\theta$ :



$$p(\theta, x) = \frac{3\varepsilon\mu \sin(\theta)}{R_m C_R^2 (1 + \varepsilon \cos(\theta))^3} \left( \frac{L_m^2}{4} - x^2 \right) + pa, \quad (11)$$

na qual:  $R_m$  e  $L_m$  são respectivamente, o raio e comprimento do mancal e  $\varepsilon$  é a excentricidade adimensional.

Estimado o campo de pressão, é factível analisar as forças atuantes no filme de lubrificante. Com essa finalidade, é necessário integrar numericamente a distribuição de pressão, alcançando a força hidrodinâmica Equação (12), que também é decomposta em força tangencial ( $f_t$ ) e força radial ( $f_r$ ).

$$f_h = \int_{-\frac{L_m}{2}}^{\frac{L_m}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, x) d\theta R dx. \quad (12)$$

$$f_t = \int_{-\frac{L_m}{2}}^{\frac{L_m}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, x) \sin(\theta) d\theta R dx, \quad (13)$$

$$f_r = \int_{-\frac{L_m}{2}}^{\frac{L_m}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, x) \cos(\theta) d\theta R dx.$$

A solução da Equação (13) resulta na Equação (14). Fazendo o balanço de forças nas direções  $z$  e  $y$ , conforme Figura 5, obtém-se a Equação (15). Resolvendo-se a Equação (15) encontra-se o ângulo de atitude  $\phi$  em função apenas da excentricidade adimensional  $\varepsilon$ .

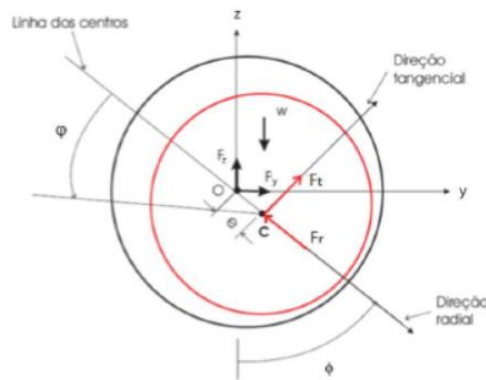


Figura 5: Representação das forças.

$$F_t = \frac{\mu\Omega RL^3}{C_R^2} \left( \frac{\pi\varepsilon}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \right), \quad (14)$$

$$F_r = \frac{\mu\Omega RL^3}{C_R^2} \left( \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right).$$

$$W = F_t \sin(\phi) + F_r \cos(\phi), \quad (15)$$

$$0 = F_t \cos(\phi) - F_r \sin(\phi),$$

na qual  $W$  é a carga estática aplicada ao mancal.

$$\tan(\phi) = \frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{4 \varepsilon}. \quad (16)$$

A abordagem mais tradicional para incluir os efeitos dos mancais hidrodinâmicos na dinâmica de rotores é a partir da consideração do filme de óleo como um sistema equivalente de molas e amortecedores, como notado na Figura 6.

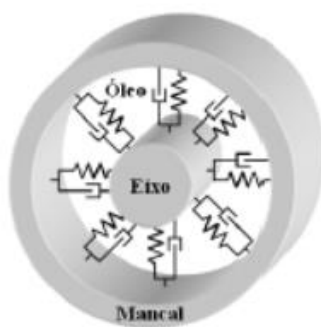


Figura 6: Representação linear do mancal hidrodinâmico.

Essa demonstração é plausível ao se linearizar as forças hidrodinâmicas, ampliando-as em uma série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio estático, a cada velocidade de rotação, de acordo com Lund (1987). Portanto, para qualquer velocidade de revolução do eixo tem-se:

$$f_y = f_{y0} + K_{yy} \cdot \Delta y + K_{yz} \cdot \Delta z + C_{yy} \cdot \Delta \dot{y} + C_{yz} \cdot \Delta \dot{z}, \quad (17)$$

$$f_z = f_{z0} + K_{zy} \cdot \Delta y + K_{zz} \cdot \Delta z + C_{zy} \cdot \Delta \dot{y} + C_{zz} \cdot \Delta \dot{z},$$

em que, os coeficientes são as derivadas parciais das forças analisadas na posição de equilíbrio:

$$C_{yz} = \frac{\partial f_y}{\partial \dot{z}}; K_{yz} = \frac{\partial f_y}{\partial z}; \quad (18)$$

e são obtidos como os coeficientes dinâmicos de amortecimento e de rigidez do mancal.

Desta forma, as forças hidrodinâmicas podem ser reproduzidas de maneira linear, empregando a teoria de coeficientes lineares (Equação 17).

Os coeficientes de amortecimento e de rigidez equivalentes ao atrito viscoso no filme de lubrificante e à flexibilidade, utilizados neste trabalho são os definidos por Krämer (1993), apresentados na Equação (19).

$$K_{ik} = \gamma_{ik} \frac{W}{C_R}; \quad C_{ik} = \beta_{ik} \frac{W}{C_R \Omega}, \quad (19)$$

Para o cálculo dos coeficientes equivalentes, usam-se as seguintes variáveis auxiliares, de acordo com Krämer (1993):

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= [2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2] A(\varepsilon), \\ \gamma_{12} &= \frac{\pi}{4} \frac{\pi^2 - 2\pi^2\varepsilon^2 - (16 - \pi^2)\varepsilon^4}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} A(\varepsilon), \\ \gamma_{21} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon^4}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} A(\varepsilon), \\ \gamma_{22} &= \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon^4}{1 - \varepsilon^2} A(\varepsilon), \\ \beta_{11} &= \frac{\pi}{2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} [\pi^2 + (2\pi^2 - 16)\varepsilon^2] A(\varepsilon), \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = -[2\pi^2 + (4\pi^2 - 32)\varepsilon^2] A(\varepsilon), \\ \beta_{22} &= -\frac{\pi}{2} \frac{\pi^2 + (48 - 2\pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} A(\varepsilon), \\ A(\varepsilon) &= \frac{4}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.3 Solução da Equação de Movimento

#### 3.3.1 Domínio da Frequência

A análise da resposta do sistema completo no domínio da frequência é plausível com o auxílio de Função Resposta em Frequência que relaciona os deslocamentos (saídas) resultantes da aplicação de forças (entradas) ao sistema ou com o auxílio de Função Resposta ao Desbalanceamento (FRD) que, por sua vez, considera a aplicação de um tipo específico de força, o desbalanceamento, conforme será exemplificado no subitem 3.4.

Partindo da Equação (4), que é a equação dinâmica global do sistema, assumem-se todos os graus de liberdade do rotor com  $N$  nós.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + ([\mathbf{C}] + \Omega[\mathbf{G}])\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\}. \quad (4)$$

Adotando-se as forças de excitação  $\mathbf{f}(t)$  e o vetor deslocamento do sistema  $\mathbf{q}(t)$  oscilando de maneira senoidal como tempo, tem-se:

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{f}_0\}e^{j(\omega t + \delta)} = \{\mathbf{f}_0\}(e^{j\omega t} e^{j\delta}). \quad (21)$$

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{q}_0\}e^{j\omega t}. \quad (22)$$

em que  $f_0$  e  $\delta$  são as amplitudes e fases do vetor  $\{\mathbf{f}\}$  das forças de excitação no tempo, de modo respectivo e  $\{\mathbf{q}\}$  é o vetor deslocamento da resposta do sistema.

Substituindo-se a primeira e segunda derivadas de  $\mathbf{q}(t)$ , relativamente ao tempo, na equação 4, chega-se na equação de movimento no domínio da frequência.

$$(-\Omega^2 [\mathbf{M}] + j\Omega([\mathbf{C}] + \Omega[\mathbf{G}]) + [\mathbf{K}])\{\mathbf{q}_0\} = \{\mathbf{f}_0\}e^{j\delta}. \quad (23)$$

A resolução do conjunto de equações lineares implica no vetor dos deslocamentos.

### 3.3.2 Domínio do Tempo

A resolução da equação de movimento do sistema rotativo é efetuada empregando uma representação das coordenadas generalizadas em espaço de estados, decrescendo a ordem da equação diferencial.

$$\{\dot{\mathbf{q}}_{ee}\} = [\mathbf{A}_{ee}]\{\mathbf{q}_{ee}\} + \{\mathbf{f}_{ee}\}, \quad (24)$$

na qual,

$$[\mathbf{A}_{ee}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \\ -[\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{C} + \Omega \mathbf{G}] \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{f}_{ee}\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [\mathbf{M}]^{-1} \{\mathbf{f}\} \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

$$\{\mathbf{q}_{ee}\} = \{V \ W \ B \ \Gamma \ \dot{V} \ \dot{W} \ \dot{B} \ \dot{\Gamma}\}^T,$$

$$\{\dot{\mathbf{q}}_{ee}\} = \{\dot{V} \ \dot{W} \ \dot{B} \ \dot{\Gamma} \ \ddot{V} \ \ddot{W} \ \ddot{B} \ \ddot{\Gamma}\}^T.$$

$[\mathbf{I}]$  é a matriz identidade.

A obtenção da resposta temporal é dada pela resolução da equação de movimento, Equação (4), com a aplicação da técnica de espaço de estados por meio do programa *Matlab*®, empregando o algoritmo de Runge-Kutta disponível na função *ode15s*.

### 3.4 Método de Balanceamento Proposto

O principal causador de vibração em um rotor é o desbalanceamento de massa. Essa força advém da força de inércia resultante de uma parcela de massa distanciada do centro de rotação. Esta força pode ser representada como:

$$f_d = m \frac{v^2}{r}, \quad (26)$$

na qual  $m$  é a massa desbalanceada,  $V = \omega \times r$  é a velocidade tangencial linear da massa e  $r$  é a distância da massa ao centro de rotação. Desdobrando a força de excitação no referencial inercial  $y$ - $z$  e renomeando o vetor  $r$  de excentricidade ( $e$ ), a força de desbalanceamento é reproduzida como:

$$\begin{aligned} f_{dy} &= me\omega^2 \cos(\omega t + \delta), \\ f_{dz} &= me\omega^2 \sin(\omega t + \delta), \end{aligned} \quad (27)$$

em que  $\delta$  é o ângulo de fase. Na equação de movimento em suas localizações devidas, essas forças devem ser colocadas no vetor de forças externas.

São necessárias técnicas de otimização de sistemas para obter o melhor arranjo da falha nos métodos de diagnose de falhas fundamentados em modelos. Conforme Luenberger *et al.* (2008) a análise de otimização abrange a escolha de valores para uma quantidade de variáveis correlacionadas, onde estes valores tem que satisfazer uma condição imprescindível e hábil para a resolução da função objetivo, ou funções objetivos no caso de uma otimização de múltiplos objetivos, que regem o problema.

Portanto, para montagem da função objetivo é preciso pegar os elementos primordiais do problema; há diversas maneiras de se atingir estes elementos para tal função. Neste trabalho, primeiramente, obtém-se as vibrações do sistema por meio da modelagem matemática sugerida, no qual as informações do desbalanceamento (posição axial no rotor,  $x$ , ângulo de fase,  $\delta$  e momento de desbalanceamento,  $me$ ) são as incógnitas do problema. Dessa forma, a função objetivo é montada pela diferença entre a vibração calculada e, na ausência de dados experimentais, a mesma vibração calculada com adição de ruído.

Por meio do domínio da frequência com utilização da FRD as informações de vibração são obtidas. Portanto, utilizando-se a técnica dos mínimos quadrados, seguindo a metodologia proposta por Alves (2018), obtém-se:

$$f(\chi) = \frac{1}{2} \|q(me, \delta, x) - \bar{q}\|_2^2, \quad (28)$$

na qual,  $\bar{q}$  é a amplitude de vibração adicionada de ruído, e  $\chi$  é o vetor com as informações do desbalanceamento.

Dessa forma, a caracterização do desbalanceamento passa a ser um problema que busca a minimização das diferenças entre as vibrações teóricas e as vibrações experimentais emuladas numericamente com adição de ruído, e pode ser evidenciada de maneira exata como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \rightarrow f(\chi) \\ \text{s. a. } \mathbf{h}(\chi) = 0 \\ \mathbf{g}(\chi) \leq 0 \\ \chi \in S \end{array} \right. , \quad (29)$$

em que,  $\mathbf{h}(\chi)$  é o vetor de restrição de igualdade,  $\mathbf{g}(\chi)$  é o vetor de restrição de desigualdade e  $S$  é o conjunto factível de  $\chi$ . Para o caso específico do desbalanceamento tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \rightarrow f(\chi) = \frac{1}{2} \|\mathbf{q}(\chi) - \bar{\mathbf{q}}\|_2^2 \\ \text{s. a. } 0 \leq me_{nd} \leq me_{max} \\ \quad \quad 0 \leq \delta_{nd} \leq 2\pi \\ \quad \quad 0 \leq x_{nd} \leq L_r \end{array} \right. \quad nd = 1, \dots, p, \quad (30)$$

sendo,  $L_r$  o comprimento do rotor,  $nd$  o contador para o  $p$ -ésimo desbalanceamento atuante no sistema e  $me_{max}$  é o valor máximo determinado para o momento de desbalanceamento.

Contudo, o problema de otimização mostrado na Equação (30) contém adversidade extra, tendo em vista que na modelagem numérica, a posição axial do desbalanceamento só pode ocupar valores relacionados aos nós do rotor discretizado por meio do MEF. Portanto, a variável da posição axial deve ser analisada como uma variável discreta. No caso em que algumas variáveis são valores inteiros e a função objetivo e/ou as restrições são constituídas por funções não lineares o caso é conhecido como Programação Não Linear Misto-Inteiro (“Mixed-Integer Nonlinear Programming”, MINLP). Para esta classe de problema de otimização devem ser utilizadas técnicas especiais para caracterização do desbalanceamento.

É necessário particionar o MINLP em dois subproblemas, sendo um de Programação Não Linear (NLP) e outro de Programação Linear Misto Inteiro (MILP). As técnicas normalmente utilizam a relaxação das variáveis inteiras para a criação de subproblemas, podendo essas, então, serem qualquer valor real no interior de um intervalo determinado. Desta feita, o MINLP se torna um problema de Programação Não Linear (“Nonlinear Programming”, NLP), onde a solução ótima para esse subproblema cria um limite inferior

para a função objetivo, se confrontado com os valores que podem ser alcançados a começar da região factível original.

Uma função objetivo não linear pode ser transformada em uma função objetivo linear pela inserção de uma variável auxiliar,  $\eta$ , contudo, essa variável auxiliar deve ser maior ou igual ao valor da função objetivo original, seguindo os princípios da linearização. Adotando a metodologia usada por Alves (2018) o MILP é então equacionado com a utilização do Método de *Outer Approximation* (OA) e emprega-se o método de *Branch and Bound* e o algoritmo *simplex* para obter a solução ótima da Equação (31).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \rightarrow \eta \\ \text{s. a. } f(\chi^{(i)}) + \nabla f(\chi^{(i)})^T (\chi - \chi^{(i)}) \leq \eta, \forall \chi^{(i)} \in K \\ 0 \leq me_{nd} \leq me_{max} \\ 0 \leq \delta_{nd} \leq 2\pi, nd = 1, \dots, p \\ 0 \leq x_{nd} \leq L_r \\ x = \sum_{j=1}^{nos} z_j \text{ coord}(j) \\ z_j \leq 1, j = 1, \dots, nos \\ \sum_{j=1}^{nos} z_j = 1, z \in [0 \ 1] \end{array} \right. \quad (31)$$

O método de OA preconiza que um problema MINLP pode ser expresso correspondentemente, como um caso de Programação Linear Misto-Inteiro (“Mixed-Integer Linear Programming”, MILP) de tamanho limitado. O MILP é desenvolvido por meio de linearizações da função objetivo e das funções de restrição nas vizinhanças da resposta ótima de um subproblema NLP fixado.

Defini-se  $K$  como o grupo de todos os valores ótimos alcançados por meio dos subproblemas NLP fixados, para todas as variáveis inteiras factíveis, de maneira que:

$$K := \{ \chi^{(i)} \in S: \chi^{(i)} \text{ resolve o } i - \text{ésimo problema de otimização} \}, \quad (32)$$

e, tendo em vista que  $S$  é um conjunto fechado, há uma quantidade finita de pontos que as variáveis inteiras podem assumir.

O método OA sugere a resolução revezada de subproblemas NLP fixados e de MILPs associados. Inicialmente, soluciona-se um subproblema NLP fixado para um ponto de partida  $\chi^{(i)} = \chi^{(0)}$  (Equação 30). Na sequência gera-se um MILP associado, entretanto substituem-se



as linearizações efetuadas no conjunto  $K$  por linearizações efetuadas em um subconjunto  $\kappa^{(i)} \subset K$  que detém as respostas ótimas dos subproblemas NLP fixados solucionados até este instante.

Calculando-se o MILP associado, é plausível obter outro valor para a variável inteira e gerar outro subproblema NLP fixado. Dessa forma, a nova resposta ótima do NLP é acrescentada ao subconjunto  $\kappa^{(i)}$  e um novo MILP é gerado. O processo é iterativo até que a solução encontrada pelo MILP associado, que cria um limite inferior para a função objetivo, e a melhor solução alcançada por um dos subproblemas NLP fixados, que cria um limite superior para a função objetivo, estejam em concordância com uma dada tolerância.

### 3.4.1 Solução do Problema de Programação Não Linear (NLP)

Estabelecido o subproblema NLP fixado é preciso solucioná-lo para se alcançar a nova resposta ótima a ser empregada no aperfeiçoamento do MILP associado. Os problemas de otimização reais em sua maior parte estão sujeitos a restrições, que são valores prescritos, sejam por funções restritivas, sejam por conjuntos restritos, para as variáveis de interesse. O problema de identificação do desbalanceamento (Equação 30) segue esta metodologia.

Portanto, é necessário empregar uma metodologia que aproxima casos de otimização restritos em casos de otimização irrestritos. Essa aproximação pode ser alcançada por meio do Método das Penalidades, Método do Lagrangiano Aumentado e do Método das Barreiras. No Método das Penalidades é acrescentado um item de penalização na função objetivo para qualquer violação das restrições, criando uma sequência não factível de pontos na busca pela solução ótima. O método do Lagrangiano Aumentado tem princípio de funcionamento similar ao Método das Penalidades, contudo utiliza as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) e multiplicadores de Lagrange para solução do problema de otimização. No Método das Barreiras, um item é acrescentado à função objetivo para garantir que as variáveis respeitem as restrições impostas, criando, dessa maneira, uma sequência factível de pontos, caracterizando o que se conhece como algoritmos de ponto interior.

Levando em conta que os valores da variável axial devem ser somente valores factíveis, para a caracterização do desbalanceamento será empregado o Método das Barreiras, por meio da função *fmincon* do software *Matlab*® com o algoritmo do ponto interior.

O problema de otimização com barreira pode ser estabelecido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \rightarrow r(\boldsymbol{\chi}, c) = f(\boldsymbol{\chi}) + cB(\boldsymbol{\chi}) \\ \text{s. a. } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\chi}) \leq 0 \\ \boldsymbol{\chi} \in S, \boldsymbol{\chi}_l = \boldsymbol{\chi}_l^{(i)} \end{array} \right. , \quad (33)$$

sendo,  $c$  o parâmetro que quantifica a proximidade do problema irrestrito em relação ao problema restrito (por meio da intensidade aplicada à penalização) e  $B(\boldsymbol{\chi})$  é a função barreira. Luenberg et al., 2008, define esta função como:

$$B(\boldsymbol{\chi}) = -\sum_{j=1}^m \ln[-\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\chi})], \quad (34)$$

na qual,  $m$  é a totalidade de restrições.

Portanto, é esperado que a função  $B(\boldsymbol{\chi})$  seja nula dentro do conjunto  $S$  e infinita em sua fronteira, assegurando que apenas a região factível seja utilizada. Contudo, essa técnica criaria descontinuidade da função  $B(\boldsymbol{\chi})$ , e por isso, emprega-se a função mostrada na Equação (34) que se aproxima do infinito quando  $\boldsymbol{\chi}$  se aproxima da borda, que é contínua no interior do conjunto  $S$  e não negativa. Adicionalmente, a função objetivo  $r(\boldsymbol{\chi}, c)$  se aproxima da função objetivo original  $f(\boldsymbol{\chi})$  quando  $c \rightarrow 0$ , e nessa situação  $\boldsymbol{\chi}$  pode se aproximar do contorno de  $S$ . Maiores informações a respeito do método, bem como das condições de otimalidade que casos de otimização restritos devem respeitar, podem ser encontrados em Nocedal (1999), Bazaraa (2006) e Luenberg *et al.* (2008).

Determina-se uma sucessão de valores para  $c$  decrescentes e tendendo a zero, sendo que para cada  $l$ , onde  $l = 1, 2, \dots, cl > 0$  e  $cl+1 < cl$ , para a resolução do problema de otimização com barreira. A Equação (33) é resolvida por meio de métodos de otimização irrestrita, para cada  $cl$  até que  $r(\boldsymbol{\chi}, cl+1) \approx r(\boldsymbol{\chi}, cl)$ .

Utilizou-se o método de otimização irrestrita de quase-Newton para obtenção da matriz hessiana, pela Fórmula de Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970) - (BFGS), tem-se:

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k + \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^t}{\mathbf{y}_k^t \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{D}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^t \mathbf{D}_k^t}{\mathbf{s}_k^t \mathbf{D}_k \mathbf{s}_k}, \quad (35)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \end{aligned} \quad (36)$$

e para  $k=1$ ,  $\mathbf{D}=\mathbf{I}$ ; e  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  é o gradiente da função.

Uma direção de descida é aquela em que a função objetivo irá diminuir para um valor de passo, conforme Equação (37). É possível imaginar que se o gradiente aponta na direção de crescimento da função, então um plano perpendicular ao gradiente será um divisor entre as direções de crescimento e as direções de decrescimento.

