



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Maurício Linhares Galvão

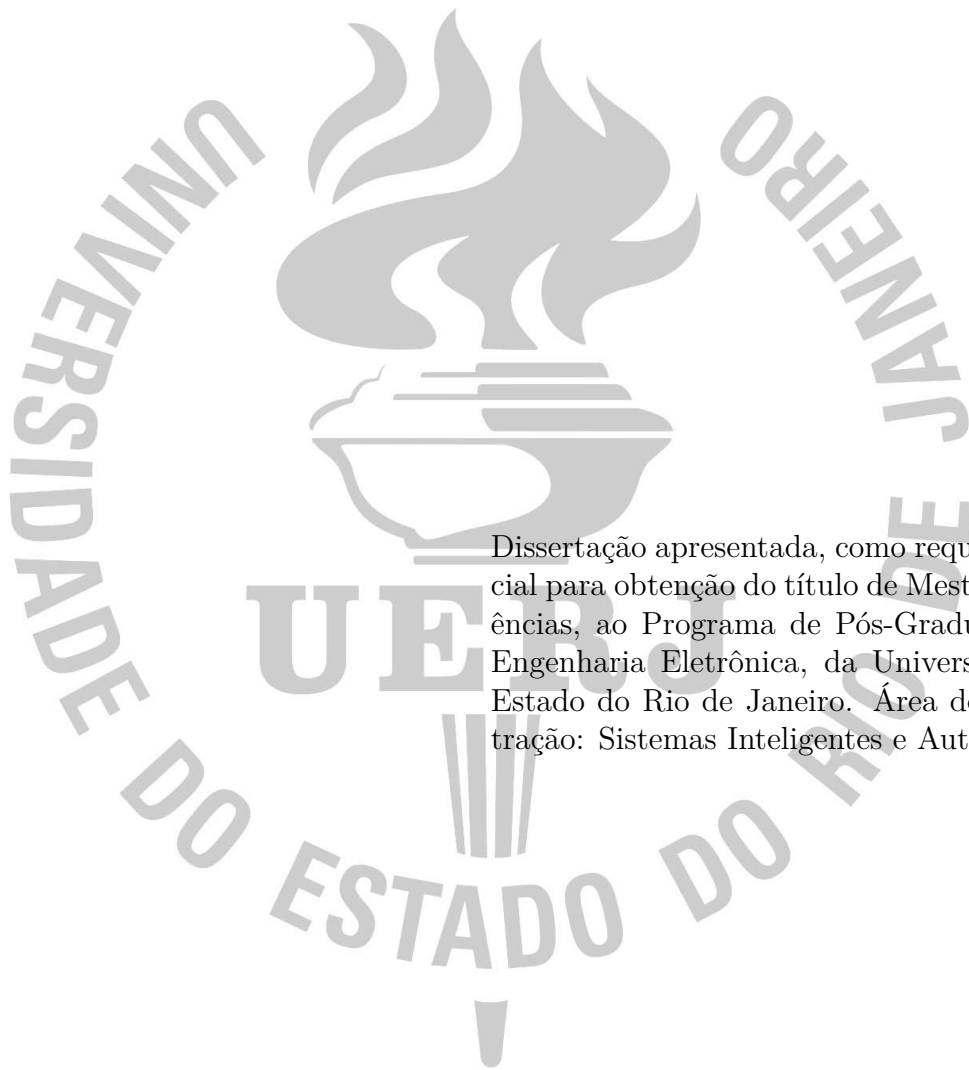
**Busca Extremal para Equações Diferenciais Parciais
de Stefan com Fronteira Móvel**

Rio de Janeiro

2022

Maurício Linhares Galvão

**Busca Extremal para Equações Diferenciais Parciais
de Stefan com Fronteira Móvel**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

G182 Galvão, Maurício Linhares.
Busca extremal para equações diferenciais parciais de Stefan com fronteira móvel / Maurício Linhares Galvão. – 2022.
70f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle ajustável - Teses. 3. Equações diferenciais parciais - Teses. 4. Algoritmos - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.513.4

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

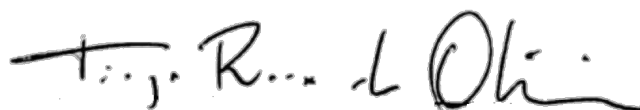
Maurício Linhares Galvão

**Busca Extremal para Equações Diferenciais Parciais
de Stefan com Fronteira Móvel**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em 24 de maio de 2022.