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{D}_k^{-1} \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \quad (37)$$

Na busca do melhor desempenho do sistema de otimização determina-se o passo  $\alpha$  a ser dado no sentido da direção de descida de maneira que  $f(\boldsymbol{\chi}_k) > f(\boldsymbol{\chi}_{k+1})$ . Portanto,  $\boldsymbol{\chi}_{k+1}$  é alcançado a partir da direção de descida como:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k. \quad (38)$$

O passo  $\alpha$  é calculado com interpolação quadrática seguindo as condições de Wolfe.

Em geral, os programas e funções retornam um mínimo local, pois eles utilizam apenas uma bacia de atração (*basins of attraction*) do ponto de partida inicial  $\mathbf{x}_0$ . O resultado pode ser um mínimo global, mas não há garantia de que seja. O método das barreiras combinado com quase-Newton descrito anteriormente, encontra o ponto de mínimo local que pode ser ou não ser global. O intuito desse trabalho é encontrar o ponto de mínimo global e, portanto para assegurar tal fato, foi utilizada a função *GlobalSearch* do programa *Matlab*® (*Mathworks*, 2022).

Otimização é o processo de encontrar o ponto que minimiza uma função. Mais especificamente:

- Um mínimo local de uma função é um ponto onde o valor da função é menor ou igual ao valor em pontos próximos, mas possivelmente maior que em um ponto distante; e
- Um mínimo global é um ponto onde o valor da função é menor ou igual ao valor em todos os outros pontos viáveis.



Figura 7: Ponto de mínimo.

A função *GlobalSearch* contém propriedades que permitem executar repetidamente solucionadores locais para encontrar o ponto de mínimo global. Quando executado, o solucionador tenta localizar uma solução que tenha o menor valor da função objetivo. Tal fato ocorre, pois o solucionador é projetado para pesquisar em mais de uma bacia de atração. Inicialmente a *GlobalSearch* gera vários pontos de partida. Estes, então, usam um solucionador local para encontrar os ótimos nas bacias de atração dos pontos de partida iniciais.

A *GlobalSearch* contém informações sobre um mínimo local, incluindo localização, valor da função objetivo e ponto inicial ou pontos que levam ao mínimo. A partir disso é criado um vetor com as informações dos pontos de mínimos. O vetor é ordenado pelo valor da função objetivo, do menor (melhor) ao maior (pior). A *GlobalSearch* combina as soluções que coincidem com soluções previamente encontradas dentro das tolerâncias estipuladas.

Se uma função objetivo  $f(\mathbf{x})$  é suave, o vetor  $-\nabla f(\mathbf{x})$  aponta na direção de descida em que  $f(\mathbf{x})$  diminui mais rapidamente. A equação da direção descida mais íngreme, ou seja,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -\nabla f(\mathbf{x}(t)), \quad (39)$$

produz um caminho  $x(t)$  que vai para um mínimo local à medida que  $t$  aumenta. Geralmente, os valores iniciais  $x_0$  que estão próximos uns dos outros fornecem caminhos de descida mais íngremes que tendem ao mesmo ponto de mínimo. A bacia de atração para descida mais íngreme é o grupo de valores iniciais que conduzem ao mesmo mínimo local.

A Figura 8 mostra dois mínimos unidimensionais. A figura mostra diferentes bacias de atração com diferentes estilos de linha e mostra as direções de descida mais íngremes com as setas. Para esta figura, os pontos pretos representam os mínimos locais. Todo caminho de descida mais íngreme, começando em um ponto  $x_0$ , se dirige ao ponto preto na bacia contendo  $x_0$ .

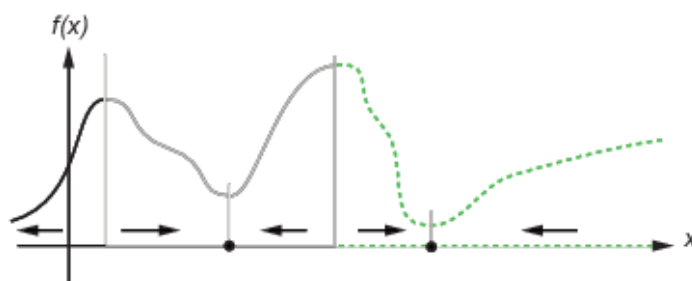


Figura 8: Bacias de atração (Mathworks, 2022).

Maiores detalhes do algoritmo da função *GlobalSearch* podem ser encontrados em Mathworks website e em Ugray *et al.* (2007).

### 3.4.2 Considerações Finais

A fim de garantir que o ponto de mínimo seja global é utilizada a função *GlobalSearch* do *software Matlab*®, empregando, portanto mais de uma bacia de atração de solucionadores locais que convergem para o ponto de mínimo global.

O problema é equacionado, por meio dos métodos das barreiras e quase-Newton para mínimos quadrados, restringindo-se o valor da variável inteira,  $x$ , definida no ponto inicial. A partir do ponto ótimo encontrado desse subproblema NLP, é crível montar o MILP associado pelo método de “*Outer-Approximation*”, apresentado na Equação 31.

Portanto, monta-se o MILP associado e emprega-se o método de “*Branch and Bound*” e o algoritmo simplex para obter a solução ótima e, por conseguinte, geram-se valores novos para as variáveis inteiras, e, portanto, cria-se outro subproblema NLP. A metodologia é então repetida até a convergência.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As ferramentas necessárias para a solução da equação de movimento, nos domínios da frequência e do tempo e, de sistemas rotativos sustentados por mancais hidrodinâmicos, foram apresentadas nos capítulos anteriores. Portanto, este capítulo tem por objetivo apresentar e discutir os resultados alcançados com o modelo proposto.

A modelagem de rotores foi desenvolvida pelo MEF, onde a função para resolução dos mancais, que são do tipo hidrodinâmicos cilíndricos, emprega a teoria de mancal curto desenvolvida por Dubois e Ocvirk (1953) para resolução da equação de Osborne Reynolds (1886), baseando-se em coeficientes lineares, conforme Krämer (1993).

Adicionalmente, foram implementados computacionalmente os programas para a resolução de sistemas rotativos no domínio da frequência com a FRD para a identificação do desbalanceamento.

Para adição do ruído foi utilizada a função *awgn* (*Add White Gaussian Noise*) do programa *Matlab*®.

$$\bar{q} = awgn(\mathbf{y}, snr, signal\ power), \quad (40)$$

em que,  $\{\mathbf{y}\}$  é o vetor de vibração numérico abrangendo os graus de liberdade dos mancais; *SNR* é a proporção entre a potência do sinal e a potência do ruído em decibéis, especificada como um escalar; e *signal power* é a potência do sinal, especificada como 'medida', portanto, o nível de sinal de  $\mathbf{y}$  é calculado para determinar o nível de ruído apropriado com base no valor de *SNR*.

A função de adição do ruído gaussiano branco (*awgn*) é um modelo de ruído simples que representa o movimento do elétron em rádio frequência frente final de um receptor. Como o nome indica, o ruído é adicionado ao sinal. O ruído é chamado de “branco” porque possui espectro plano em toda a largura de banda de amostragem. Analogamente, a cor branca contém níveis de potência espectral iguais em todas as frequências do espectro de luz visível. O ruído é gaussiano porque sua amplitude pode ser modelada com uma distribuição de probabilidade normal.

A seção 4.1 apresenta a solução de resposta em frequência para uma máquina rotativa composta por um disco com a adição de ruído *awgn*, variando de 40 a 65 com passo de 5. Os

casos analisados contam com massas de desbalanceamentos nos nós possíveis do disco, de forma a gerar várias condições de vibração para realização do balanceamento e verificar a convergência do modelo, resultando em duas possibilidades por disco.

Na seção 4.2, é desenvolvido um sistema rotativo composto por 2 discos com momentos de desbalanceamentos defasados de  $180^\circ$  e  $90^\circ$  e na mesma fase com a adição de ruído *awgn* variando de 40 a 65 com passo de 5 para todas as combinações de nós possíveis nos discos, similar a seção 4,1, atingindo 4 possibilidades.

Aumentando o nível de complexidade do sistema rotativo, na seção 4.3 é modelado um sistema rotativo com 3 discos com a adição de ruído *awgn* variando de 40 a 65 com passo de 5 para todas as combinações de nós possíveis nos discos, analogamente as seções 4,1 e 4.2, alcançando 8 possibilidades.

Adicionalmente, a seção 4.4 demonstra o emprego de momentos de desbalanceamento ao longo do eixo fora dos discos e verifica-se a eficácia do procedimento ao efetuar o balanceamento pelo método proposto no presente trabalho.

#### **4.1 Sistema Rotativo composto por 1 disco**

Inicialmente, um modelo de rotor Laval foi simulado para identificação do desbalanceamento. Apesar de simples, esse representa a pluralidade dos efeitos da dinâmica de sistemas rotativos. Detalhes da geometria e propriedades utilizadas são mostrados na Figura 9 e Tabela 1. O sistema rotativo é formado de um eixo de aço, com  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  e  $E = 200 \text{ GPa}$ , com comprimento de 700 mm e diâmetro de 12 mm, particionado em 14 elementos de viga cilíndrica, um elemento de disco, de aço, localizado no nó 9 e sustentado por dois mancais hidrodinâmicos iguais, posicionados nos nós 3 e 13, cujas informações são visualizadas na Tabela 2. A viscosidade do filme de óleo é adotada como invariável. A fonte de excitação é o desbalanceamento rotativo, posicionado no nó do disco. Foi considerada uma massa desbalanceada com  $m=3,2 \text{ g}$ , situada a 37 mm do centro do disco, com posição angular de  $300^\circ$  em relação à horizontal, acompanhando a direção e o sentido estabelecidos pelo círculo trigonométrico. O coeficiente de proporcionalidade para o amortecimento em relação a rigidez do eixo, neste caso, foi  $\beta = 1,5 \times 10^{-4}$ . Destaca-se que o valor de  $\beta$  utilizado, foi baseado em dados experimentais obtidos por Alves 2018.



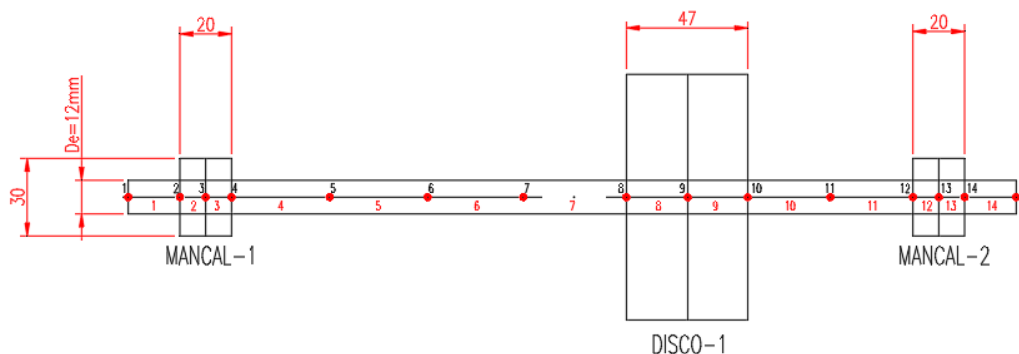


Figura 9: Sistema rotativo composto por um disco.

Tabela 1 – Detalhes do Sistema rotativo composto por um disco

Número do Elemento	Tipo de Elemento	Diâmetro interno [mm]	Diâmetro externo [mm]	Comprimento [mm]
1, 14	Viga	0	12	40
3, 4, 12, 13	Viga	0	31	10
4, 5,6,7	Viga	0	12	93,5
8, 9	Viga	0	13,25	23,5
10, 11	Viga	0	12	79,5
15	Disco	13,25	94,7	47

Tabela 2 – Parâmetros dos mancais do Sistema rotativo composto por um disco.

Diâmetro do Mancal ( $D$ )	31 mm
Comprimento do mancal ( $L$ )	20 mm
Folga radial do mancal ( $C_R$ )	90 $\mu$ m
Viscosidade do lubrificante ( $\mu$ )	65 mPa.s

A primeira velocidade crítica é 147 rad/s (23,40 Hz), conforme mostra a Figura 10, sendo essa velocidade empregada para a análise, tendo em vista que, nessa condição, o sistema rotativo tem maiores níveis de amplitudes de vibração.

Salienta-se que na velocidade crítica a inércia predomina, resultando em níveis de amplitudes similares nas direções  $y$  e  $z$ . Devido às escalas das figuras, os níveis de vibrações nas direções  $y$  e  $z$  aparentam iguais, contudo, enfatiza-se que são diferentes nas respectivas direções, conforme observado nas variações de fase do sistema rotativo.

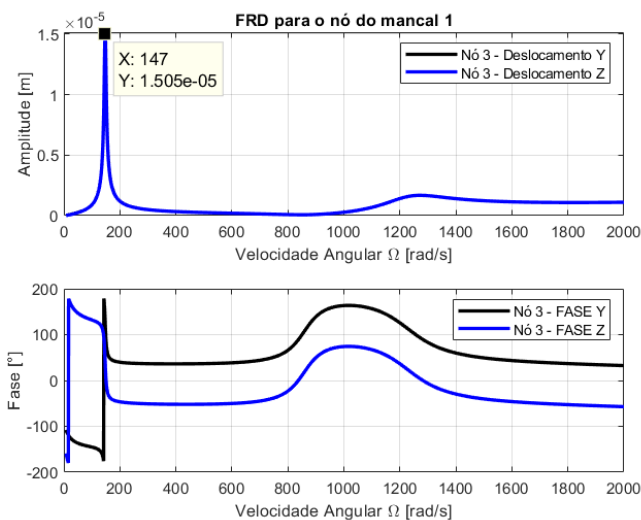


Figura 10: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3).

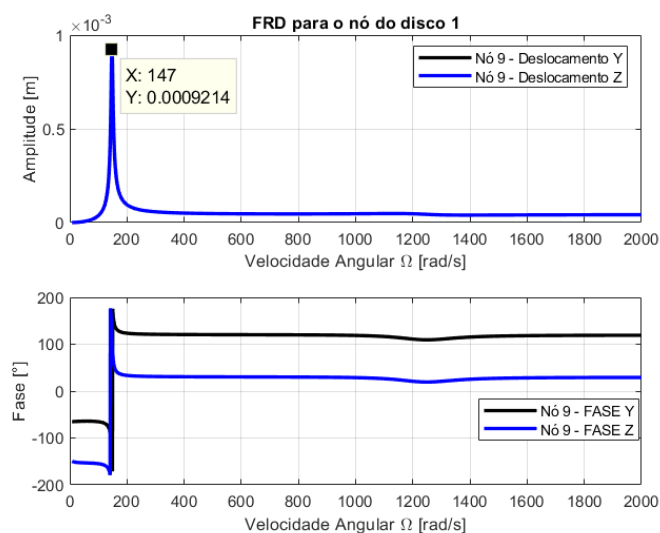


Figura 11: Função resposta ao desbalanceamento do Disco (nó 9).

O Diagrama de Campbell apresentado na Figura 12, mostra as frequências naturais do sistema rotativo e seus respectivos modos de corpo rígido e flexão.

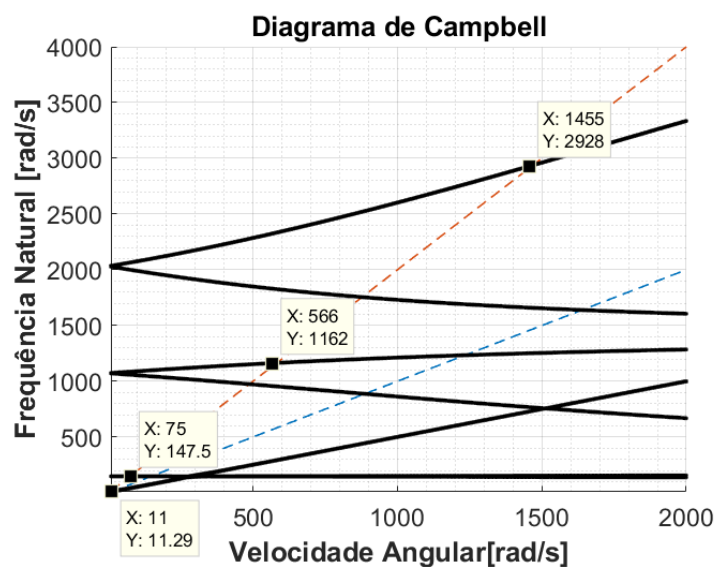


Figura 12: Diagrama de Campbell

Foram impostos momentos de desbalanceamentos para os nós 8 e 10, separadamente (Figura 9), para a faixa de ruído de 40 a 65 awgn com passo de 5 e os resultados foram satisfatórios.

Desta forma, apenas os resultados obtidos para identificação do desbalanceamento para *awgn-40* e seus respectivos erros serão apresentados na Tabela 3. A FRD com adição de ruído é exibida apenas para o caso dos parâmetros do desbalanceamento impostos no nó 8 do sistema rotativo.

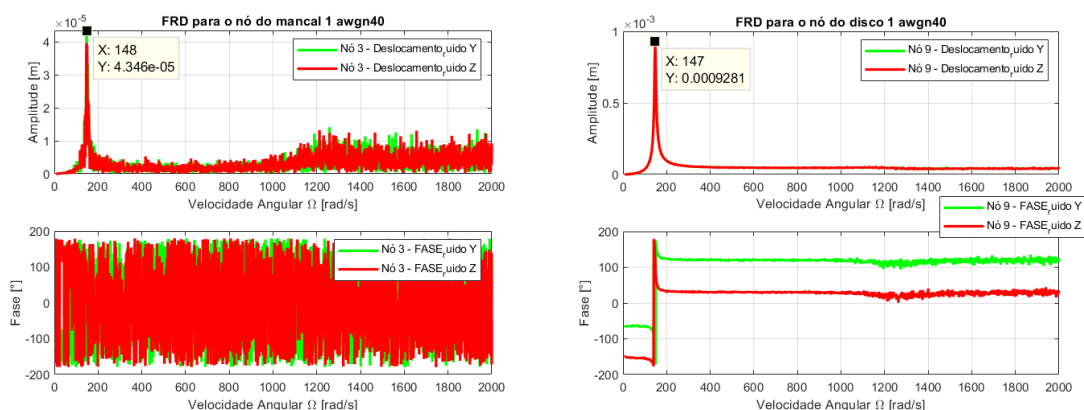


Figura 13: Função resposta ao desbalanceamento com *awgn-40* para o manca 1 e disco.

Tabela 3 – Valores encontrados e erros para os nós 8 e 10 com *awgn-40*.

	Esperado	Nó 8	Erro nó 8	Nó 10	Erro nó 10
Me01	1,184E-04	1,181E-04	-0,221%	1,184E-04	-0,032%
Fase01	5,236	5,231	-0,104%	5,233	-0,052%
Nó1	8/10	8	0,000%	10	0,000%
Fval		1,834E-08		1,781E-08	

Ressalta-se que mesmo para *SNR* elevado de *awgn-40*, o modelo proposto convergiu corretamente, com erro máximo de -0,221% para o momento de desbalanceamento do nó 8, sendo que neste caso, a amplitude máxima é a aproximadamente o triplo da amplitude sem adição de ruído.

A partir de *awgn-55* os erros são praticamente nulos, uma vez que o sinal é preponderante sobre o ruído.

O sistema rotativo também foi resolvido do domínio do tempo por espaço de estados, pelo algoritmo de Runge-Kutta disponível na função *ode15s* do programa *Matlab*®.

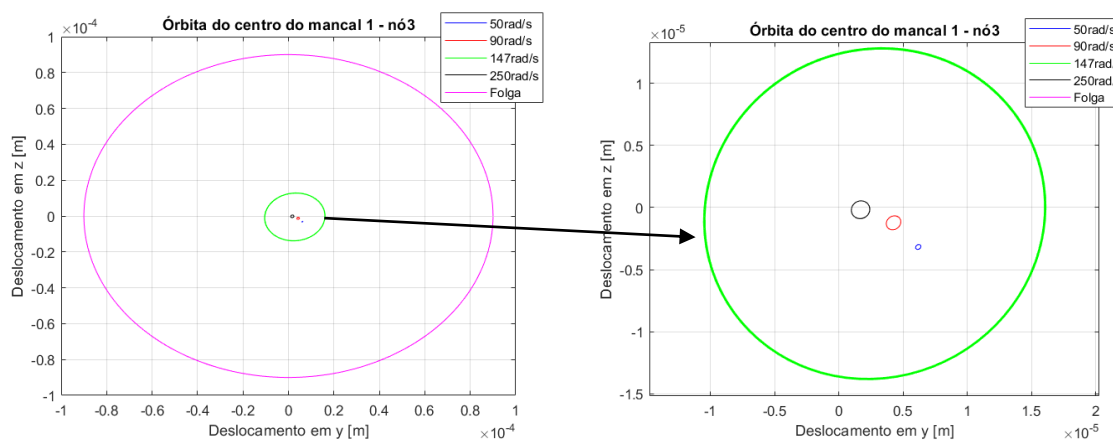


Figura 14: Órbitas do Mancal 1 (nó 3) para velocidades de 50, 90, 147 e 250 rad/s.

As órbitas do mancal 1 para todos os casos, inclusive para a velocidade crítica de 147 rad/s, respeitam a folga radial do mancal e tem um comportamento coerente em relação a auto centragem do eixo no interior do mancal, com o acréscimo da velocidade de rotação.

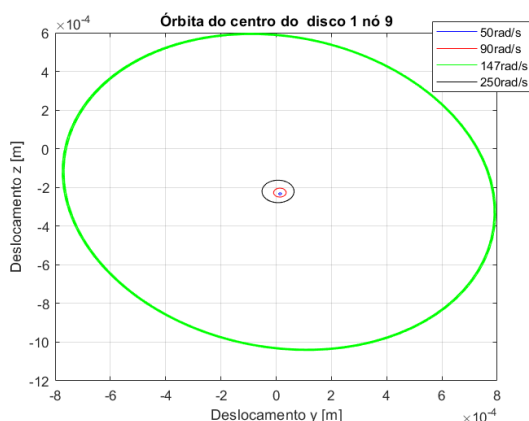


Figura 15: Órbitas do Disco (nó 9) para velocidades de 50, 90, 147 e 250 rad/s.

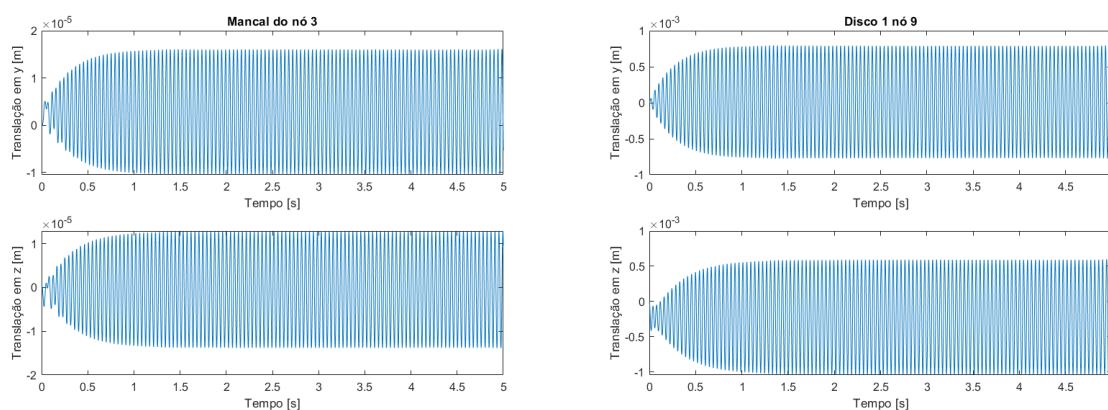


Figura 16: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 3) e Disco (nó 9) para 147 rad/s.

Os movimentos de translação do mancal e disco para velocidade crítica de 147 rad/s estabilizam na amplitude máxima em cerca de 1,0 segundo, como pode ser verificado na Figura 16.

## 4.2 Sistema Rotativo composto por 2 discos

Este modelo considera dois discos, e estes estão distanciados a 140,1mm de cada mancal. A Figura 17 e a Tabela 4 demonstram as informações da modelagem pelo MEF desse novo arranjo.

O sistema rotativo é formado de um eixo de aço, com  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  e  $E = 200 \text{ GPa}$ , com comprimento de 700 mm e diâmetro de 15 mm, particionado em 18 elementos de viga cilíndrica, dois elementos de disco manufacturados de aço, localizados nos nós 7 e 13 e sustentado por dois mancais hidrodinâmicos iguais posicionados nos nós 3 e 17, cujas informações são visualizadas na Tabela 5.

A viscosidade do filme de óleo é assumida como invariável. As fontes de excitações são os desbalanceamentos rotativos localizados nos nós dos discos. Foram consideradas massas desbalanceadas com  $m=3,2 \text{ g}$ , situadas a 37 mm do centro de ambos os discos, defasadas de  $180^\circ$  e  $90^\circ$  e na mesma fase em relação à horizontal. O coeficiente de proporcionalidade para amortecimento do eixo em função da rigidez, neste caso, foi  $\beta = 1,5 \times 10^{-4}$ , novamente, levando em consideração o valor obtido experimentalmente por Alves (2018).

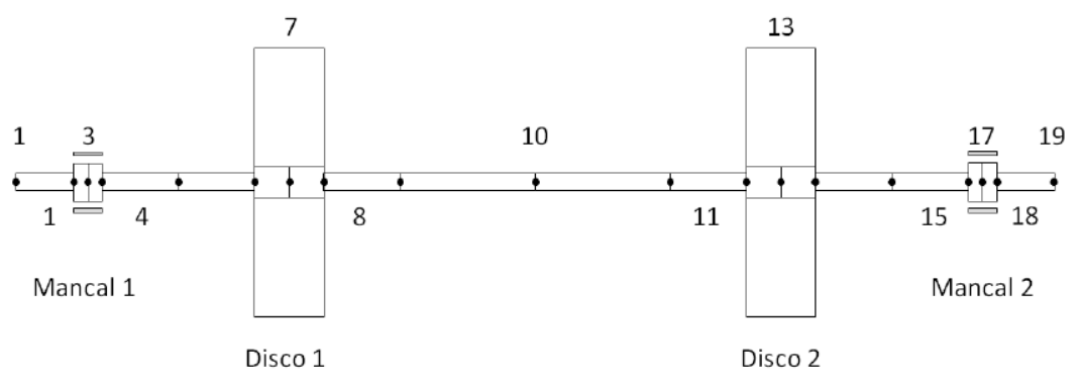


Figura 17: Modelo de sistema rotativo contendo dois discos (Alves, 2018).

Tabela 4 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo dois discos (Alves, 2018).

Número do Elemento	Tipo de Elemento	Diâmetro interno [mm]	Diâmetro externo [mm]	Comprimento [mm]
1, 18	Viga	0	15	40
2, 3, 16, 17	Viga	0	31	10
4, 5, 8, 11, 14, 15	Viga	0	15	53,3
9, 10	Viga	0	15	83,1
6, 7, 12, 13	Viga	0	23,5	23,5
19 e 20	Disco	23,5	94,7	47

Tabela 5 – Parâmetros dos mancais do modelo de sistema rotativo contendo dois discos  
(Alves, 2018).

Diâmetro do Mancal ( $D$ )	31 mm
Comprimento do mancal ( $L$ )	20 mm
Folga radial do mancal ( $C_R$ )	90 $\mu\text{m}$
Viscosidade do lubrificante ( $\mu$ )	28 mPa.s

#### 4.2.1 Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas defasadas de $180^\circ$

As duas primeiras velocidades críticas do sistema rotativo são aproximadamente 217 e 649 rad/s, conforme aponta a Figura 18. As massas desbalanceadas foram simuladas posicionadas a  $45^\circ$  no disco 1 e  $225^\circ$  no disco 2, em relação à horizontal. Primeiramente, calcularam-se os parâmetros do desbalanceamento apenas com a velocidade crítica de 649 rad/s sem adição de ruído para os nós 6 e 12 e os valores encontrados e seus respectivos erros foram satisfatórios, sendo o maior erro de -1,563% para o momento de desbalanceamento no disco 1, conforme indica a Tabela 6.

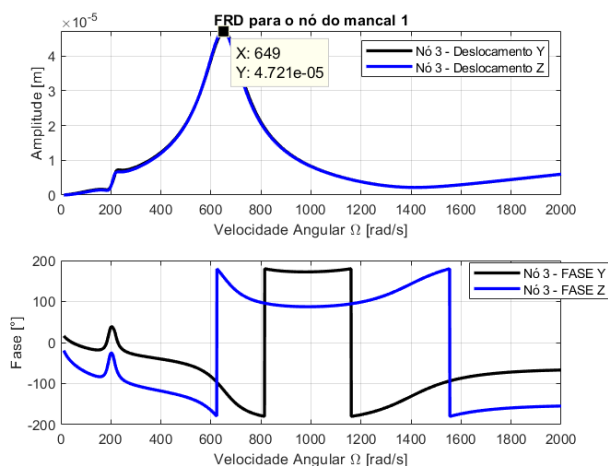


Figura 18: Função resposta ao desbalanceamento do Mancais 1 (nó 3) – fases a  $180^\circ$ .

Verifica-se que com as massas desbalanceadas de  $180^\circ$  a amplitude da segunda velocidade crítica prevalece sobre a primeira, conforme ilustra a Figura 18.

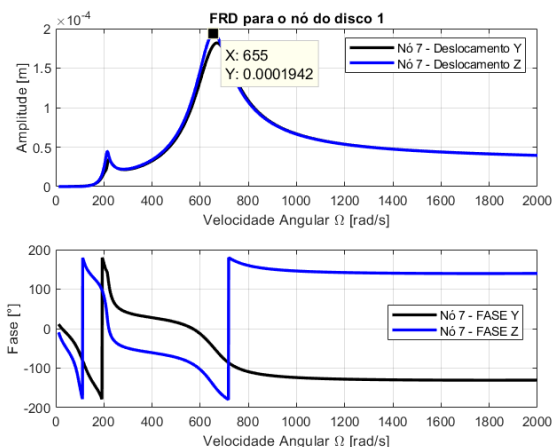


Figura 19: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) – fases a 180°.

A Figura 20 novamente apresenta o Diagrama de Campbell, onde é possível observar as frequências naturais para os modos de corpo rígido e os três primeiros modos de flexão.

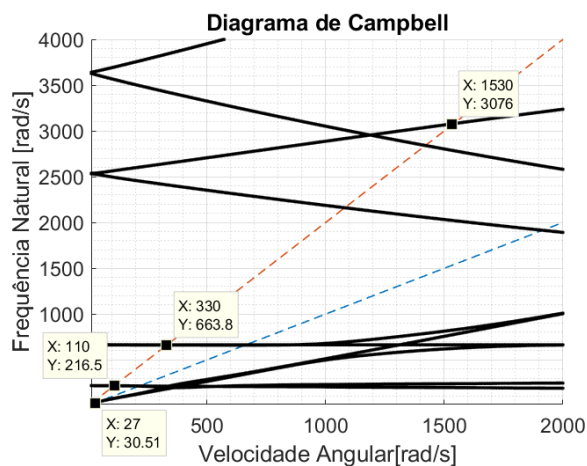


Figura 20: Diagrama de Campbell

Tabela 6 – Valores encontrados e erros para os nós 6 e 12 sem adicionar o ruído.

	Esperado	Nó 6-12	Erro nós 6-12
Me01	1,184E-04	1,166E-04	-1,563%
Fase01	0,785	0,794	1,146%
Nó1	6	6	0,000%
Me02	1,184E-04	1,167E-04	-1,478%
Fase02	3,927	3,919	-0,206%
Nó2	12	12	0,000%



Contudo, a fim de melhorar os resultados, foram simulados os parâmetros do desbalanceamento utilizando as duas velocidades críticas supracitadas para todas as combinações de nós possíveis do sistema rotativo com a adição de ruído *awgn* de 40 até 65 com passo de 5. Os resultados obtidos melhoram consideravelmente. Os maiores erros foram alcançados para *awgn*-40, sendo -0.598% para fase do disco 1 na combinação dos nós 6 e 14 e para a massa desbalanceada do disco 2, combinação dos nós 8 e 14 com o valor de -0,625%, de acordo com Tabela 7.

Os demais resultados alcançados para identificação do desbalanceamento e seus respectivos erros foram satisfatórios. A FRD com adição de ruído é mostrada apenas para o caso dos parâmetros do desbalanceamento impostos nos nós 6 e 12 para *awgn*-40.

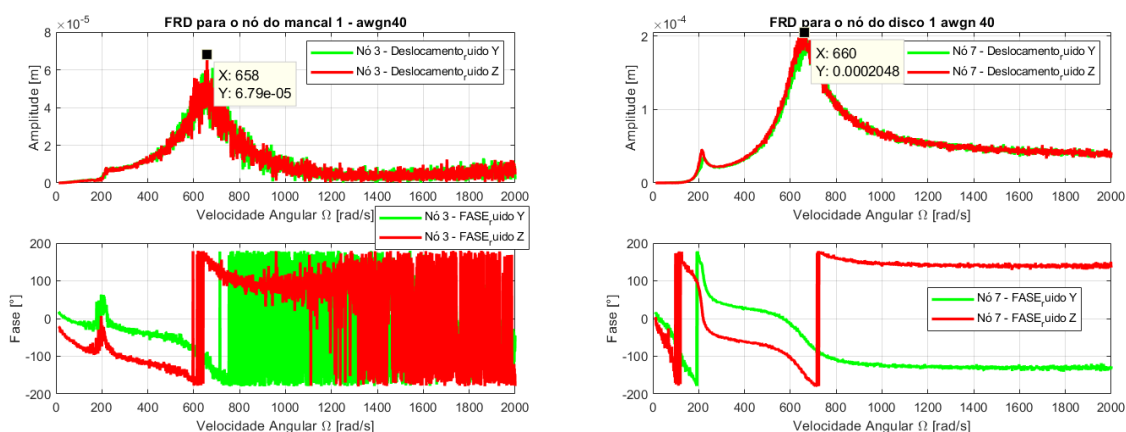


Figura 21: FRD com *awgn*-40 para o mancal 1 e disco 1 - fases a 180°.

Tabela 7 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para *awgn*-40 - fases a 180°.

	Esperado	Nós 6-12	Erro nós 6-12	Nós 8-12	Erro nós 8-12	Nós 6-14	Erro nós 6-14	Nós 8-14	Erro nós 8-14
Me01	1,184E-04	1,184E-04	0,000%	1,183E-04	-0,051%	1,184E-04	0,000%	1,184E-04	-0,042%
Fase01	0,785	0,788	0,267%	0,785	-0,025%	0,781	-0,598%	0,784	-0,178%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,184E-04	0,000%	1,184E-04	0,000%	1,184E-04	0,000%	1,177E-04	-0,625%
Fase02	3,927	3,931	0,097%	3,922	-0,132%	3,926	-0,036%	3,926	-0,023%
Nó2	12/14	12	0,000%	12	0,000%	14	0,000%	14	0,000%

Ressalta-se que, mesmo para sinal de ruído de *awgn-40*, o modelo proposto logrou êxito. Para os parâmetros de desbalanceamento da combinação dos nós 6 e 12 a amplitude máxima também é maior do que a amplitude sem adição de ruído.

Contudo, sabe-se que para mancais hidrodinâmicos a velocidade média do fluido é aproximadamente a metade da velocidade de rotação do eixo. Este fato ocasiona que, ao dobrar a velocidade de rotação do eixo o fluido atinge a velocidade crítica do sistema rotativo o que ocasiona na instabilidade fluido induzida. Os rotores ficam instáveis e não operam a partir da faixa de rotação que causa essa anomalia. No caso deste sistema rotativo, em aproximadamente 402 rad/s, o fator de amortecimento modal torna-se negativo impossibilitando uma operação segura do rotor, assim como pode ser observado na Figura 22.

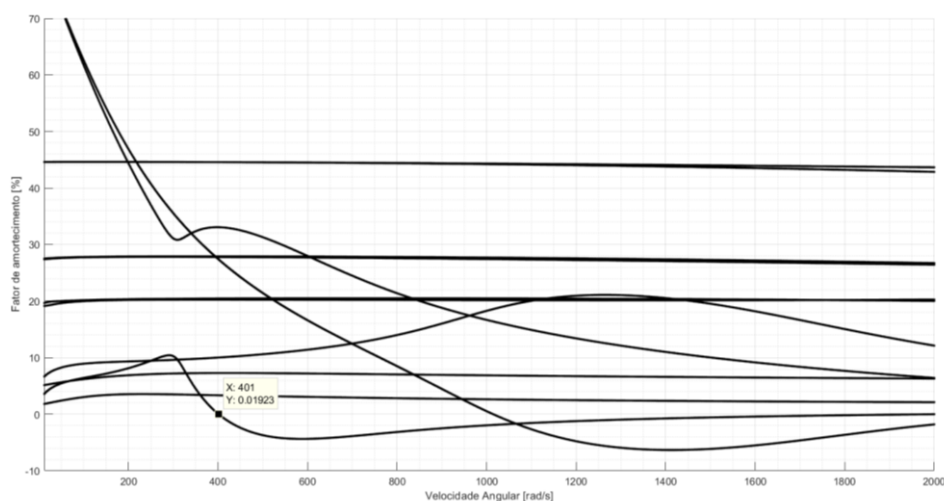


Figura 22: Fator de amortecimento modal do sistema rotativo composto por dois discos.

Em mancais de rolamentos, por exemplo, não há o inconveniente da instabilidade fluida induzida e, se as amplitudes de vibração não forem danosas ao correto funcionamento do equipamento, não há problemas em trabalhar com todas as velocidades críticas na montagem da função objetivo.

Entretanto, em uma análise experimental envolvendo mancais a lubrificação hidrodinâmica, não seria possível trabalhar com a segunda velocidade crítica de 649 rad/s, uma vez que a mesma se encontra acima da velocidade da instabilidade fluido induzida. Destaca-se que a primeira velocidade crítica respeita o limite de deslocamentos de cerca de 40% da folga radial do mancal e novas simulações com velocidades abaixo, na primeira

crítica e acima desta velocidade foram adicionadas na busca da melhor solução que respeite as condições de contorno do problema, inicialmente, sem adição de ruído.

Rotores rígidos geralmente trabalham abaixo da primeira velocidade crítica e conseqüentemente são balanceados em uma única velocidade de rotação. Contudo, rotores flexíveis que trabalham acima da primeira velocidade crítica necessitam ser balanceados em várias velocidades de rotação, de acordo com norma ISO 21940-12. Neste caso o rotor é balanceado sucessivamente na base modal numa série de velocidades de balanceamento, uma a cada vez. Em outras palavras, cada modo com sua respectiva velocidade crítica dentro de sua faixa de velocidades de operação, deve ser balanceado em turnos até atingir o modo que contém a mais alta velocidade de balanceamento. As velocidades de balanceamento podem ser selecionadas próximas das velocidades de ressonância, dentro da faixa de operação do rotor. A norma ISO 21940-12 não tem informações de rotores que são influenciados significativamente a partir do terceiro modo de balanceamento.

Utilizando as diretrizes da referida norma, primeiro foram testadas velocidades próximas da primeira crítica, tanto superiores como inferiores, as quais foram aumentadas e decrescidas, respectivamente e, na primeira velocidade crítica, na busca dos menores valores de funções objetivos. Sendo que o limite superior de operação do sistema rotativo é limitado a 401 rad/s, conforme Figura 22. As combinações das velocidades 217 e 270 rad/s e 190, 240 e 270 rad/s obtiveram os menores valores de funções objetivos e, portanto, foram selecionadas para adição de ruído e verificação dos parâmetros do desbalanceamento.

Nestas duas combinações supracitadas, foi adicionado o ruído *awgn-40* para todas as combinações de nós possíveis dos discos e todos os casos convergiram satisfatoriamente, sendo o maior erro encontrado de -4,337% para o arranjo dos nós 6-14, nas velocidades 217 e 270 rad/s, para o momento de desbalanceamento do disco 2, de acordo com a Tabela 9. Destaca-se que nestas duas combinações o sistema rotativo obteve um balanceamento teórico efetivo, conforme demonstram as Figuras 23 a 26.

Tabela 8 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para *awgn-40* - fases a 180° para as velocidades de 190, 240 e 270 rad/s.

	Esperado	Nós 6-12	Erro nós 6-12	Nós 8-12	Erro nós 8-12	Nós 6-14	Erro nós 6-14	Nós 8-14	Erro nós 8-14
Me01	1,184E-04	1,145E-04	-3,275%	1,140E-04	-3,694%	1,145E-04	-3,300%	1,180E-04	-0,354%
Fase01	0,785	0,779	-0,752%	0,785	-0,114%	0,784	-0,220%	0,785	-0,023%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,154E-04	-2,498%	1,140E-04	-3,712%	1,145E-04	-3,275%	1,179E-04	-0,386%
Fase02	3,927	3,923	-0,098%	3,926	-0,024%	3,925	-0,046%	3,927	0,012%
Nó2	12/14	12	0,000%	12	0,000%	14	0,000%	14	0,000%
Fval		4,733E-11		3,628E-11		3,502E-11		1,310E-11	

Tabela 9 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para *awgn-40* - fases a 180° para as velocidades de 217 e 270 rad/s.

	Esperado	Nós 6-12	Erro nós 6-12	Nós 8-12	Erro nós 8-12	Nós 6-14	Erro nós 6-14	Nós 8-14	Erro nós 8-14
Me01	1,184E-04	1,147E-04	-3,110%	1,150E-04	-2,912%	1,133E-04	-4,324%	1,156E-04	-2,359%
Fase01	0,785	0,787	0,002	0,783	-0,257%	0,785	-0,001	0,785	-0,009%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,157E-04	-2,311%	1,150E-04	-2,896%	1,133E-04	-4,337%	1,148E-04	-3,050%
Fase02	3,927	3,929	0,050%	3,925	-0,055%	3,926	-0,015%	3,925	-0,042%
Nó2	12/14	12	0,000%	12	0,000%	14	0,000%	14	0,000%
Fval		3,525E-11		2,386E-11		3,350E-11		2,931E-11	

Observa-se, que após a realização do balanceamento teórico a amplitude no mancal 1 e disco 1 diminuíram, 96,89% (Figura 23) e 96,95% (Figura 24), respectivamente, com a utilização das velocidades de 217 e 270 rad/s na montagem da função objetivo.