Banca Examinadora:



Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

PEL - UERJ



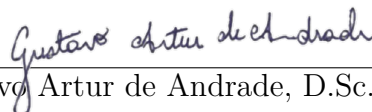
Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

PEL - UERJ



Prof. Carlos Eduardo Trabuco Dorea, D.Sc.

DCA - UFRN



Prof. Gustavo Artur de Andrade, D.Sc.

DAS - UFSC

Rio de Janeiro

2022

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Laura por todo o apoio e companheirismo que poderia receber durante essa trajetória, em tempos de pandemia e isolamento, foi fundamental ter você ao meu lado para que eu nunca desistisse.

Agradeço ao meu orientador Tiago Roux de Oliveira pela disponibilidade, paciência e empenho em ter me orientado neste trabalho.

Agradeço ao CMASM, em especial ao Capitão de Mar e Guerra (EN) Fernando Antonio Almeida Coelho, por ter permitido que eu realizasse esse curso.

RESUMO

GALVÃO, M.L. *Busca Extremal para Equações Diferenciais Parciais de Stefan com Fronteira Móvel*. 70 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Esta dissertação apresenta o projeto e a análise da busca extremal para mapas estáticos com entrada governada por uma equação diferencial parcial (EDP) de difusão definida em um espaço variante no tempo descrito por uma equação diferencial ordinária (EDO). Esse é o primeiro esforço para buscar uma extensão da busca extremal da EDP do calor para a EDP de Stefan. A compensação da dinâmica de atuação é realizada por um controlador de fronteira (*backstepping control*) através de uma transformação *backstepping* para fronteira móvel, que é utilizado para transformar o acoplamento EDP-EDO original em um sistema alvo no qual a estabilidade exponencial é provada. A convergência exponencial local para uma pequena vizinhança do ponto ótimo é provada utilizando a metodologia de *backstepping*, funcional de Lyapunov-Krasovskii e o método da média em dimensões infinitas. Uma extensão do controle por busca extremal com compensação de atraso do problema de Stefan também é discutida.

Palavras-chave: Controle adaptativo. Busca extremal. Equação diferencial parcial. Teoria da média. Sistemas de dimensão infinita. Transformação *Backstepping*

ABSTRACT

GALVÃO, M.L. *Extremum Seeking for Stefan Partial Differential Equation with Moving Boundary*. 70 f. Dissertation (Master Degree Course in Electronic Engineering) - Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2022.

This dissertation presents the design and analysis of the extremum seeking for static maps with input governed by a parabolic partial differential equation (PDE) of the diffusion type defined on a time varying spatial domain described by an ordinary differential equation (ODE). This is the first effort to pursue an extension of extremum seeking from the heat PDE to the Stefan PDE. The compensation of the average-based actuation dynamics is performed by a *backstepping* controller via backstepping transformation for the moving boundary, which is utilized to transform the original coupled PDE-ODE into a target system whose exponential stability is proved. The local exponential convergence to a small neighborhood of the optimal point is proven by means of backstepping methodology, Lyapunov-Krasovskii functional and averaging in infinite dimensions. The extension for the delay-compensated extremum seeking control of the Stefan problem is also discussed.

Keywords: Adaptive Control. Extremum Seeking. Partial Differential Equation. Averaging Theory. Infinite dimension systems. Backstepping Transformation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Malha de controle com dinâmica de atuação governada por um EDP de Stefan de extremo desconhecido.	15
Figura 2	Esquema do problema de Stefan de uma fase com o perfil de temperatura na fase sólida sendo uma temperatura de derretimento uniforme [1]	19
Figura 3	A cascata da dinâmica EDP e a planta EDO.	21
Figura 4	Exemplo do método do cálculo da média com a dinâmica do sistema convergendo para o equilíbrio $x = 1$, a solução exata é representada pela linha contínua e a média pela linha tracejada com $\epsilon = 0.3$. O eixo vertical é o estado x [2]	23
Figura 5	Esquema de busca extremal para mapeamento escalar $y(t) = Q(\theta(t))$ baseado em perturbações senoidais $S(t)$ e $M(t)$	26
Figura 6	Ilustração da perturbação senoidal [3]	27
Figura 7	Resultado da simulação em malha fechada do mapeamento $y(t) = Q(\theta(t)) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t) - \theta^*)$ e com os seguintes parâmetros: $\omega = 20\pi$, $a = 0.2$, $k = 10$, $H = -2$, $y^* = 25$ e $\theta^* = 5$	29
Figura 8	Diagrama de blocos do controle extremal aplicado ao problema de Stefan de uma fase.	34
Figura 9	Diagrama de blocos do controle extremal aplicado ao problema de Stefan de uma fase com filtros adicionais para a simulação.	51
Figura 10	Convergência de $T(0, t)$ (curva vermelha) e $T(s(t), t)$ (curva preta) para T_d (curva verde) em um espaço tridimensional para o estado da EDO $T(x, t)$	54
Figura 11	Convergência da fronteira móvel $\Theta(t)$ para Θ^*	54
Figura 12	Convergência da saída $y(t)$ para y^*	55
Figura 13	Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0.	55
Figura 14	Esquema do problema de Stefan de uma fase com atraso [4]	56
Figura 15	Malha de controle da busca extremal com um esquema básico de preditor aplicado ao problema de Stefan de uma fase.	58
Figura 16	Convergência da fronteira móvel $\Theta(t)$ para Θ^* com atraso.	60

Figura 17 Convergência da saída $y(t)$ para y^* com atraso.	60
Figura 18 Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0 com atraso.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros de simulação sem atraso.....	53
Tabela 2	Parâmetros de simulação com atraso	59

LISTA DE SIGLAS

ABS	<i>Antilock Braking Systems</i>
BIM	Boundary Immobilization Method
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
1.1	Modelagem do Problema de Stefan de Fase Única	18
1.2	Teoria da Média	22
1.3	Busca Extremal	25
1.3.1	Análise de convergência	27
1.4	Método de <i>Backstepping</i> para EDPs	29
1.5	Desigualdades importantes	31
2	PROJETO DO CONTROLADOR E PROVA DE ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	33
2.1	Dinâmica de Atuação e Sinal de Saída	33
2.2	Sinal de Perturbação	35
2.3	Erro de estimação e dinâmica do erro da EDP	37
2.4	Compensação do Problema de Stefan	39
2.5	Implementação da lei de controle da busca extremal.....	42
2.6	Análise de estabilidade	42
2.6.1	Sistema médio em malha fechada.....	43
2.6.2	Transformação inversa.....	45
2.6.3	Estabilidade Exponencial	46
2.6.4	Convergência assintótica para o ponto extremo	48
3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	50
3.1	Derivação do Método Numérico	50
3.1.1	Técnica <i>Boundary Immobilization Method</i>	50
3.2	Resultado das Simulações	52
4	EXTENSÃO DA BUSCA EXTREMAL PARA EDP DE STEFAN COM ATRASO	56
4.1	Simulação Numérica	59

5	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE	68

INTRODUÇÃO

A busca extremal é uma abordagem de otimização em tempo real no campo do controle adaptativo não baseada em modelos, ou seja, não requer conhecimento explícito da planta nem da função que deseja otimizar. Esse método é usado para manter o extremo de um mapa de saída dinâmico ou estático. Desde que seja estável, o mapa pode possuir características não lineares. O principal objetivo é encontrar a entrada ótima de um sistema desconhecido que direciona a saída do sistema mensurável y ao seu valor ótimo desconhecido y^* utilizando o método da perturbação.

A busca extremal foi introduzida primeiramente em [5] para maximizar a transferência de energia para um bonde elétrico. Os russos, principalmente [6] estudaram muito sobre esse conceito na década de 1940, antes de ser introduzido na década de 1950 nos Estados Unidos da América por [7], no qual foi proposto como otimizar um motor de combustão interna, detalhando o algoritmo de controle extremal e seu desempenho.

O número de publicações entre as décadas de 1960 e 1990 continuou de forma modesta [8], o foco nesse período foi a pesquisa em outros tipos de controle adaptativo. Os trabalhos abordados sobre controle extremal nesse período focavam na excitação periódica para explorar o regime permanente dos sistemas estudados. Após a publicação da prova rigorosa de estabilidade do sistema de controle extremal por realimentação de saída [9], o interesse sobre o assunto aumentou consideravelmente, refletindo no número de publicações na década de 2000.