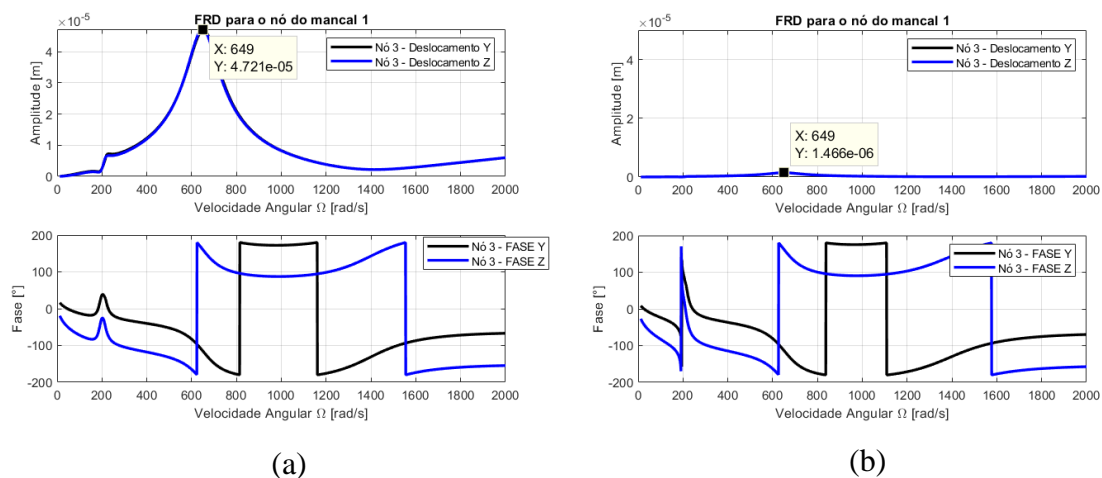


Figura 23: FRD do Mancal 1 (nó 3) – Nós 6-12 (velocidades de 217 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

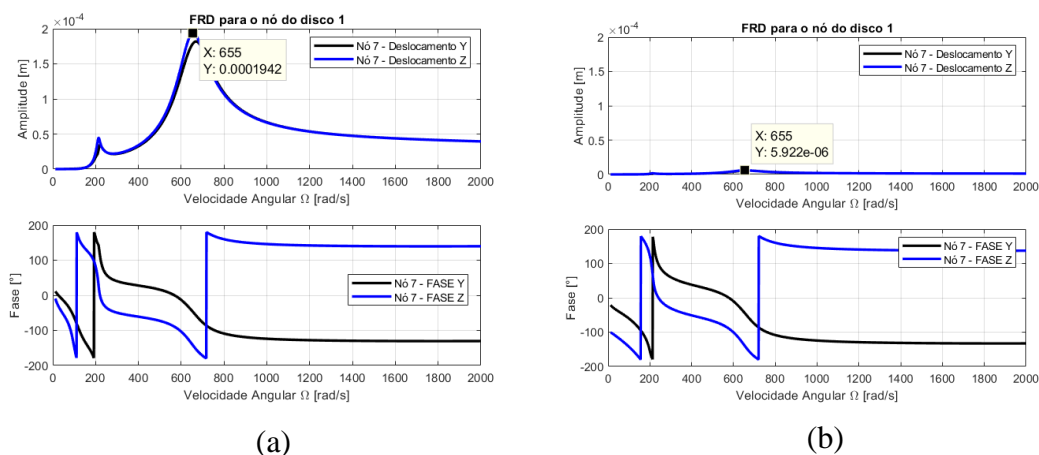


Figura 24: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-12 (velocidades de 217 e 270 rad/s). Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

Por outro lado, com a realização do balanceamento teórico utilizando as velocidades de 190, 240 e 270 rad/s na montagem da função objetivo, a amplitude no mancal 1 e disco 1 decresceram, 97,08% (Figura 25) e 97,06% (Figura 26), de modo respectivo. Pontua-se que Yao *et al.* (2020) obtiveram os melhores resultados em um balanceamento dinâmico para rotores flexíveis, compostos por dois discos e suportados por mancais de rolamentos na montagem de uma função objetivo, com a utilização de uma velocidade abaixo da primeira crítica e duas velocidades entre a primeira e segunda críticas.

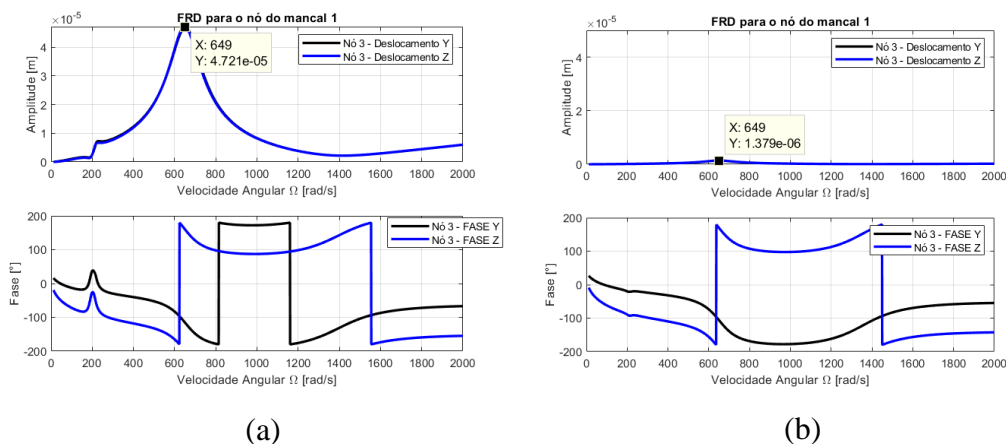


Figura 25: FRD do Manca 1 (nó 3) – Nós 6-12 (velocidades de 190, 240 e 270 rad/s).

Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

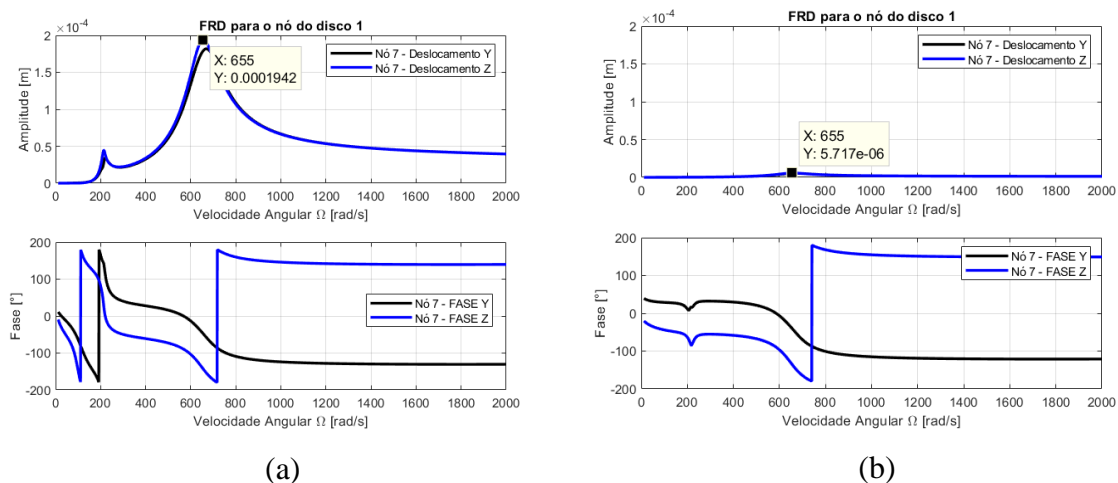


Figura 26: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-12 (velocidades de 190, 240 e 270 rad/s).

Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

#### 4.2.2 Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas defasadas de $90^\circ$

As massas desbalanceadas foram simuladas posicionadas a  $45^\circ$  no disco 1 e  $135^\circ$  no disco 2, em relação à horizontal, seguindo a mesma metodologia descrita nos subitens 4.2 e

4.2.1 apenas para as duas velocidades críticas, a fim de verificar a robustez do modelo proposto.

Destaca-se que com as massas desbalanceadas a  $90^\circ$ , as amplitudes da primeira e segunda velocidades críticas são igualmente excitadas, conforme ilustra a Figura 27.

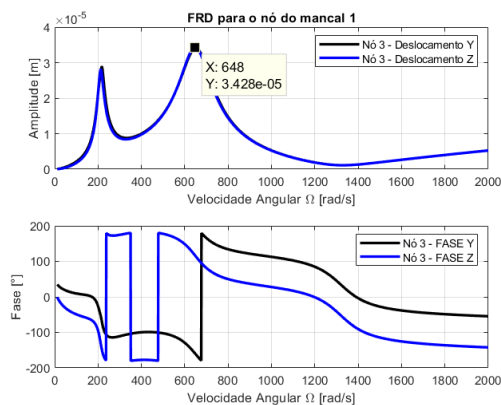


Figura 27: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3) - fases a  $90^\circ$ .

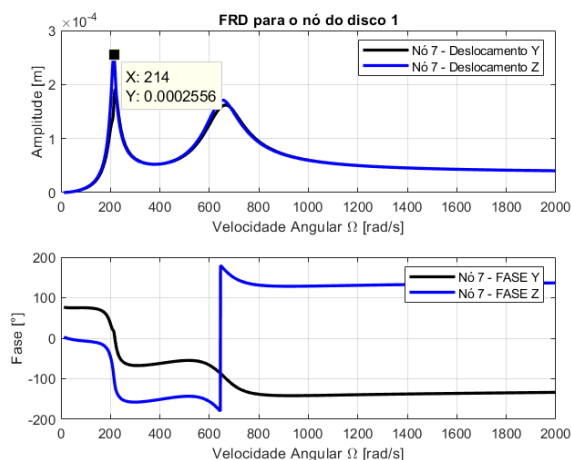


Figura 28: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) - fases a  $90^\circ$ .

Os maiores erros ocorreram na situação de awgn-40 para a combinação de nós 8 e 12, sendo 0,607% para fase do disco 1 e -0,485% para massa desbalanceada do disco 2, de acordo com Tabela 10.

Os demais resultados alcançados para identificação do desbalanceamento e seus respectivos erros foram satisfatórios. A FRD com adição de ruído é mostrada apenas para o

caso dos parâmetros do desbalanceamento impostos para os nós 6 e 12 dos discos para awgn-40.

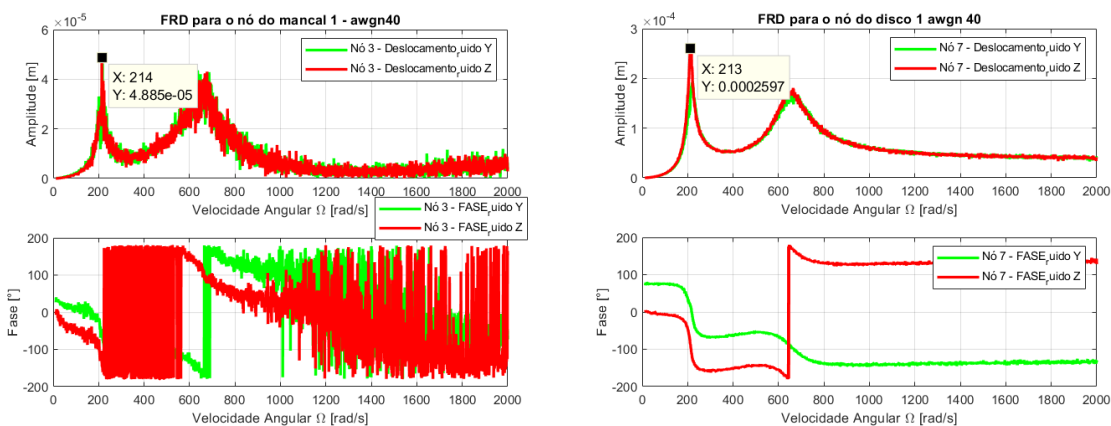


Figura 29: FRD com *awgn-40* para o mancal 1 e disco 1- fases a  $90^\circ$ .

Tabela 10 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para *awgn-40* - fases a  $90^\circ$ .

	Esperado	Nó 6-12	Erro nós 6-12	Nó 8-12	Erro nós 8-12	Nó 6-14	Erro nós 6-14	Nó 8-14	Erro nós 8-14
Me01	1,184E-04	1,183E-04	-0,113%	1,178E-04	-0,475%	1,183E-04	-0,049%	1,183E-04	-0,090%
Fase01	0,785	0,786	0,026%	0,790	0,607%	0,787	0,202%	0,786	0,118%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,178E-04	-0,473%	1,178E-04	-0,485%	1,183E-04	-0,087%	1,184E-04	-0,014%
Fase02	2,356	2,356	-0,017%	2,355	-0,071%	2,356	-0,003%	2,359	0,132%
Nó2	12/14	12	0,000%	12	0,000%	14	0,000%	14	0,000%

Salienta-se que mesmo para *SNR* de *awgn-40*, o modelo proposto manteve seu desempenho. Para os parâmetros de desbalanceamento da combinação dos nós 6 e 12 a amplitude máxima é 42,50% maior do que a amplitude sem adição de ruído.

O sistema rotativo também foi resolvido do domínio do tempo pelo algoritmo de Runge-Kutta disponível na função *ode15s* do programa *Matlab®*, com a utilização da técnica de espaço de estados.



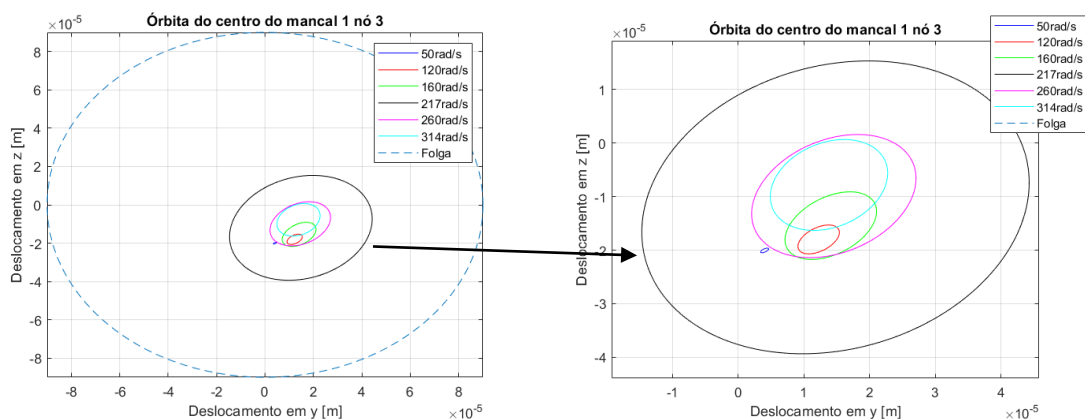


Figura 30: Órbitas do Mancal 1 (nó 3) para velocidades de 50, 120, 160, 217, 260 e 314 rad/s.

Nota-se, como previsto, que com o acréscimo da revolução do eixo, os centros das órbitas se movimentam para o centro geométrico do mancal, tendo em vista que para cada revolução a distribuição de pressões se altera para balancear as cargas que estão sendo impostas no mancal.

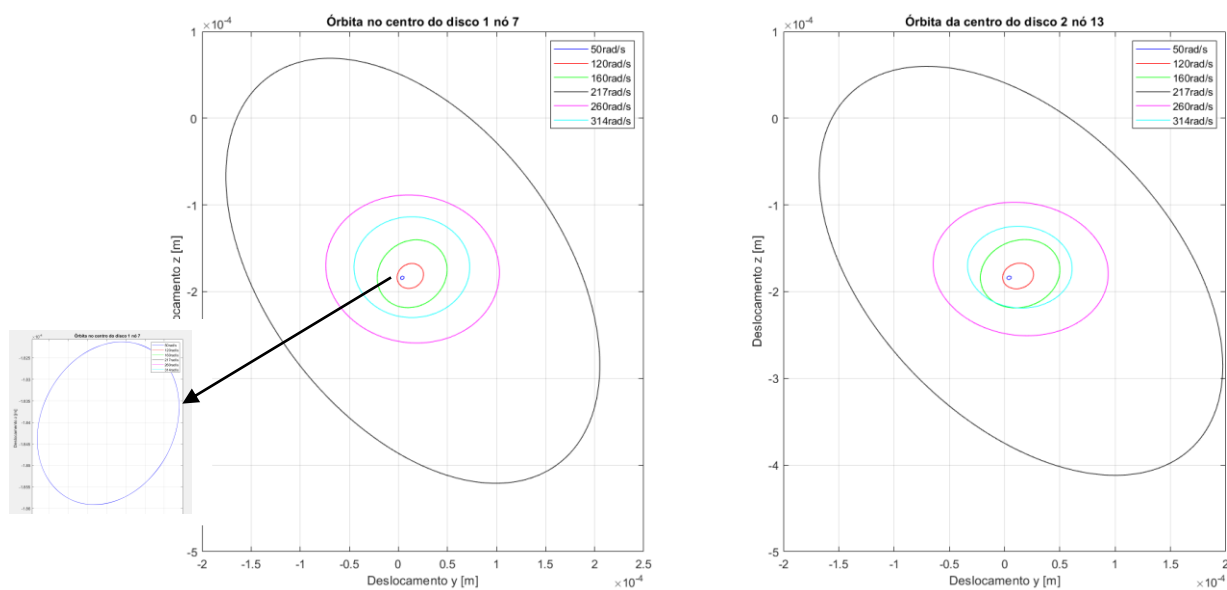


Figura 31: Órbitas dos Discos (nós 7 e 13) para as velocidades de 50, 120, 160, 217, 260 e 314 rad/s.

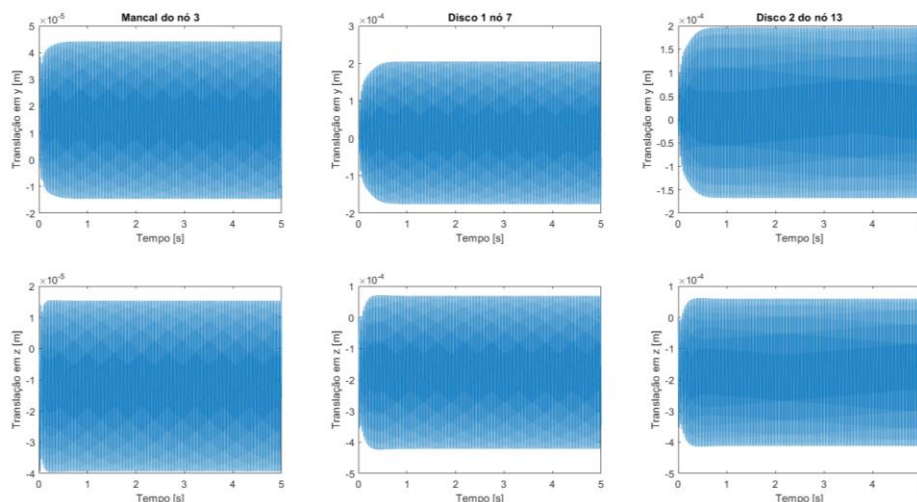


Figura 32: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 3) e Discos (nós 7 e 13) para 217 rad/s.

Os movimentos de translação do mancal 1 (nó 3) e discos 1 e 2 (nós 7 e 13, respectivamente) para velocidade crítica de 217 rad/s, convergem para suas amplitudes máximas antes de 0,5 segundos, como pode ser verificado na Figura 32.

#### 4.2.3 Sistema Rotativo composto por 2 discos com massas desbalanceadas na mesma fase

As massas desbalanceadas foram simuladas posicionadas a  $45^\circ$  no disco 1 e  $45^\circ$  no disco 2, em relação à horizontal, seguindo a mesma metodologia descrita nos subitens 4.2, 4.2.1 e 4.2.2, apenas para as duas velocidades críticas, novamente com intuito de verificar a acurácia do método proposto.

Destaca-se que com as massas desbalanceadas na mesma fase, a amplitude da primeira velocidade crítica prevalece sobre a segunda, conforme apresenta a Figura 33.

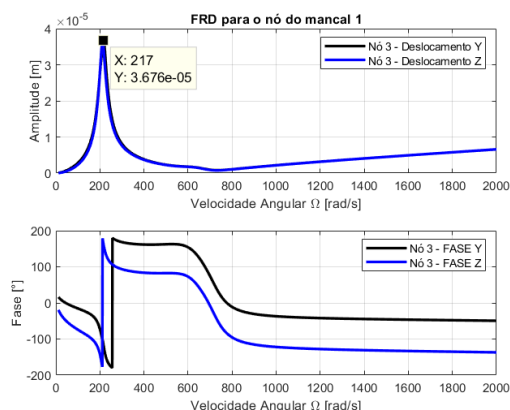


Figura 33: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 3) – fases a  $0^\circ$ .

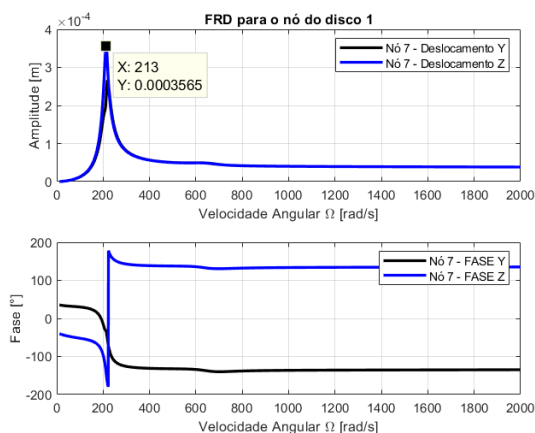


Figura 34: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7) - fases a  $0^\circ$ .

Os maiores erros foram obtidos para *awgn-40*, sendo  $-0.499\%$  para a massa desbalanceada do disco 2 e  $0,463\%$  para fase do disco 1 na combinação dos nós 6 e 12, de acordo com Tabela 11.

Os demais resultados alcançados para identificação do desbalanceamento e seus respectivos erros também foram consistentes. A FRD com adição de ruído é mostrada apenas para o caso dos parâmetros do desbalanceamento impostos para os nós 6 e 12 dos discos para *awgn-40*.

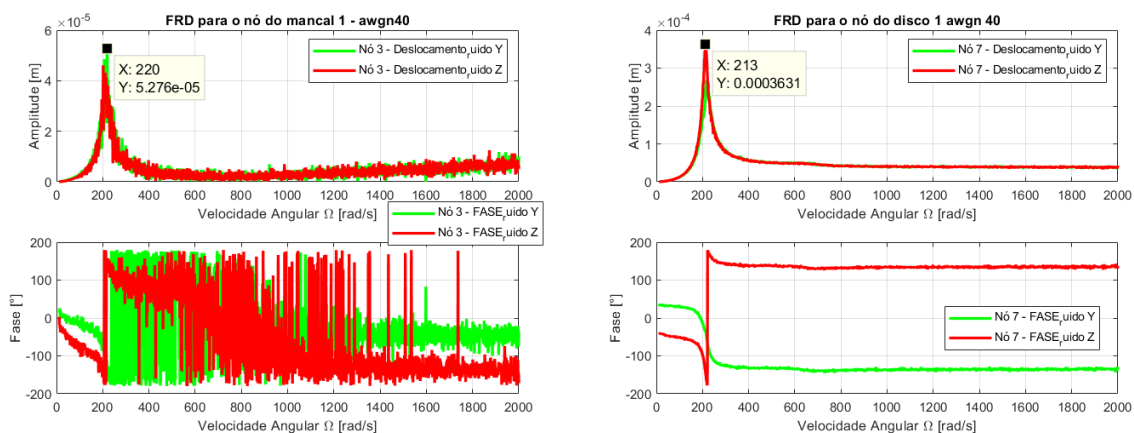


Figura 35: FRD com *awgn-40* para o mancal 1 e disco 1 - fases a  $0^\circ$ .