Desde então, o interesse sobre o tema voltou a ter importância na teoria do controle devido à crescente necessidade de otimizar plantas de modo a reduzir os custos operacionais e adequar as especificações do produto [10], sendo publicadas as importantes pesquisas como [11] [12] [13] [14], destacando a referência [13] que apresenta o método de Newton para busca extremal, no qual apresenta como principal vantagem uma taxa de convergência mais rápida se comparada com o método do gradiente. Além disso, a busca extremal foi aplicada com sucesso em diversos sistemas de engenharia, como robôs móveis, bioprocessos, motores de combustão e projeto de freios ABS (*Antilock Braking Systems*).

Existem diferentes métodos utilizados no controle extremal, dentre eles, o mais popular é o método da perturbação senoidal, pois permite rápida adaptação, indo além

dos métodos que necessitam da dinâmica da planta antes de realizar a otimização [11]. A perturbação senoidal usa um filtro passa-alta na saída da planta e uma pequena perturbação senoidal para estimar o gradiente da função objetivo. Entretanto, apenas estabilidade local pode ser garantida.

Outro tipo de algoritmo utilizado na área de controle extremal é o método baseado em Newton, introduzido pela primeira vez em [15], no qual, para os casos de entrada única, utiliza uma estimativa da segunda derivada do mapa empregado. A grande diferença para o método do gradiente é a não dependência da Hessiana na convergência do algoritmo, podendo ser atribuída arbitrariamente [13]. Essa característica é importante para algoritmos que não são baseados em modelos, como o controle extremal, no qual a Hessiana é desconhecida.

O controle extremal pode ser combinado com outras estratégias de controle não linear para melhorar o desempenho do controle, conforme reportado em [16]. A ideia do algoritmo consiste em fazer com que a função objetivo alcance o ponto ótimo por um método de chaveamento utilizando o conceito de modos deslizantes. A principal dificuldade desse método é o comportamento de estrutura variável gerado pela estimativa do gradiente [17].

Todas as aplicações citadas anteriormente tratavam da combinação da teoria da busca extremal com equações diferenciais ordinárias (EDO). O estudo sobre sistemas de dimensão infinita possibilitou a introdução desse tema a diversas aplicações, dentre elas destaca-se o sistema que leva em consideração as dinâmicas de traso em um atuador, no qual a propagação de atraso pode ser representada por uma equação diferencial parcial (EDP) hiperbólica de primeira ordem. A compensação do atraso do atuador e do sensor, desenvolvidas em [18] e [19] para sistemas lineares e não lineares respectivamente, pelo método de *backstepping* de dimensão infinita, foi fundamental para que o primeiro trabalho sobre busca extremal aplicado a EDPs fosse realizado em [20]. Nesse trabalho foi considerado um atuador com tempo de atraso conhecido, a prova de estabilidade do sistema de malha fechada e a convergência para o extremo foram apresentadas.

Um grande número de aplicações em diversas áreas aparecem como problemas de fronteira móvel ou mudança de fase, como [21], [22] e [23]. Normalmente, esses tipos de problemas surgem em situações de condução de calor e precisam ser resolvidos em um domínio dependente do tempo com uma condição de fronteira móvel. O sistema de Stefan

é uma EDP de fronteira móvel que modela fenômenos termodinâmicos de mudança de fase entre líquido e sólido, como por exemplo, o gelo derreter em um ambiente quente e a água congelar em um ambiente frio. Tal mudança de fase acontece nas geleiras das regiões polares, solidificação de metal fundido em fundição, extrusão em polímero de impressão 3-D, sinterização a laser para impressão 3-D de metal, criocirurgia para tratamento de câncer, armazenamento de energia térmica em edifícios, etc. Os fenômenos de mudança de fase podem ser considerados como um crescimento ou declínio dos tamanhos de domínio das fases líquidas e sólidas. Além da mudança de fase térmica, um crescimento no domínio móvel pode ser visto em dinâmicas químicas, biológicas e sociais, como o crescimento do tumor no corpo de um paciente, alongamento axonal para transmissão de sinal de neurônios, região litiada em eletrodos de baterias de íon-lítio, disseminação de espécies invasoras para um novo ambiente, etc [24].

O problema associado com o objetivo de encontrar soluções para o modelo de Stefan é referido como "problema de Stefan". Ele é nomeado dessa forma em homenagem ao físico austríaco Josef Stefan, celebrado por suas inúmeras contribuições à termodinâmica e transferência de calor no século XIX. A dinâmica da posição da fronteira móvel no problema de Stefan é governada por uma equação diferencial ordinária (EDO) que depende do estado da EDP, gerando um acoplamento não linear da dinâmica da EDP e da EDO, aumentando a complexidade do problema quando comparado à análise convencional para EDPs de domínio fixo (não dependentes do tempo ou estado) e EDOs.

Uma importante discussão é sobre a validação do modelo de Stefan. Embora o movimento senoidal usual provocado pelo algoritmo da busca extremal viole a manutenção da fase quando o extremo é alcançado ou durante a fase transiente, pode-se manter a fase pelo menos para o sistema médio, dessa forma, preservando a análise de convergência.

Formulação do Problema

Como descrito no resumo, essa dissertação foca na análise do esquema de busca extremal, com análise de estabilidade e convergência, para um mapa estático desconhecido $Q(s(t))$ com dinâmicas de atuação governadas por uma EDP de difusão com fronteira móvel, conforme mostrado na Figura 1. O objetivo deste trabalho é projetar um controlador que direcione a saída $y(t)$ do mapa estático $Q(s(t))$ para um valor ótimo y^* e

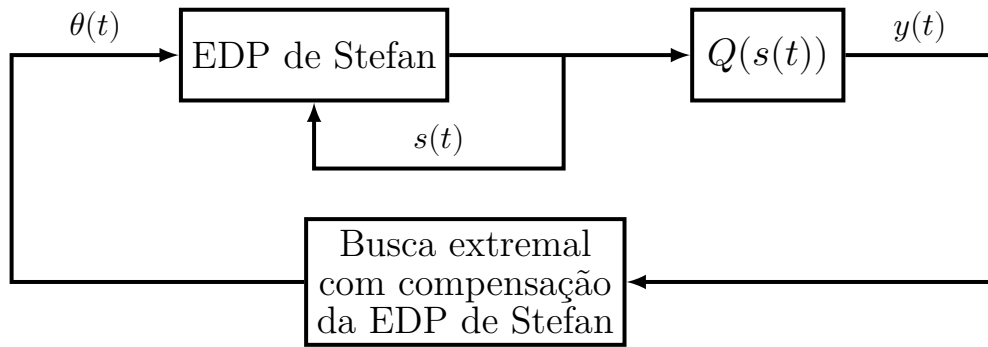


Figura 1: Malha de controle com dinâmica de atuação governada por um EDP de Stefan de extremo desconhecido.

para que esse objetivo seja alcançado, é necessário que a entrada do mapa, representada pela interface móvel $s(t)$ da EDP de Stefan, alcance o valor da interface ótima s^* . Esse valor ótimo vai depender do tipo de material que se quer controlar e o seu mapa estático é caracterizado por um ponto máximo ou mínimo. O compensador da EDP de Stefan é baseado em um modelo desconhecido, no qual estimamos a Hessiana do mapa estático usando um sinal de perturbação e a teoria do gradiente para encontrar a entrada da EDP $\theta(t)$ que auxilie no objetivo de controle.

Estrutura da Dissertação

Será apresentada a fundamentação teórica deste trabalho no capítulo 1, abrangendo conceitos e temas fundamentais para o desenvolvimento do problema e sua prova de estabilidade, como a modelagem física do problema de Stefan, conceitos básicos da busca extremal, método de *backstepping*, teorema da média, importantes desigualdades e a teoria dos semigrupos analíticos, pois estamos lidando com dinâmicas de atuação com dimensão infinita.

No capítulo 2 são definidas as equações de malha fechada da Figura 1 e em seguida é projetado o compensador da EDP de Stefan utilizando o método de *backstepping*. O desenvolvimento do problema continua aplicando o teorema da média para chegar no sistema médio de malha fechada. A partir desse sistema, será utilizado novamente o método de *backstepping* e com o auxílio de uma função de Lyapunov, o teorema da média para dimensões infinitas e do semigrupo analítico, a estabilidade exponencial do sistema médio é provada. Como último passo, a convergência assintótica para uma vizinhança do

extremo do mapa estático desconhecido é mostrada.