Tabela 11 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-12, 8-12, 6-14 e 8-14 para *awgn-40* - fases a  $0^\circ$ .

	Esperado	Nó 6-12	Erro nós 6-12	Nó 8-12	Erro nós 8-12	Nó 6-14	Erro nós 6-14	Nó 8-14	Erro nós 8-14
me01	1,184E-04	1,184E-04	-0,005%	1,179E-04	-0,454%	1,180E-04	-0,329%	1,183E-04	-0,112%
Fase01	0,785	0,789	0,463%	0,784	-0,198%	0,785	-0,098%	0,785	0,000%
nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	8	0,000%
me02	1,184E-04	1,178E-04	-0,499%	1,184E-04	-0,011%	1,184E-04	-0,003%	1,182E-04	-0,138%
Fase02	0,785	0,785	-0,067%	0,787	0,242%	0,789	0,422%	0,786	0,091%
nó2	12/14	12	0,000%	12	0,000%	14	0,000%	14	0,000%

Analogamente, para *SNR* de *awgn-40*, o modelo proposto manteve-se robusto. Novamente, para parâmetros de desbalanceamento da combinação dos nós 6 e 12, a amplitude máxima é maior do que a amplitude sem adição de ruído.

Nos casos simulados no subitem 4.2, o modelo de identificação do desbalanceamento sem massas de triagem mostrou-se consistente e efetivo, pois obteve sucesso em todos os casos analisados. O maior erro encontrado foi de -0,625%, na combinação de nós 8 com 14 para a massa desbalanceada do disco 2, com massas desbalanceadas defasadas de  $180^\circ$  para os cálculos com apenas as velocidades críticas.

Levando em consideração a instabilidade fluido induzida, o modelo também se manteve eficaz e obteve um balanceamento satisfatório nas simulações numéricas acrescidas de ruído, e com erros aceitáveis para os parâmetros do desbalanceamento.

### 4.3 Sistema Rotativo composto por 3 discos

Este sistema possui três discos e as informações do modelo por elementos finitos desse arranjo são visualizadas na Figura 36 e Tabela 12.

O sistema rotativo é formado de um eixo de aço, com  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  e  $E = 200 \text{ GPa}$ , com comprimento de 1021 mm e diâmetro de 13 mm, dividido em 22 elementos de viga de Timoshenko cilíndrica, três elementos de disco de aço, localizados nos nós 7, 12 e 17 e sustentado por dois mancais hidrodinâmicos iguais posicionados nos nós 2 e 22, sendo suas informações visualizadas na Tabela 13. A viscosidade do filme de óleo é adotada como invariável. As fontes de excitações são os desbalanceamentos rotativos localizados nos nós dos discos. Foram consideradas massas desbalanceadas com  $m=3,2 \text{ g}$ , situadas a 37 mm em todos os discos, em relação à horizontal. Na ausência de dados experimentais para o coeficiente de proporcionalidade de um sistema rotativo composto por 3 discos, foram simulados alguns valores de  $\beta$ , sendo o valor de  $\beta = 1,0 \times 10^{-4}$  selecionado para realização das simulações numéricas.

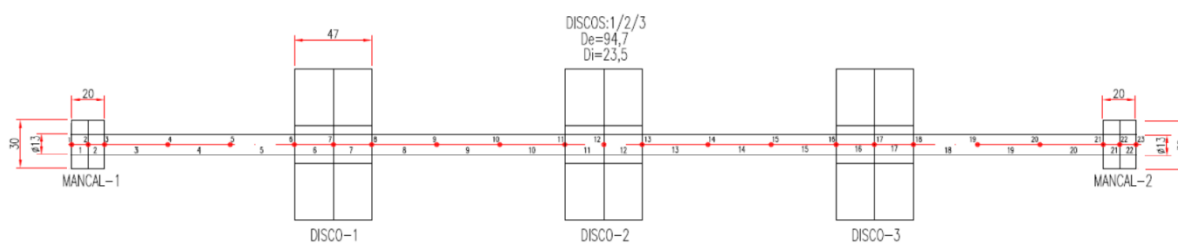


Figura 36: Modelo de Rotor com 3 discos pelo MEF.

Tabela 12 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo três discos.

Número do Elemento	Tipo de Elemento	Diâmetro interno [mm]	Diâmetro externo [mm]	Comprimento [mm]
1, 2, 21, 22	Viga	0	30	10
3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20	Viga	0	13	70
6, 7, 11, 12, 16, 17	Viga	0	23,5	23,5
23, 24, 25	Disco	23,5	94,7	47

Tabela 13 – Parâmetros dos mancais do sistema rotativo com 3 discos.

Diâmetro do Mancal ( $D$ )	30 mm
Comprimento do mancal ( $L$ )	20 mm
Folga radial do mancal ( $C_R$ )	90 $\mu\text{m}$
Viscosidade do lubrificante ( $\mu$ )	51 mPa.s

As três primeiras velocidades críticas do sistema rotativo são aproximadamente 57, 231 e 510 rad/s, conforme evidencia a Figura 37. As massas desbalanceadas foram posicionadas a  $135^\circ$  no disco 1,  $225^\circ$  no disco 2 e  $45^\circ$  no disco 3, em relação à horizontal.

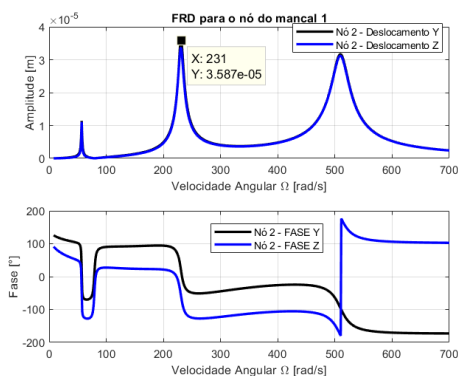


Figura 37: Função resposta ao desbalanceamento do Mancal 1 (nó 2).

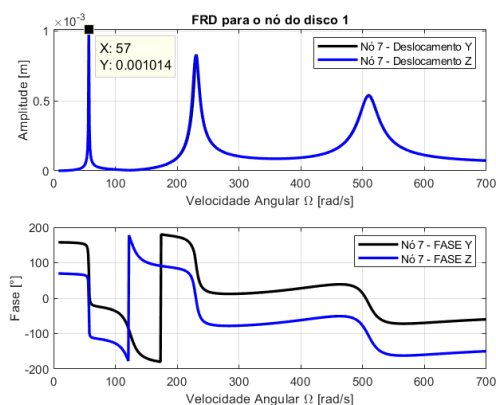


Figura 38: Função resposta ao desbalanceamento do Disco 1 (nó 7).

O comportamento geral do sistema também pode ser observado no Diagrama de Campbell, apresentado na Figura 39.

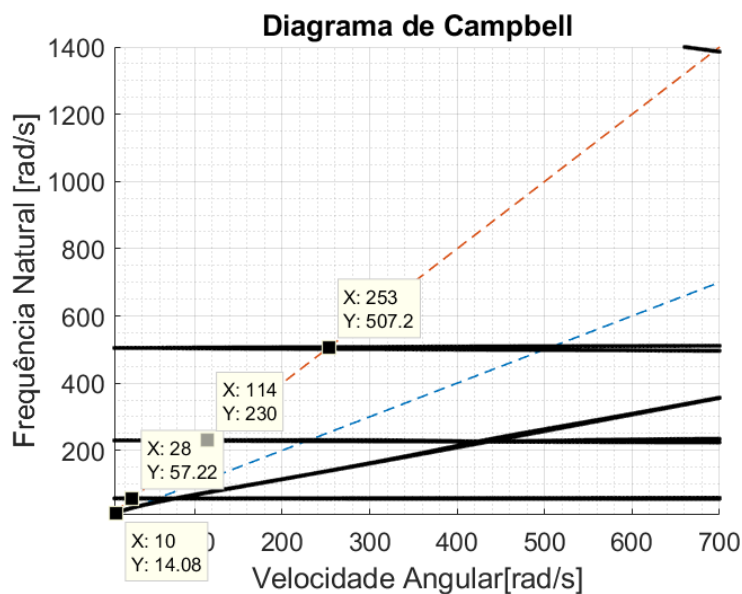


Figura 39: Diagrama de Campbell

Inicialmente, calcularam-se os parâmetros do desbalanceamento apenas com uma das velocidades críticas e os erros encontrados apresentaram ordem muito elevada para os nós 6, 11 e 16. Posteriormente, os cálculos com a combinação de duas velocidades críticas também foram realizados sem a adição de ruído para os mesmos nós e os resultados obtidos foram satisfatórios para as combinações de velocidades 57/510 rad/s e 231/510 rad/s, conforme apresenta a Tabela 14.

Tabela 14 – Valores encontrados e erros para o nós 6, 11 e 16 sem adição de ruído, para as combinações das velocidades 57/510 rad/s e 231/510 rad/s.

	Esperado	Vel_Cri 57 e 510 rad/s	Erro Vel_Cri 57 e 510 rad/s	Vel_Cri 231 e 510 rad/s	Erro Vel_Cri 231 e 510 rad/s
Me01	1,184E-04	1,175E-04	-0,726%	1,164E-04	-1,706%
Fase01	2,356	2,345	-0,458%	2,356	-0,021%
N61	6	6	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,182E-04	-0,211%	1,181E-04	-0,253%
Fase 02	3,927	3,928	0,033%	3,953	0,670%
N62	11	11	0,000%	11	0,000%
Me03	1,184E-04	1,170E-04	-1,199%	1,182E-04	-0,203%
Fase03	0,785	0,794	1,031%	0,765	-2,597%
N63	16	16	0,000%	16	0,000%
Fval		5,764E-11		7,388E-10	

Adicionalmente, com o intuito de aperfeiçoar o modelo de balanceamento proposto, foram simulados os parâmetros do desbalanceamento utilizando as três velocidades críticas supracitadas para todas as combinações de nós possíveis dos discos do sistema rotativo com a adição de ruído *awgn* de 40 até 65 com passo de 5. Os resultados obtidos apresentaram boa convergência. Os erros máximos para *awgn*-40 foram: -0.541% para o momento de desbalanceamento e -0,369% para a fase, ambos do disco 3 na combinação dos nós 6, 13 e 18 de acordo com a Tabela 15.

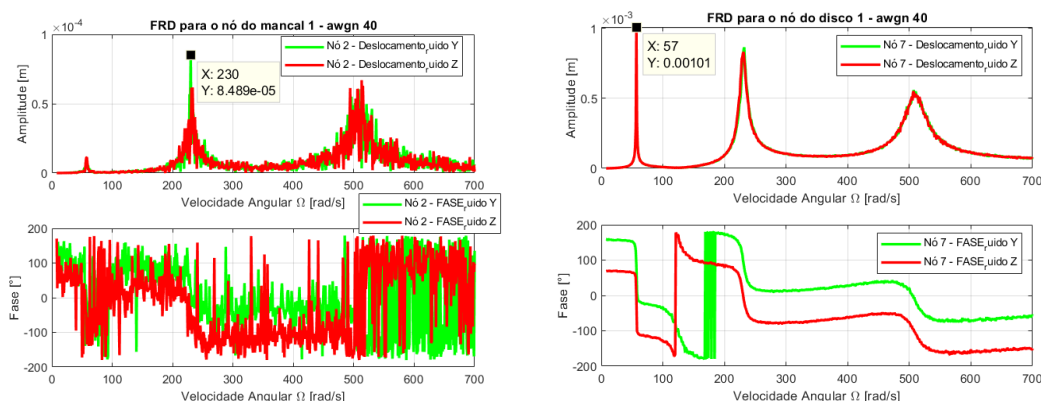


Figura 40: FRD com *awgn*-40 para o mancal 1 e disco 1, nós 6-11-16.

Novamente, para *SNR* de *awgn*-40 o modelo proposto foi eficaz.

Para a combinação de nós 6-13-16, o método proposto ora encontrava como solução ótima os nós 6-13-16 e ora os nós 6-11-18. Tal fato ocorre, por que as posições axiais do desbalanceamento para inserção ou remoção de massas estão associadas com os nós das faces dos discos e a distância entre as faces do disco é 47 mm o que está sujeito à menor influência devido à rigidez do disco, do que os valores de momento de desbalanceamento ( $me$ ) e fases ( $\delta$ ) calculados pelo modelo numérico. Em outras palavras, qualquer combinação de nós possíveis dos discos seria suficiente para providenciar um balanceamento teórico efetivo. Com o intuito de verificar se o balanceamento seria efetivo para estas duas soluções ótimas encontradas, foram inseridos estes parâmetros junto à condição de desbalanceamento encontrada, contudo com ângulo defasado de  $180^\circ$ . Conforme mostram as Figuras 41 a 44, o sistema rotativo foi balanceado nos dois casos, mostrando novamente que método de balanceamento é promissor.



Tabela 15 – Valores encontrados e erros para as combinações de nós 6-11-16, 8-13-18, 6-11-18 e 6-13-16, 6-13-18, 8-11-16, 8-11-18 e 8-13-16 para *awgn-40*.

	Esperado	Nó 6-11-16	Erro nós 6-11-16	Nó 8-13-18	Erro nós 8-13-18	Nó 6-11-18	Erro nós 6-11-18	Nó 6-13-16	Erro nós 6-13-16
Me01	1,184E-04	1,183E-04	-0,051%	1,184E-04	0,000%	1,183E-04	-0,110%	1,184E-04	-0,042%
Fase01	2,356	2,356	-0,004%	2,357	0,021%	2,358	0,085%	2,356	-0,008%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	6	0,000%	6	0,000%
Me02	1,184E-04	1,183E-04	-0,051%	1,183E-04	-0,051%	1,183E-04	-0,059%	1,183E-04	-0,059%
Fase02	3,927	3,924	-0,069%	3,924	-0,074%	3,925	-0,046%	3,925	-0,061%
Nó02	11/13	11	0,000%	13	0,000%	11	0,000%	13	0,000%
Me03	1,184E-04	1,182E-04	-0,203%	1,183E-04	-0,110%	1,184E-04	-0,025%	1,182E-04	-0,203%
Fase03	0,785	0,785	-0,025%	0,785	-0,038%	0,783	-0,344%	0,785	-0,051%
Nó3	16/18	16	0,000%	18	0,000%	18	0,000%	16	0,000%

	Esperado	Nó 6-13-18	Erro nós 6-13-18	Nó 8-11-16	Erro nós 8-11-16	Nó 8-11-18	Erro nós 8-11-18	Nós 8-13-16	Erro nós 8-13-16
Me01	1,184E-04	1,181E-04	-0,296%	1,182E-04	-0,160%	1,182E-04	-0,203%	1,183E-04	-0,076%
Fase01	2,356	2,356	-0,030%	2,361	0,204%	2,356	-0,017%	2,357	0,034%
Nó1	6/8	6	0,000%	8	0,000%	8	0,000%	8	0,000%
Me02	1,184E-04	1,181E-04	-0,287%	1,182E-04	-0,211%	1,183E-04	-0,076%	1,183E-04	-0,068%
Fase02	3,927	3,928	0,018%	3,923	-0,104%	3,928	0,015%	3,927	0,010%
Nó02	11/13	13	0,000%	11	0,000%	11	0,000%	13	0,000%
Me03	1,184E-04	1,178E-04	-0,541%	1,183E-04	-0,110%	1,181E-04	-0,228%	1,183E-04	-0,051%
Fase03	0,785	0,783	-0,369%	0,783	-0,331%	0,784	-0,216%	0,785	-0,089%
Nó3	16/18	18	0,000%	16	0,000%	18	0,000%	16	0,000%

Para a solução ótima encontrada da combinação de nós 6-13-16, nota-se que amplitude no mancal 1 e disco 1 diminuíram, respectivamente 99,81% (Figura 41) e 99,71% (Figura 42).

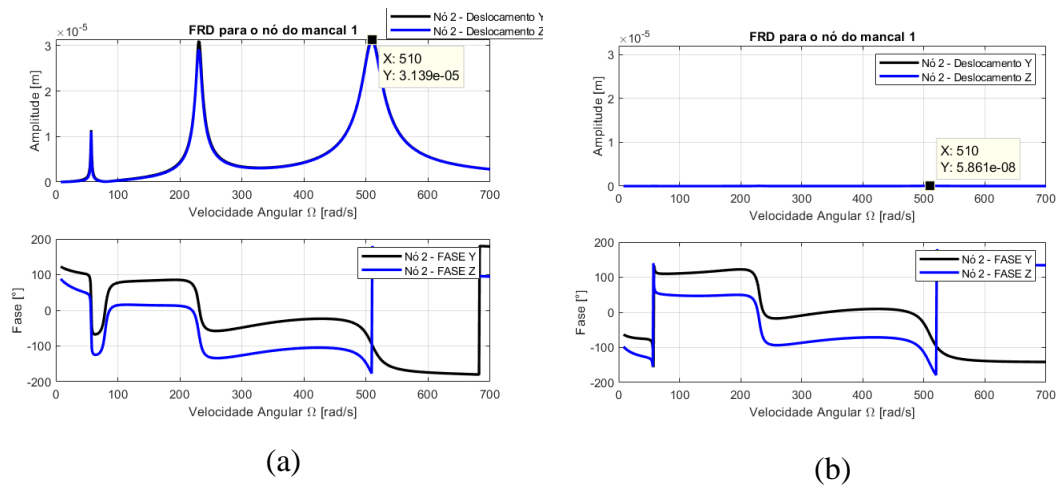


Figura 41: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 6-13-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

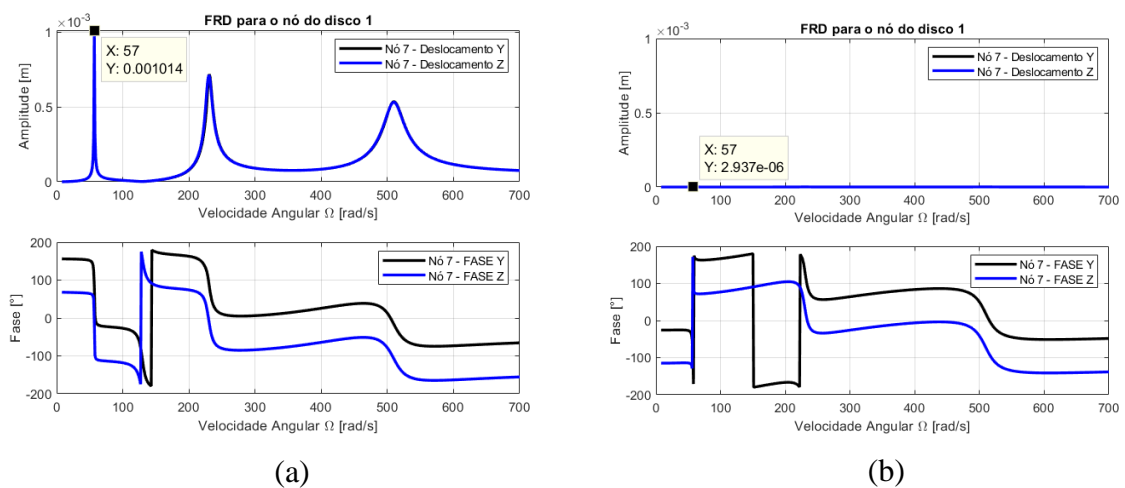


Figura 42: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-13-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

Para a solução ótima encontrada da combinação de nós 6-11-18, nota-se que amplitude no manca 1 e disco 1 reduziram, respectivamente 99,87% (Figura 43) e 99,52% (Figura 44).

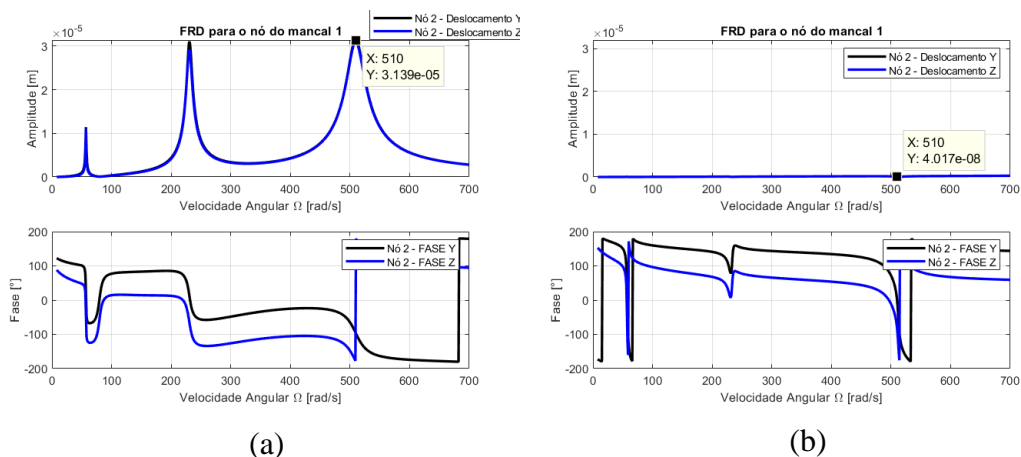


Figura 43: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 6-11-18. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

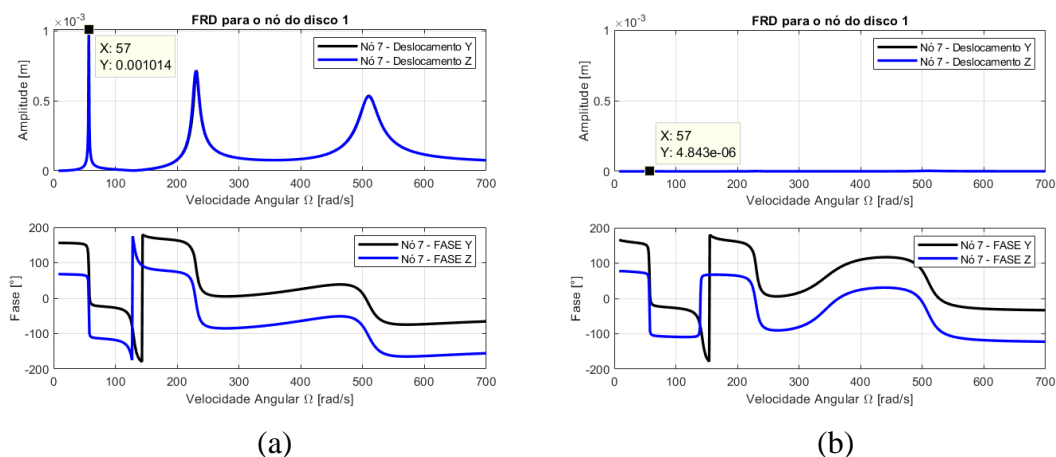


Figura 44: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-18. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

Os demais resultados alcançados para identificação do desbalanceamento e seus respectivos erros foram satisfatórios para faixa de ruído de *awgn* 45 até 65 em todas as combinações de nós dos discos possíveis.