A simulação numérica das dinâmicas da malha de controle e sua propriedade de estabilidade são apresentadas no capítulo 3, primeiramente é definido o modelo numérico e em seguida são apresentados os parâmetros da simulação com o objetivo de validar a convergência para o extremo.

Os resultados do capítulo 1 são estendidos para o capítulo 4, no qual é estudado o esquema de busca extremal para mapas estáticos com atuação de atraso para dinâmicas de atuação governada por uma EDP de Stefan. Como o desenvolvimento desse problema segue os mesmos passos do capítulo 2, apenas as etapas mais importantes serão abrangidas, incluindo a simulação numérica do sistema de malha fechada.

Por fim, o último capítulo desta dissertação resume o problema apresentado, oferecendo perspectivas para trabalhos futuros.

Notação e Terminologia

Denotamos as derivadas parciais de uma função $u(x, t)$ como

$$u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

A norma de um vetor de estado de uma EDO de dimensão finita $\vartheta(t)$ é denotada por barras simples, $|\vartheta(t)|$. Em contrapartida, as normas de funções são indicadas por barras duplas. Denotamos a norma espacial $\mathcal{L}_2[0, D]$ [25] do estado EDP $u(x, t)$ como

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}^2 := \int_0^D u^2(x, t) dx$$

onde descartamos o índice $\mathcal{L}_2([0, D])$, portanto $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}$, se não especificado de outra forma. Além disso, denota-se a norma \mathcal{H}_1 [25] como

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|u(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|u_x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \quad (1)$$

Conforme definido em [2], diz-se que uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ em um intervalo $[t_1, t_2]$, se

$$\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k, \forall t \in [t_1, t_2]$$

Na maioria dos casos, não fornecemos estimativas precisas para as constantes k e $\bar{\epsilon}$, e usamos $\mathcal{O}(\epsilon)$ para ser interpretado como uma relação de ordem de magnitude para um ϵ suficientemente pequeno.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados conceitos fundamentais relacionados aos desenvolvimentos realizados nesta Dissertação.

1.1 Modelagem do Problema de Stefan de Fase Única

O modelo físico que descreve o problema de Stefan de uma fase em um material de um único componente de comprimento L é descrito na Figura 2. A dinâmica do processo depende da evolução no tempo da interface móvel em que a transição de fase líquida para sólido (ou vice-versa) ocorre [1]. Portanto, o processo de derretimento ou solidificação que ocorre no domínio $[0, L]$ leva a existência de dois subdomínios variantes no tempo, $[0, s(t)]$ e $[s(t), L]$, que representam a fase líquida e a fase sólida, respectivamente. Considerando um perfil de temperatura uniformemente equivalente à temperatura de derretimento na fase sólida, um modelo dinâmico associado ao processo de derretimento envolve somente o comportamento térmico da fase líquida. Considerando um material de densidade ρ e capacidade térmica C_p , a lei de conservação de energia local é dada por

$$\rho C_p T_t(x, t) = -q_x(x, t), \quad x \in (0, s(t)), \quad (2)$$

no qual $q(x, t)$ representa o fluxo de calor e $T(x, t)$ o perfil de temperatura. Além disso, o equilíbrio da energia local na posição da interface líquido-sólido $x = s(t)$ relacionada com o calor latente resulta na seguinte dinâmica de fronteira móvel

$$\rho \Delta H^* \dot{s}(t) = q(s(t), t), \quad (3)$$

sendo ΔH^* o calor latente de fusão. A condução térmica para um material em ponto de derretimento obedece a lei de Fourier

$$q(x, t) = -k T_x(x, t), \quad x \in [0, s(t)], \quad (4)$$

onde k é a condutividade térmica. Portanto, a evolução no tempo do perfil de temperatura no domínio do material pode ser obtido combinando (2) com (4)