O sistema rotativo também foi solucionado do domínio do tempo pelo espaço de estados pelo algoritmo de Runge-Kutta processado na função *ode15s* do programa *Matlab*®.

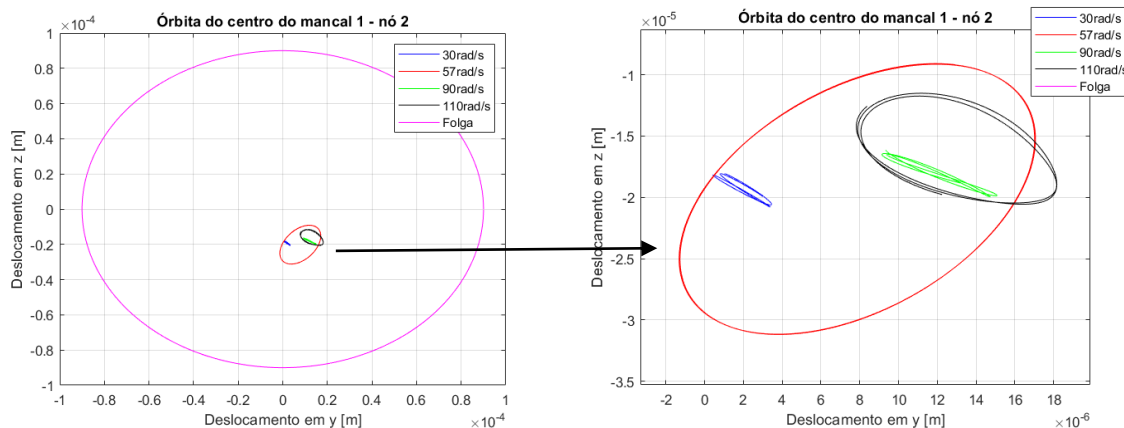


Figura 45: Órbitas do Mancal 1 (nó 2) para velocidades de 30, 57, 90 e 110 rad/s.

Observa-se novamente, conforme esperado, que com a elevação da revolução do eixo, os centros das órbitas se movimentam para o centro geométrico do mancal, tendo em vista que para cada revolução a distribuição de pressões se ajusta para balancear as cargas que estão sendo impostas no mancal.

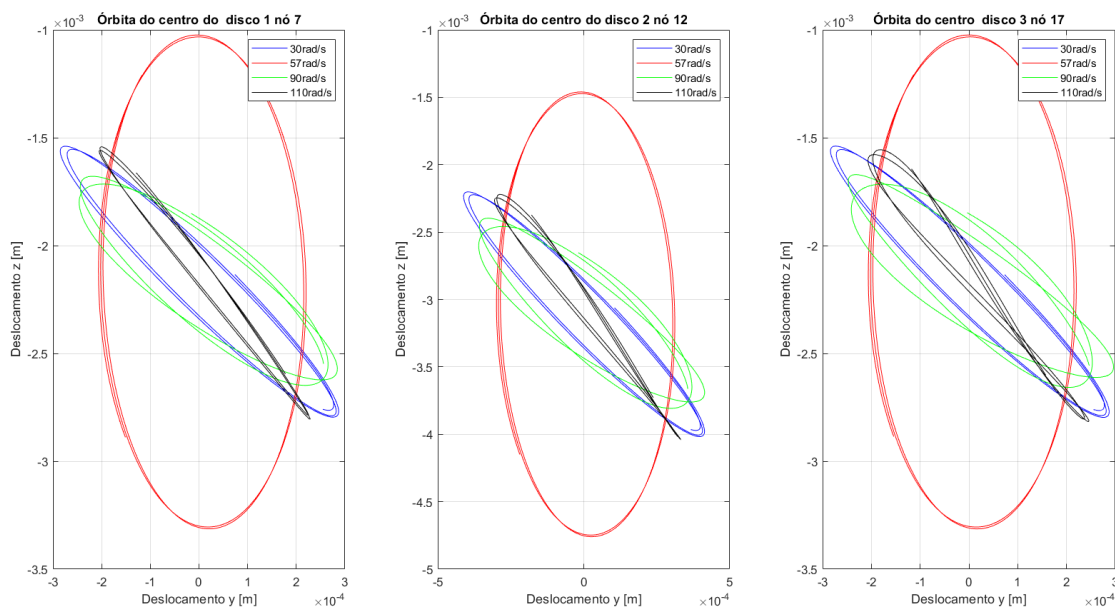


Figura 46: Órbitas dos Discos (nós 7,12 e 17) para as velocidades de 30, 57, 90 e 110 rad/s.

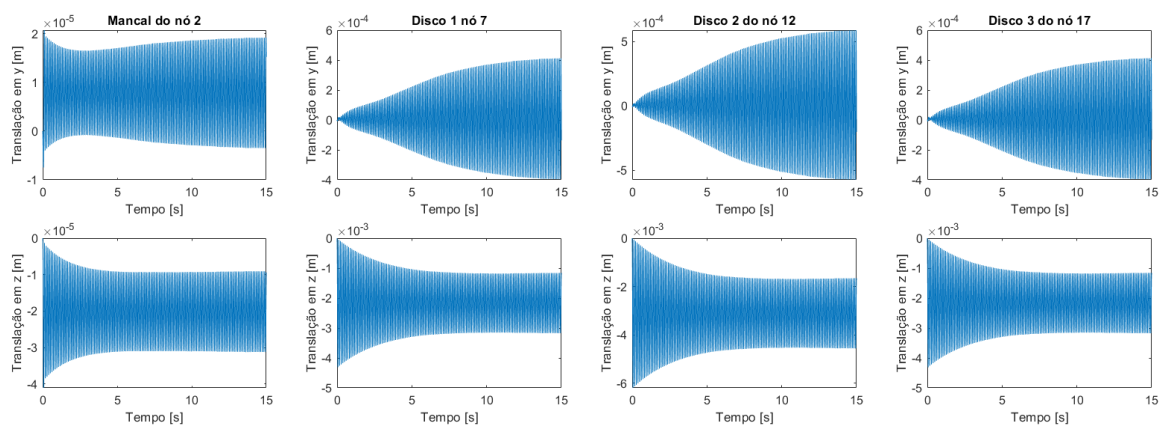


Figura 47: Resposta temporal de Translação em 2D do mancal 1 (nó 2) e Discos (nós 7, 12 e 17) para 57 rad/s.

O movimento de translação em y e z nos discos e mancal 1, estabiliza após cerca de 13 e 5 segundos, respectivamente, para velocidade crítica de 57 rad/s, como pode ser verificado na Figura 47.

Novamente, é necessário considerar os efeitos da instabilidade fluido induzida. No caso deste sistema rotativo em aproximadamente 141 rad/s o fator de amortecimento modal torna-se negativo impossibilitando uma operação segura do rotor, conforme Figura 48.

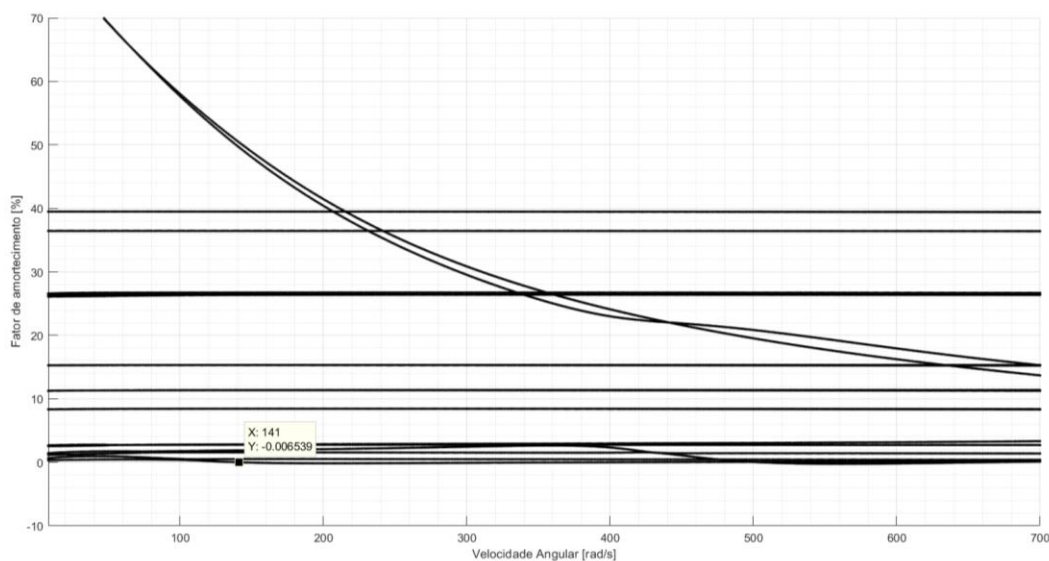


Figura 48: Fator de amortecimento modal do sistema rotativo composto por três discos.

Portanto, em uma análise experimental não seria possível trabalhar com as segunda e terceira velocidades críticas, pois ambas estão acima da velocidade da instabilidade fluido induzida. Destaca-se que a primeira velocidade crítica respeita o limite de deslocamentos de cerca de 40% da folga radial do mancal e novas simulações com velocidades abaixo, na primeira crítica e acima desta velocidade foram testadas na busca da melhor solução que respeite as condições de contorno do problema sem adição de ruído previamente.

Seguindo a recomendação da norma ISO 21940-12, realizou-se primeiro o balanceamento com a primeira velocidade crítica de 57 rad/s e, em seguida, diversas combinações de velocidades foram simuladas similar ao realizado na seção 4.2, na busca da menor função objetivo que minimize o desbalanceamento, sendo que os melhores resultados foram alcançados para os arranjos das velocidades 32, 57 e 90 rad/s e 30, 57, 90 e 110 rad/s e, portanto, foram escolhidas para adição de ruído e verificação dos parâmetros do desbalanceamento.

Na velocidade crítica de 57 rad/s para *awgn-40*, para os nós 6-11-16, nota-se que o primeiro modo foi efetivamente balanceado com uma redução de vibração de 98,11% no mancal 1 e de 99,53% no disco 1. O segundo modo para a velocidade crítica de 231 rad/s teve uma redução de cerca de 10% tanto para o mancal 1 quanto disco 1. Porém, o terceiro modo na velocidade crítica de 510 rad/s teve um acréscimo de cerca de 8% nos deslocamentos do mancal 1 e disco 1.

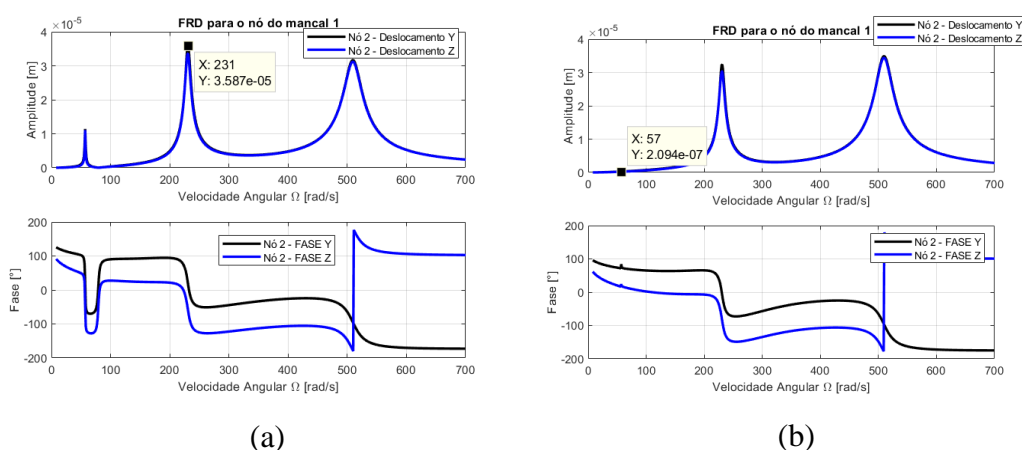


Figura 49: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 57 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

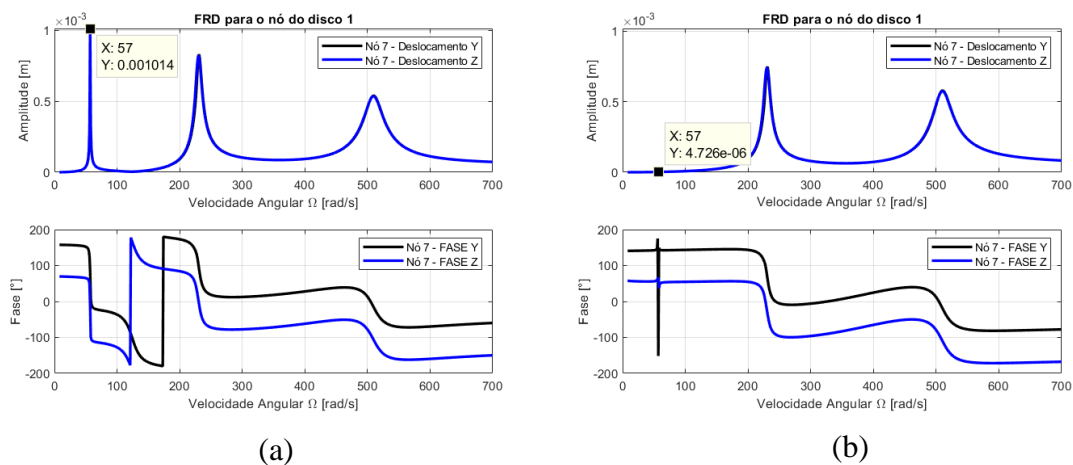


Figura 50: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 57 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

Nas velocidades de 32, 57 e 90 rad/s com  $SNR_{awgn-40}$ , para os nós 6-11-16, observa-se que o primeiro modo foi balanceado satisfatoriamente com um decréscimo de vibração de 99,20% no mancal 1 e de 99,96% no disco1. O segundo modo para a velocidade crítica de 231 rad/s teve uma diminuição de cerca de 51,00% tanto para o mancal 1 quanto disco 1 e no terceiro modo, na velocidade crítica de 510 rad/s, a amplitude no mancal 1 e disco 1 reduziram, respectivamente, 8,16% (Figura 51) e 10,43% (Figura 52).

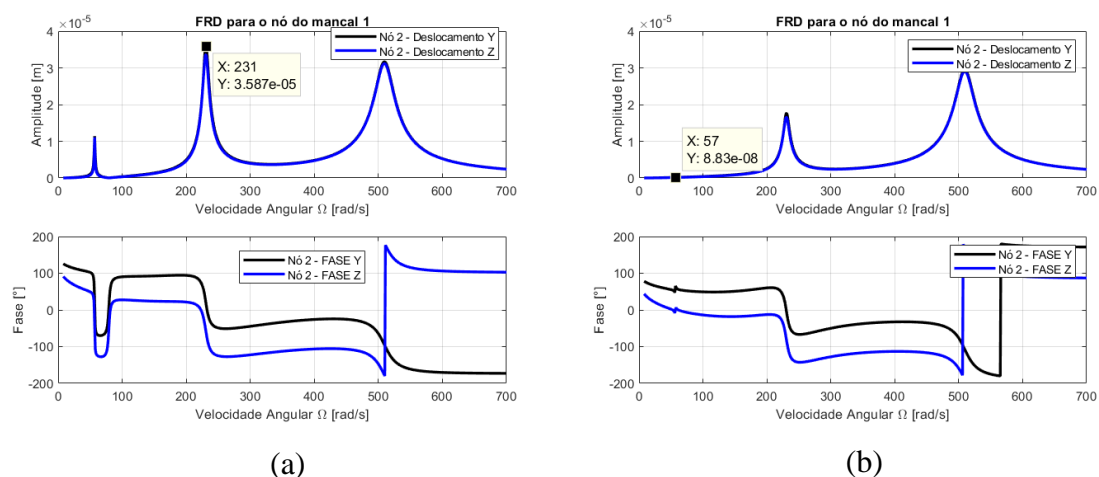


Figura 51: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 32, 57 e 90 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

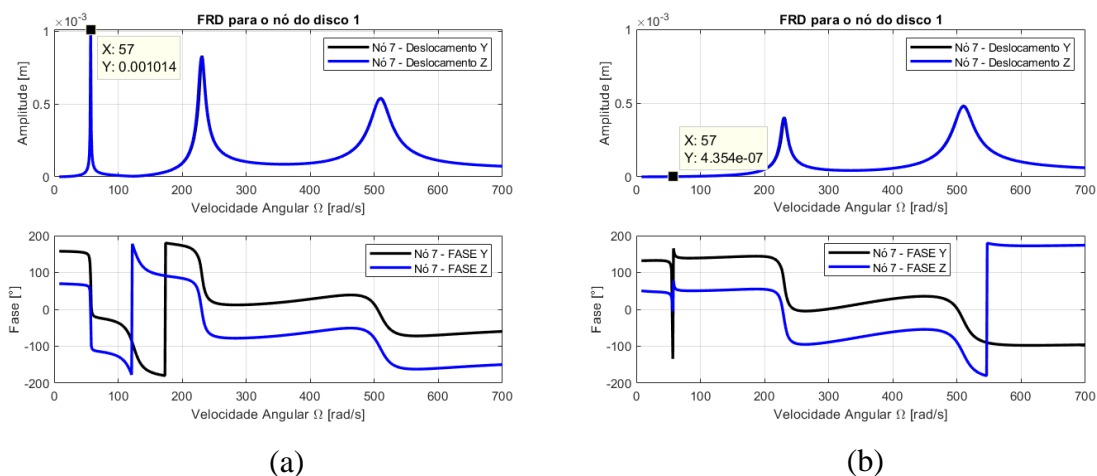


Figura 52: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 32, 57 e 90 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

Na utilização das velocidades 30, 57, 90 e 110 rad/s com ruído *awgn-40*, novamente para os nós 6-11-16, o primeiro modo foi balanceado adequadamente com um decréscimo de vibração de 99,45% no mancal 1 e de 99,88% no disco1. O segundo modo para a velocidade crítica de 231 rad/s teve uma diminuição de 75,12% para o mancal 1 e 76,16% para o disco 1. No terceiro modo, na velocidade crítica de 510 rad/s, a amplitude no mancal 1 e disco 1 reduziram, respectivamente, 7,15% (Figura 53) e 11,93% (Figura 54).

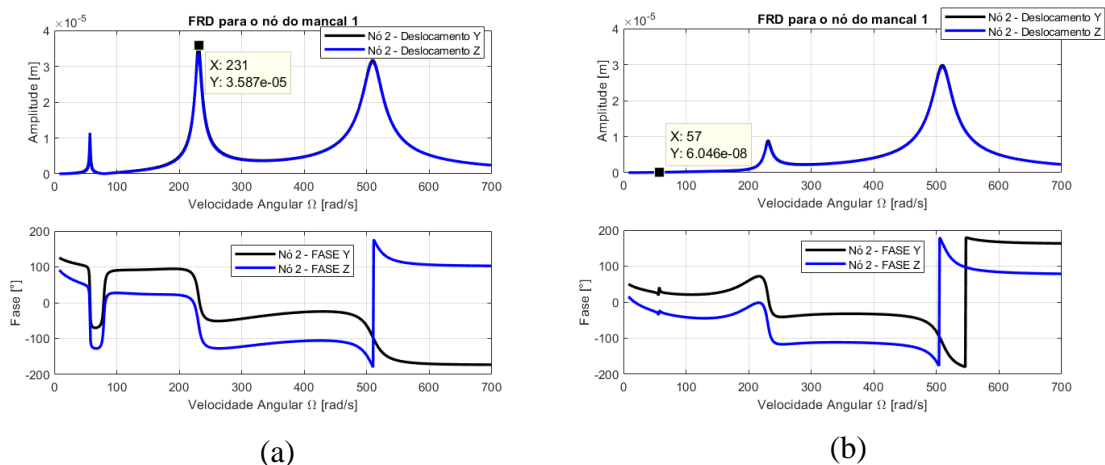


Figura 53: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 6-11-16 para velocidade de 30, 57, 90 e 110 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.



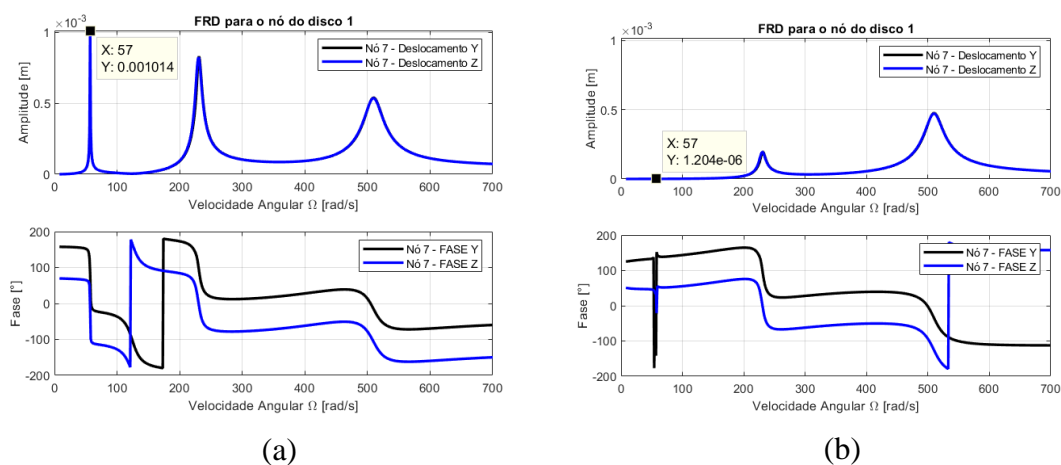


Figura 54: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 6-11-16 para velocidade de 30, 57, 90 e 110 rad/s. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

A utilização das velocidades críticas na função objetivo garante um efetivo balanceamento do sistema rotativo em toda faixa de velocidade com erros aceitáveis para todas as combinações de nós e ruídos testados. Contudo, em mancais hidrodinâmicos, a instabilidade fluido induzida limita a operação dos rotores a partir de aproximadamente o dobro da primeira velocidade crítica.

Seguindo as diretrizes da norma ISO 21940-12 o modelo foi eficiente na realização do balanceamento teórico e, com o aumento do valor das velocidades da função objetivo até os limites de operação, os resultados melhoram gradativamente, proporcionando um decréscimo significativo nos deslocamentos do segundo modo. Para o terceiro modo houve um pequeno decréscimo nos deslocamentos, mas essa otimização é limitada pelo fato das velocidades utilizadas para realização do balanceamento teórico estarem muito abaixo da terceira velocidade crítica. Destaca-se que este sistema rotativo não deve operar acima de 140 rad/s e, portanto, a faixa de velocidade operacional é efetivamente balanceada pelo modelo proposto.

Adicionalmente, destaca-se que o método de balanceamento proposto foi efetivo em todos os casos analisados e apresentou boa convergência, mostrando-se promissor.

#### 4.4 Sistema Rotativo composto por 3 discos com parâmetros do desbalanceamento ao longo do rotor, fora dos discos

O sistema rotativo e a metodologia utilizada para adição de ruído e montagem do vetor de vibração da função objetivo são os mesmos apresentados na seção 4.3. Contudo, os casos a seguir tem em consideração a restrição imposta pela instabilidade fluido induzida. Assim sendo, são utilizadas as velocidades 30, 57. 90 e 110 rad/s na montagem na função objetivo, pois foi com essa combinação de velocidades que o método obteve os melhores resultados no item 4.3. Os momentos de desbalanceamento e fases utilizados também são os mesmos da seção 4.3.

##### 4.4.1 Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 4, 14 e 19

Foi adicionado o ruído apenas para *awgn-40* e a solução ótima encontrada foi para a combinação dos nós 8-13-16, de acordo com Tabela 16.

Tabela 16 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 4, 14 e 19 para *awgn-40*.

	Parâmetros de Desbalanceamento impostos	Valores encontrados
Me01	1,184E-04	7,004E-05
Fase01	2,356	2,793
Nó1	4	8
Me02	1,184E-04	6,734E-05
Fase02	3,927	4,343
Nó2	14	13
Me03	1,184E-04	3,479E-05
Fase03	0,785	1,176
Nó3	19	16
Fval		1,804E-09

Observa-se que o primeiro modo foi balanceado efetivamente com um decréscimo de vibração de 78,65% no mancal 1 e de 99,60% no disco1. O segundo modo, para a velocidade

crítica de 231 rad/s, teve uma diminuição de 77,11% para o mancal 1 e 65,39% para o disco 1. No terceiro modo, a amplitude no mancal 1 e disco 1 reduziram, respectivamente 48,07% (Figura 55) e 39,84% (Figura 56).

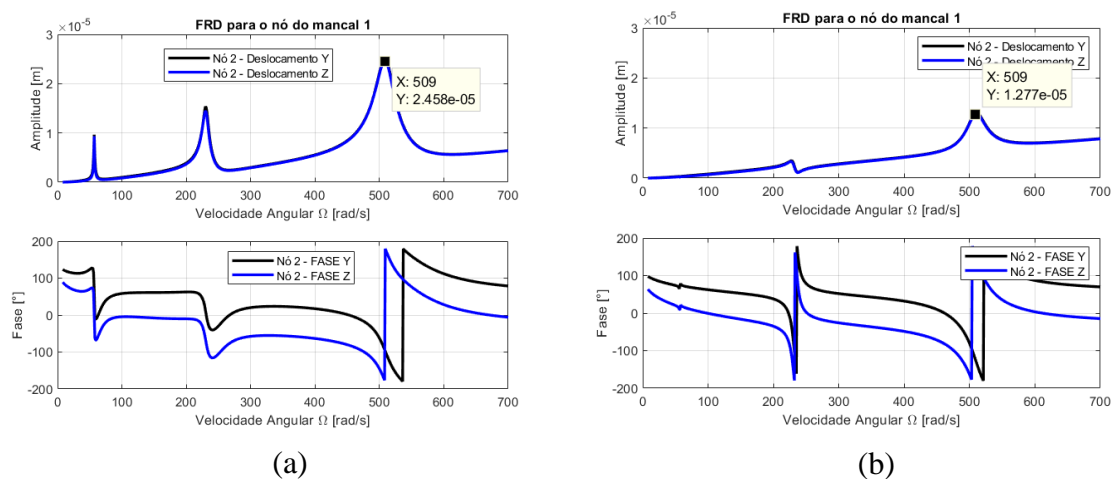


Figura 55: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 4-14-19. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

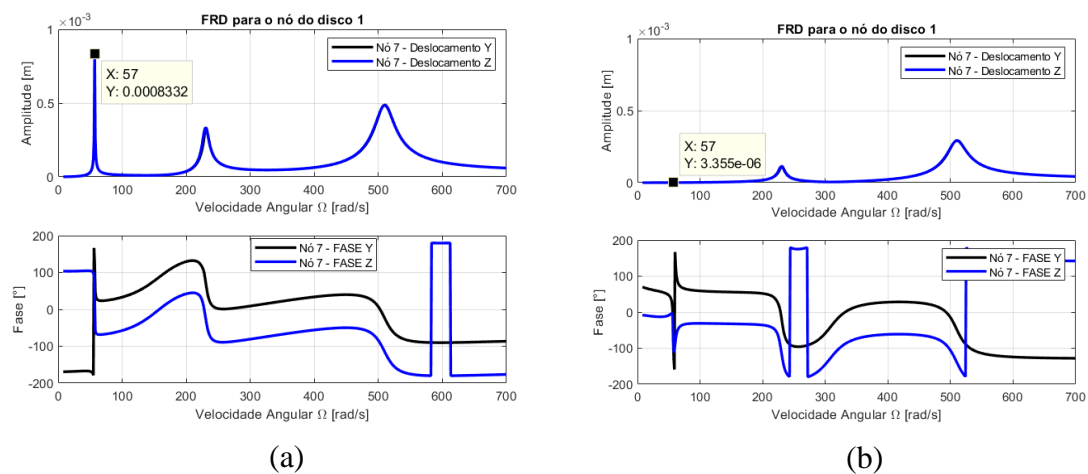


Figura 56: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 4-14-19. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

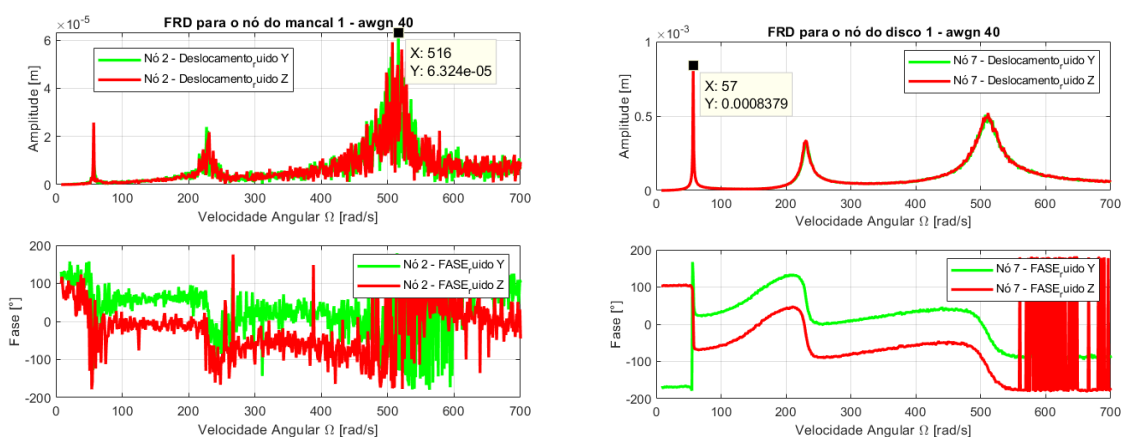


Figura 57: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 4-14-19 awgn-40.

Com a adição de ruído para *awgn 40*, houve um de aumento de cerca de 1,5 vezes na amplitude do mancal 1, conforme notado na Figura 57.

#### 4.4.2 Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 9, 10 e 15

Neste caso foi acrescentado o ruído de *awgn-40*, e a solução ótima foi obtida para a combinação de nós 6-11-18, conforme Tabela 17.

Tabela 17 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 9, 10 e 15 para *awgn-40*.

	Parâmetros de Desbalanceamento impostos	Valores encontrados
Me01	1,184E-04	1,044E-04
Fase01	2,356	2,927
Nó1	9	6
Me02	1,184E-04	6,700E-05
Fase02	3,927	3,173
Nó2	10	11
Me03	1,184E-04	1,084E-04
Fase03	0,785	0,699
Nó3	15	18
Fval		1,651E-08

Nota-se, que o primeiro modo foi balanceado efetivamente com uma redução de vibração de 99,84% no mancal 1 e de 99,78% no disco1. O segundo modo, para a velocidade crítica de 231 rad/s, teve um decréscimo de 74,42% para o mancal 1 e 74,70% para o disco 1. No terceiro modo, na velocidade crítica de 510 rad/s, a amplitude no mancal 1 e disco 1 diminuíram, de modo respectivo 11,37% (Figura 58) e 24,07% (Figura 59).

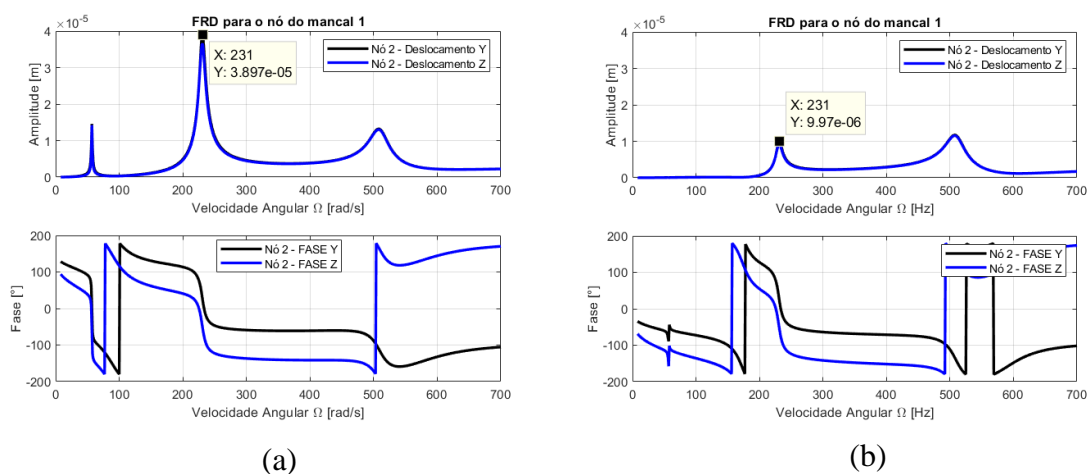


Figura 58: FRD do Manca 1 (nó 2) – Nós 9-10-15. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

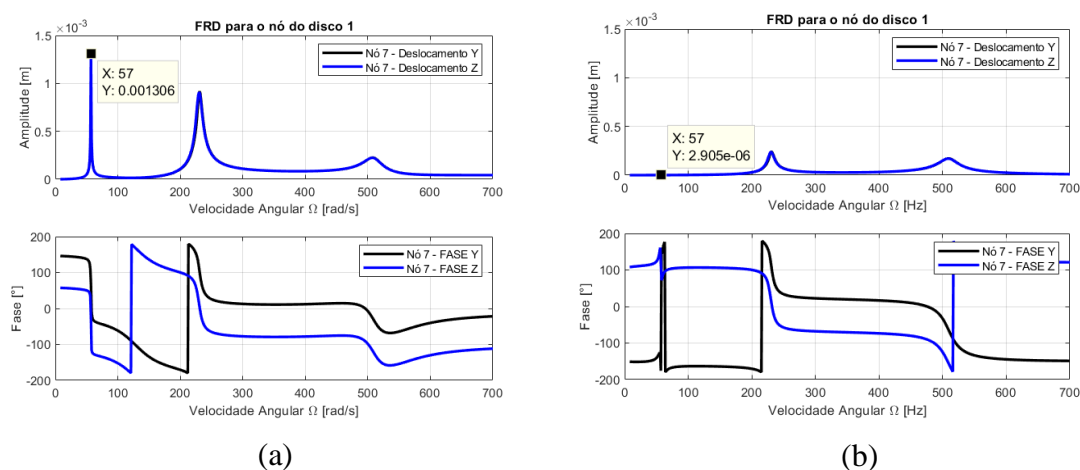


Figura 59: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 9-10-15. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

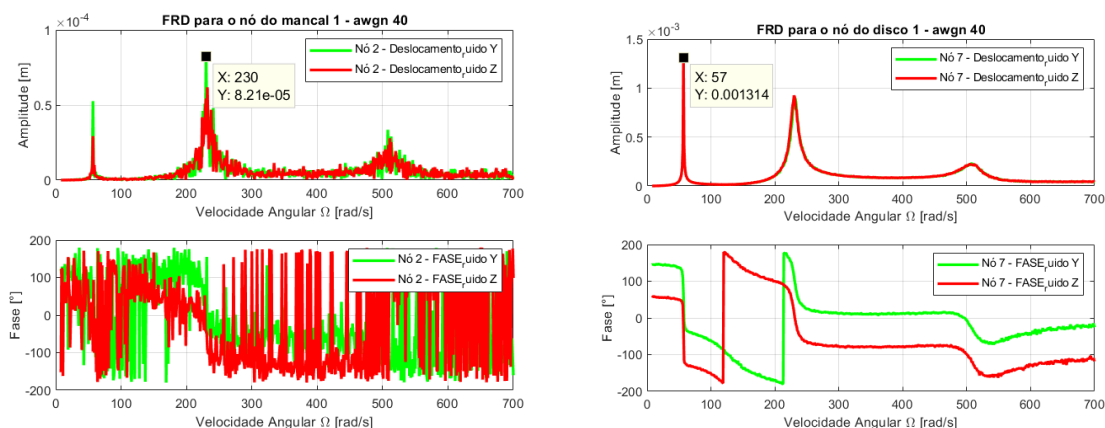


Figura 60: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 9-10-15 *awgn*-40.

Com a adição de ruído para *awgn* 40, houve um sutil aumento na amplitude do mancal 1, de acordo com o observado na Figura 60.

#### 4.4.3 Sistema Rotativo com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10 e 16

O sistema rotativo é o mesmo da seção 4.3, contudo foram adicionados 2 (dois) novos nós ao MEF, com o intuito de colocar os parâmetros do desbalanceamento exatamente nas distâncias médias entre os discos.

As informações do modelo por elementos finitos dessa disposição são visualizadas na Figura 61 e Tabela 18.

Foram consideradas massas desbalanceadas com  $m=3,2$  g, situadas a 37 mm nos nós 10 e 16, posicionadas respectivamente a  $135^\circ$  e  $225^\circ$ , em relação à horizontal.

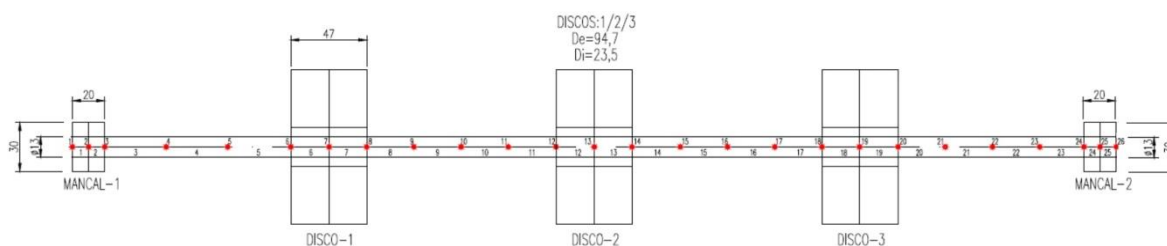


Figura 61: Modelo de Rotor com 3 discos por elementos finitos com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10-16.

Tabela 18 – Detalhes do modelo de sistema rotativo contendo três discos com parâmetros do desbalanceamento nos nós 10-16.

Número do Elemento	Tipo de Elemento	Diâmetro interno [mm]	Diâmetro externo [mm]	Comprimento [mm]
1, 2, 23, 24	Viga	0	30	10
3, 4, 5, 20, 21, 22	Viga	0	13	70
8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17	Viga	0	13	52,5
6, 7, 12, 13, 18, 19	Viga	0	23,5	23,5
25, 26, 27	Disco	23,5	94,7	47

O ruído adicionado foi de *awgn-40* e a solução ótima foi obtida para a combinação de nós 8-12-20, conforme Tabela 19.

Tabela 19 – Parâmetros do desbalanceamento nos nós 10 e 16 para *awgn-40*.

	Parâmetros de Desbalanceamento impostos	Valores encontrados
Me01	1,184E-04	7,488E-05
Fase01	2,356	2,206
Nó1	10	8
Me02	1,184E-04	8,599E-05
Fase02	3,927	3,298
Nó2	16	12
Me03	-	7,451E-05
Fase03	-	3,831
Nó3	-	20
Fval		7,341E-11

Percebe-se, que o primeiro modo 1 foi balanceado adequadamente com uma redução de vibração de 99,84% no mancal 1 e de 99,97% no disco1. O segundo modo, para a velocidade crítica de 231 rad/s, teve um decréscimo de 89,52% para o mancal 1 e 89,69% para o disco 1. No terceiro modo, na velocidade crítica de 510 rad/s, a amplitude no mancal 1 e disco 1 diminuíram, relativamente 14,91% (Figura 62) e 25,41% (Figura 63).

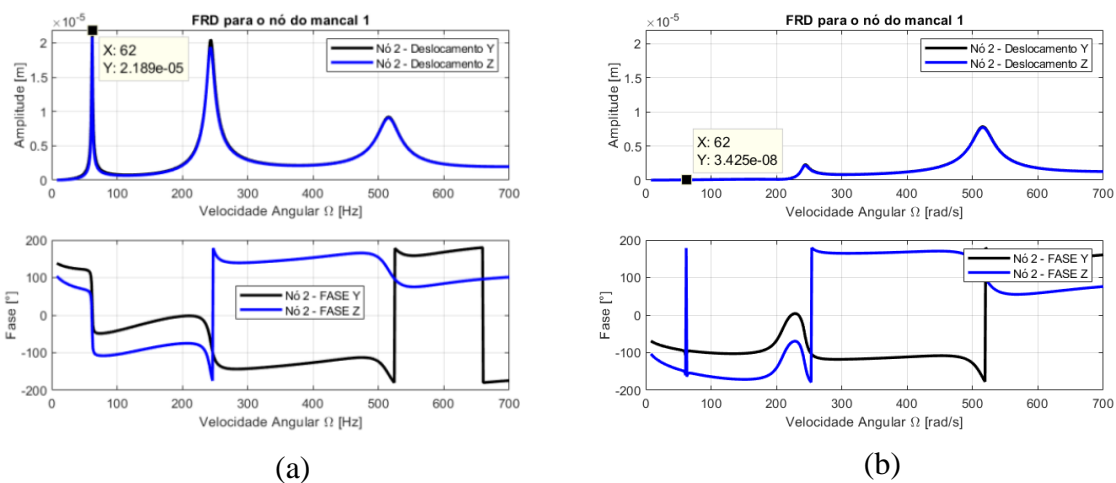


Figura 62: FRD do Mancal 1 (nó 2) – Nós 10-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.

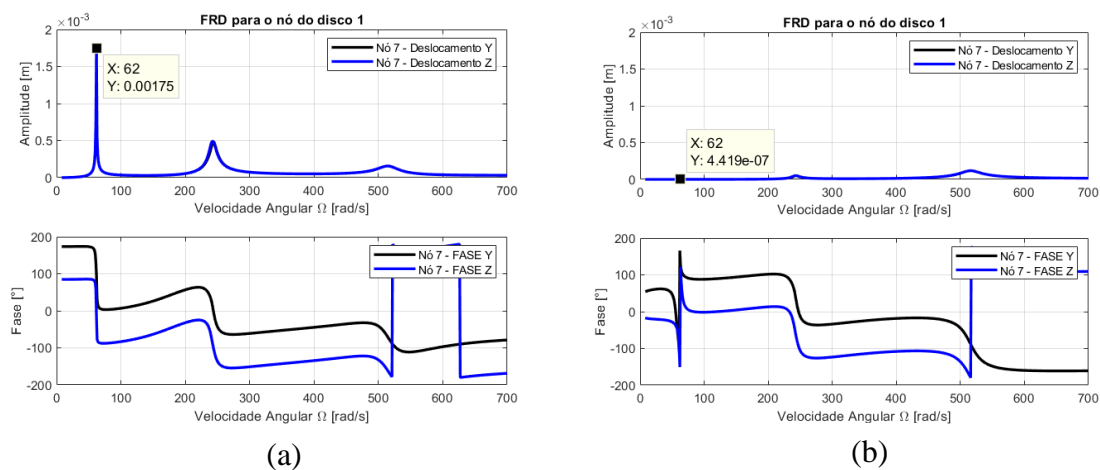


Figura 63: FRD do Disco 1 (nó 7) - Nós 10-16. Figura (a) sistema desbalanceado e figura (b) sistema balanceado.



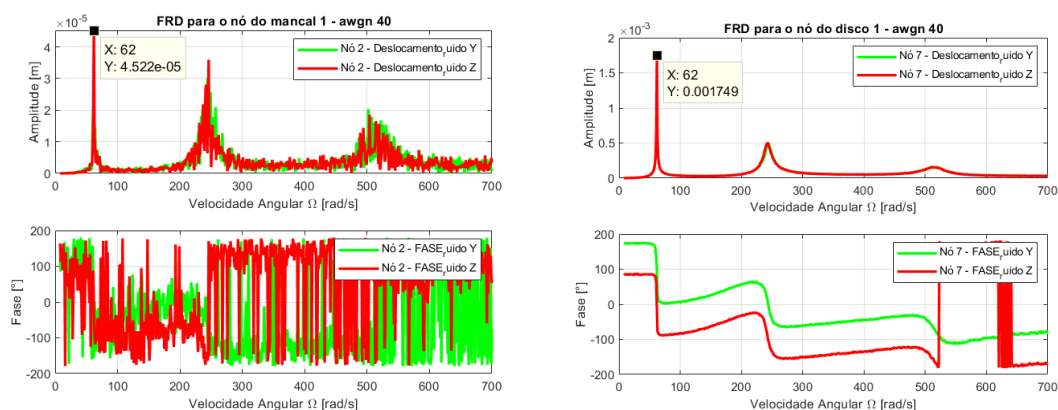


Figura 64: FRD para o mancal 1 e disco 1 - Nós 10-16 *awgn-40*.

Com a adição de ruído para *awgn 40*, também nota-se um aumento sutil na amplitude do mancal 1, conforme Figura 64.

Adicionalmente, destaca-se que o método de balanceamento proposto foi efetivo em todos os casos analisados, apresentou boa convergência e erros aceitáveis, mostrando-se promissor.

A eficácia do modelo é diretamente correlacionada com a faixa de velocidade operacional do sistema rotativo. Quando se trabalha com velocidades abaixo da primeira velocidade crítica e entre a primeira e segunda velocidades críticas é possível obter bons resultados para o balanceamento do primeiro e segundo modo. Utilizando todas as velocidades críticas os resultados são excelentes e todos os modos são teoricamente passíveis de balanceamento.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho realiza o balanceamento de um sistema rotativo apoiado por mancais hidrodinâmicos para vários planos de balanceamento sem a necessidade de massas de triagem. A Metodologia apresenta boa convergência e erros aceitáveis para todos os casos analisados, para proporção entre sinal e ruído (*awgn-40*), demonstrando que o método é promissor para aplicações práticas.

Realiza-se a modelagem de sistemas rotativos sustentados por mancais hidrodinâmicos. Com esse intuito, o sistema rotativo foi discretizado pelo MEF e as forças oriundas dos mancais foram calculadas pelos coeficientes lineares de amortecimento e rigidez.

A busca dos parâmetros do desbalanceamento foi realizada pela minimização da diferença entre a vibração obtida na simulação numérica adicionada pelo ruído, emulando uma medição experimental, e a vibração calculada numericamente pelo modelo.

A utilização das velocidades críticas para obtenção do vetor de vibração que contém os graus de liberdade dos mancais na formulação da função objetivo é essencial no cálculo dos parâmetros do desbalanceamento. Isto demonstra que a análise modal combinada com o método dos mínimos quadrados para minimizar a função objetivo é efetiva na realização do balanceamento proposto para N planos de balanceamento.

Destaca-se que a utilização de velocidades abaixo da primeira velocidade crítica, nesta e acima desta para montagem do vetor de vibração que contém os graus de liberdade dos mancais na formulação da função objetivo proporciona a realização de um balanceamento teórico efetivo para o primeiro e o segundo modo.

Mancais hidrodinâmicos têm uma limitação da faixa de velocidade operacional causada pela instabilidade fluido induzida, o que limita o balanceamento teórico efetivo apenas para o primeiro e o segundo modo. Contudo, seguindo as diretrizes da norma ISO 21940-12, o modelo foi eficiente na realização do balanceamento.

A própria norma ISO 21940-12 não tem informações de rotores que são influenciados significativamente a partir do terceiro modo de balanceamento, o que deixa nítido que a operação de sistemas rotativos acima da terceira velocidade crítica não é trivial.

Destaca-se que este método de balanceamento é uma continuação do trabalho desenvolvido por Alves (2018) e Alves e Cavalca (2021), onde se constatou a efetividade para realização do balanceamento a partir de análise experimental para um plano de balanceamento. Tendo em vista que o método se mostrou satisfatório para o balanceamento em vários planos de balanceamento por meio de modelagem numérica, o próximo passo a ser dado é a realização de análise experimental em sistemas rotativos com N planos de balanceamento e expansão para análise de sistemas rotativos suportados por outros tipos de mancais, tais como mancal de rolamento.

## REFERÊNCIAS

ABBASI, A.; FIROUZI, B.; SENDUR, P.; RANJAN, G.; TIWARI, R. Identification of unbalance characteristics of rotating machinery using a novel optimization-based methodology. **Soft Computing**, v. 26, n. 10, p. 4831-4862, 2022.

ADAMS Jr, M. L., “**Rotating Machinery Vibration**”, Taylor & Francis Group, 2ª Ed., Boca Raton, USA, 2010.

ALVES, D. S. **Sistemas rotativos sujeitos às não linearidades de mancais lubrificados**. 2018. 179p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

ALVES, D. S. et al. Characteristics of oil film nonlinearity in bearings and its effects in rotor balancing. **Journal of Sound and Vibration**, v. 459, p. 114854, 2019.

ALVES, D. S.; CAVALCA, K. L. Investigation into the influence of bearings nonlinear forces in unbalance identification. **Journal of Sound and Vibration**, v. 492, p. 115807, 2021.

ARCHER, John S. Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems. **Journal of Structural Division**, v. 89, n. 4, p. 161-178, 1963.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; VANIA, A.; ZANETTA, G. A.; GREGORI, L. Identification of Rub and Unbalance in 320 MW Turbogenerators, **International Journal of Rotating Machinery**, v.9, n.2, p. 91-112, 2003.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming – Theory and Algorithms**. Jhon Wiley & Sons, New Jersey, 2006.

BISHOP, R. E. D.; GLADWELL, G. M. L. The Vibration and Balancing of an Unbalanced Flexible Rotor. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v.1, n.1, p. 66-77, 1959.

BROYDEN, C.G. The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms. **J. Inst. Maths. Applics**, v. 6, p. 76–90, 1970.

CAMARGO, L. W. F.; CASTRO, H. F.; CAVALCA, K. L. Identification of Misalignment and Unbalance in Rotating Machinery Using Multi-Objective Genetic Algorithms. **Proceedings of IFToMM 2010 – 8th International Conference on Rotor Dynamics**, Seoul, Korea, p. 571-578, 2010.

CHATZISAVVAS, Ioannis; DOHNAL, Fadi. Unbalance identification using the least angle regression technique. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 50, p. 706-717, 2015.

CHEN, J.; PATTON, R. J. **Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems**. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA, 1999.

CHILDS, D. **Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling and Analysis**. John Wiley & Sons, 1 ed., 1993.

CHILDS, D. W. Rotordynamics of Turbomachinery.. Looking Back.. Looking Forward. In: **Proc. of the International Conference in Rotor Dynamics IFToMM**, v. 2, p. 759-766, Sidney, Australia, 2002.

DARLOW, M. S. The Identification and Elimination of Non-Independent Balance Planes in Influence Coefficient Balancing. In: **Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air**. American Society of Mechanical Engineers, Paper No. 82-Gt-269, doi:10.1115/82-GT-269, 1982.

DARLOW, M. S. Balancing of High-Speed Machinery: Theory, Methods and Experimental Results. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 1, n. 1, p. 105-134, 1987.

DARLOW, M. S. **Balancing of High Speed Machinery**. Springer-Verlag New York Inc., New York, USA, 1989.

DEEPTHIKUMAR, M. B.; SEKHAR, A. S., SRIKANTHAN, M. R. Modal Balancing of Flexible Rotors with Bow and Distributed Unbalance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 24, p. 6216-6233, 2013.

DIMAROGONAS, A. D. A Brief History of Rotor Dynamics. **Proc. of the International Conference on Rotating Machine Dynamics**, Hotel des Bains, Venice, p. 1-10, 1992.

DOWSON, D. A Generalized Reynolds Equation for Fluid-film Lubrication. **Int. Journal of Mechanical Science**, v. 4, n. 2, p. 159-170, 1962.

DUBOIS, C. B.; Ocvirk, FW," Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearing3," Report 1157. **Nation Advisory Committee for Aeronautics**, 1953.

DUNKERLEY, Stanley. VIII. On the whirling and vibration of shafts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)**, n. 185, p. 279-360, 1894.

EDNEY, S. L.; FOX, C. H. J.; WILLIAMS, E. J. Tapered Timoshenko finite elements for rotor dynamics analysis. **Journal of sound and vibration**, v. 137, n. 3, p. 463-481, 1990.

FLETCHER, R. A new approach to variable metric algorithms. **The computer journal**, v. 13, n. 3, p. 317-322, 1970.

FOILES, W. C.; ALLAIRE, P. E.; GUNTER, E. J. Rotor balancing. **Shock and Vibration**, v. 5, n. 5-6, p. 325-336, 1998.

FÖPPL, A. Das Problem der Lavalschen Turbinewelle. **Civilingieur**, 41, p. 332-342, 1895.

GASCH, R.; DRECHSLER, J. Modales Auswuchten Elastischer Läufer ohne Testgewichtssetzungen. VDI-Berichte, v. 320, p. 45-54, 1978.

GENTA, G. **Dynamics of Rotating Systems**. Springer Science & Business Media Inc., New York, USA, 2005.

GNIELKA, P. Modal balancing of flexible rotors without test runs: an experimental investigation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 90, n. 2, p. 157-172, 1983.

GOLDFARB, Donald. A family of variable-metric methods derived by variational means. **Mathematics of computation**, v. 24, n. 109, p. 23-26, 1970.

GOODMAN, T. P. A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections. **Journal of Engineering for Industry**, v. 86, n. 3, p. 273-277, 1964.

HUMMEL, C. **Kristische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager**. VDI-Forschungsheft 287, 1926.

INTERNATIONAL STANDARD. **ISO 11342**: Mechanical vibration –Methods and criteria for the mechanical balancing of flexible rotors. Geneva, 1998. 45p.

INTERNATIONAL STANDARD. **ISO 21940-11**: Mechanical vibration – Rotor Balancing – Part 11: Procedures and tolerances for rotors with rigid behaviour. Geneva, 2016. 28p.

INTERNATIONAL STANDARD. **ISO 21940-12**: Mechanical vibration – Rotor Balancing – Part 12: Procedures and tolerances for rotors with flexible behaviour. Geneva, 2016. 42p.

JEFFCOTT, N. Lateral Vibration of Laded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed: Effect of Want of Balance. **Philosophical Magazine**, v. 37, p. 304-314, 1919.

KRÄMER, E., “**Dynamics of rotors and foundations**”, Springer-Verlag, New York, 381p., 1993.

KELLENBERGER, W. Should a Flexible Rotor Be Balanced in  $N$  or  $(N + 2)$  Planes? **Journal of Engineering for Industry**, v. 94, p. 548-560, 1972.

KNOPF, E.; KRÜGER, T.; NORDMANN, R.. Residual unbalance determination for flexible rotors at operational speed. In: **Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics**. Springer International Publishing, 2015. p. 757-768.

KU, D. M. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 12, n. 5, p. 599-610, 1998.

LALANNE, M., FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. John Wiley & Sons, England, 266 p., 1998.

LANG, G., LIAO, Y., LIU, Q., LIN, J. Study on the Precession Orbit Shape Analysis- Based Linear Fault Qualitative Identification Method for Rotating Machinery. **Journal of Sound and Vibration**, v. 335, p. 321-337, 2015.

LEES, A. W.; FRISWELL, M. I., “The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines”, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 208(5), p. 671-683, 1997.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y., “**Linear and Nonlinear Programing**”, Springer Science+Business Media LLC, New York, 2008.

LUND, J. Spring and Damping Coefficients for the Tilting Pad Journal Bearing. **ASLE Transactions**, v. 7, p. 342–352, 1964.

LUND, J. W.; TONNESEN, J. Analysis and Experiment on Multi-Plane Balancing of a Flexible Rotor. **Journal of Engineering for Industry**, v. 94, p. 233-242, 1972.

LUND, J. W., THOMSEN, K. K. A Calculation Method and Data for the Dynamic Coefficients of Oil-Lubricated Journal Bearings. **Topics in Fluid Bearing and Rotor Bearing System Design and Optimization**, ASME, p. 11-28, 1978.

LUND, J. W. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. **ASME Journal of Tribology**, v. 109, pp. 37- 41, 1987.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. Investigation on an experimental approach to evaluate a wear model for hydrodynamic cylindrical bearings. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 21-22, p. 9546-9564, 2016.

Mathworks Help Center. Acesso em 06 de setembro de 2022. **URL:** <https://www.mathworks.com/help/comm/ref/awgn.html>

Mathworks Help Center. Acesso em 08 de setembro de 2022. **URL:** [https://www.mathworks.com/help/gads/how-globalsearch-and-multistart-work.html?s\\_tid=srchtitle\\_How%20GlobalSearch%20and%20MultiStart%20Work\\_1](https://www.mathworks.com/help/gads/how-globalsearch-and-multistart-work.html?s_tid=srchtitle_How%20GlobalSearch%20and%20MultiStart%20Work_1)

Mathworks Help Center. Acesso em 8 de setembro de 2022. **URL:** <https://www.mathworks.com/help/gads/what-is-global-optimization.html#bsbalkx-1>

MENDES, R. U. “**Desenvolvimento de um Sistema de Atuação Magnética para Excitação de Sistemas Rotativos**”. 2011. 119p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

MENDES, R. U.; MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. “Experimental Wear Parameters Identification in Hydrodynamic Bearings Via Model Based Methodology”, **Wear**, Vol. 272-273, p. 116-129, 2017.

MIAN, T; CHOUDHARY, A; FATIMA, S. Multi-sensor fault diagnosis for misalignment and unbalance detection using machine learning. In: **2022 IEEE international conference on power electronics, smart grid, and renewable energy (PESGRE)**. IEEE, 2022. p. 1-6.



MYKLESTAD, N. O. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 11, n. 2, p. 153-162, 1944.

MORAIS, T. S.; DER HAGOPIAN, J.; STEFFEN Jr. V.; MAHFOUD, J. Optimization of unbalance distribution in rotating machinery with localized non linearity. **Mechanism and Machine Theory**, v. 72, p. 60-70, 2014.

MUSZYNSKA, A., “**Rotordynamics**”, Taylor & Francis Group, Boca Raton, USA, 2005.

NELSON, H. D., McVAUGH, J. M., The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

NELSON, H. D., A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

NEWKIRK, D. L. Shaft Whipping. **General Electric Review**, v. 25, p. 169-178, 1924.

NEWKIRK, D. L.; TAYLOR, H. D. Shaft Whipping due to Oil Action in Journal Bearings. **General Electric Review**, v. 25, n. 8, p. 559-568, 1925.

NOCEDAL, J., Wright, S. J., **Numerical Optimization**. Springer-Verlag, New York, 1999.

ÖZGÜVEN, H. N.; ÖZKAN, Z. L. ‘Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements. **ASME Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design**, v. 106, p. 72–79, 1984.

PETROV, N. Friction in Machines and the Effect of Lubricant. **Inzhenernyj Zhurnal**, v. 1, p. 71–140, 1883a.

PETROV, N. Friction in Machines and the Effect of Lubricant. **Inzhenernyj Zhurnal**, v. 2, p. 228–279, 1883b.

PETROV, N. Friction in Machines and the Effect of Lubricant. **Inzhenernyj Zhurnal**, v. 3, p. 377–436, 1883c.

PETROV, N. Friction in Machines and the Effect of Lubricant. **Inzhenernyj Zhurnal**, v. 4, p. 535–564, 1883d.

PINKUS, O. “Analysis of Elliptical Bearings”, **Transactions of ASME**, Vol. 78, p.965-973, 1956.

PINKUS, O. Solution of Reynolds Equation for Finite Journal Bearings. **Transactions of ASME**, v. 80, n. 4, p. 858-864, 1958.

PINKUS, O. “The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication”, **Transactions of the ASME**, Vol. 109, p. 2-20, 1987.

PROHL, M. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors. **Transactions of the ASME** 67; **Journal of Applied Mechanics** 12, p. A142-A148, 1945.

QIN, Qing Hua; MAO, Cheng Xiong. Coupled torsional-flexural vibration of shaft systems in mechanical engineering—I. Finite element model. **Computers & Structures**, v. 58, n. 4, p. 835-843, 1996.

RACIC, Zlatan; HIDALGO, Juan. Practical balancing of flexible rotors for power generation. In: **International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. 2007. p. 1143-1152.

RAO, J. S. **History of rotating machinery dynamics**. Springer Science & Business Media, 2011.

RANKINE, WJ Macquorn. On the centrifugal force of rotating shafts. **Van Nostrand's Eclectic Engineering Magazine (1869-1879)**, v. 1, n. 7, p. 598, 1869.

RATHBONE, T. C., “Turbine Vibration and Balancing”, **Trans. of American Society of Mechanical Engineers**, Vol. 51, Part I, p. 267-284, 1929.

REYNOLDS, Osborne. IV. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower’s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, n. 177, p. 157-234, 1886.

RUHL, R., BOOKER, J. "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", **Journal of Engineering for Industry**, v. 94, p. 128-132, 1972.

SANTANA, P. M.. **Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação**. 2009. 94p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

SHANNO, David F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. **Mathematics of computation**, v. 24, n. 111, p. 647-656, 1970.

SMITH, David Macleish. The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 142, n. 846, p. 92-118, 1933.

SOMMERFELD, A., "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung", Zs. **Math. And Phys**, v. 50, p. 97-155, 1904.

STODOLA, A. Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager. **Schweizerische Bauzeitung**, v. 85, n. 21, p. 265-266, 1925.

SUDHAKAR, G. N. D. S.; SEKHAR, A. S. Identification of unbalance in a rotor bearing system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, n. 10, p. 2299-2313, 2011.

THEARLE, E. L. Dynamic balancing of rotating machinery in the field. **Trans. American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics**, v. 56, n. 10, p. 745-753, 1934.

THORKILDSEN, T. Solution of a distributed mass and unbalanced rotor system using a consistent mass matrix approach. **MSE Engineering Report, Arizona State University**, 1972.

TIWARI, R.; CHAKRAVARTHY, V. Simultaneous estimation of the residual unbalance and bearing dynamic parameters from the experimental data in a rotor-bearing system. **Mechanism and Machine Theory**, v. 44, n. 4, p. 792-812, 2009.

TOWER, Beauchamp. Research Committee on Friction: Second Report on Friction Experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 36, n. 1, p. 58-70, 1885.

TUCKMANTEL, F. W. S., “**Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estruturas de Suporte para Resolução Numérica**”. 2010. 159p. Dissertação (Mestrado), - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas 2010.

UGRAY, Z.; LASDON, L.; PLUMMER, J. C.; GLOVER, F.; KELLY, J.; MARTÍ, R. Scatter search and local NLP solvers: A multistart framework for global optimization. **INFORMS Journal on computing**, v. 19, n. 3, p. 328-340, 2007.

UNTAROIU, C. D.; ALLAIRE, Paul E.; FOILES, William C. Balancing of flexible rotors using convex optimization techniques: optimum min-max LMI influence coefficient balancing. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 130, n. 2, 2008.

VANCE, J. M.; ZEIDAN, F. Y.; MURPHY, B. G. **Machinery vibration and rotordynamics**. John Wiley & Sons, USA, 2010.

WEIMING, L.; NOVAK, M. Dynamic behaviour of turbine-generator-foundation systems. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 24, n. 3, p. 339-360, 1996.

YAO, J.; LIU, L.; YANG, F.; SCARPA, F.; & GAO, J.. Identification and optimization of unbalance parameters in rotor-bearing systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 431, p. 54-69, 2018.

YAO, J.; YANG, F.; SU, Y.; SCARPA, F.; & Gao, J.. Balancing optimization of a multiple speeds flexible rotor. **Journal of Sound and Vibration**, v. 480, p. 115405, 2020.

YU, X. General influence coefficient algorithm in balancing of rotating machinery. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 10, n. 2, p. 85-90, 2004.

ZORZI, E.; NELSON, H., “Finite Element Simulation of Rotor-Bearing System With Internal Damping”, **Journal of Engineering for Power**, v. 99, n. 1, p. 71-76, 1977.

ZORZI, E.; NELSON, H., “The Dynamics of Rotor-Bearing Systems With Axial Torque - A Finite Element Approach”, **Journal of Mechanical Design**, v.102, n.1, p. 158-161, 1980.

ZOU, D.; ZHAO, H., LIU, G.; Ta, N.; & RAO, Z. Application of augmented Kalman filter to identify unbalance load of rotor-bearing system: Theory and experiment. **Journal of Sound and Vibration**, v. 463, p. 114972, 2019.