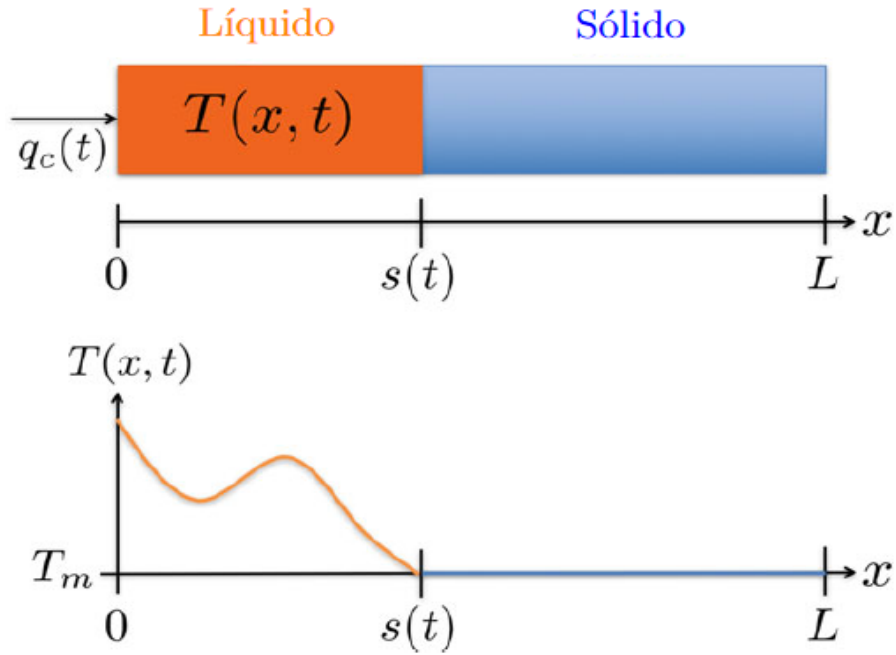


Figura 2: Esquema do problema de Stefan de uma fase com o perfil de temperatura na fase sólida sendo uma temperatura de derretimento uniforme [1]

$$T_t(x, t) = \alpha T_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)), \quad (5)$$

em que

$$\alpha := \frac{k}{\rho C_p}. \quad (6)$$

Na fronteira $x = 0$, existem dois casos de como aplicar a condição de fronteira, a condição de contorno de Neumann e de Dirichlet. A primeira é atuada pelo fluxo de calor que entra como uma fonte externa e pode ser manipulada como uma variável de controle, definida como $q_c(t)$ e com condição de fronteira definida pela lei de condução térmica (4). A segunda é atuada diretamente pela temperatura, sendo a variável de controle $T_c(t)$. Dessa forma, a condição de fronteira em $x = 0$ pode ser descrita respectivamente como

$$-kT_x(0, t) = q_c(t), \quad (7)$$

ou

$$T(0, t) = T_c(t). \quad (8)$$

A condição de fronteira em $x = s(t)$ está relacionada com a temperatura de derretimento (T_d), que é a temperatura necessária para que ocorra a mudança da fase sólida para a líquida, lembrando que a consideramos com um valor constante, ou seja,

$$T(s(t), t) = T_d. \quad (9)$$

As condições iniciais do perfil de temperatura da interface móvel são definidas respectivamente como

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad s(0) = s_0. \quad (10)$$

sendo $s_0 > 0$

A propriedade mais importante do problema de Stefan é a dinâmica da fronteira móvel $s(t)$, sem considerá-la, a EDP de Stefan seria um simples sistema linear. Combinando (3) com (4), é possível derivar a "condição de Stefan" definida como a seguinte EDO não linear e variante no tempo.

$$\dot{s}(t) = -\beta T_x(s(t), t), \quad (11)$$

onde

$$\beta := \frac{k}{\rho \Delta H^*}. \quad (12)$$

Neste trabalho, será utilizada a condição de fronteira de Neumann, dessa forma, o sistema de equações da EDP de Stefan é formado por (5), (7), (9) e (11)

$$T_t(x, t) = \alpha T_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (13)$$

$$-kT_x(0, t) = q_c(t) \quad (14)$$

$$T(s(t), t) = T_d \quad (15)$$

$$\dot{s}(t) = -\beta T_x(s(t), t), \quad (16)$$

A Figura 3 mostra o diagrama de blocos da cascata EDP-EDO representada pelas equações (13)-(16). O domínio da EDP é a fronteira móvel $s(t)$, que é a saída da EDO.

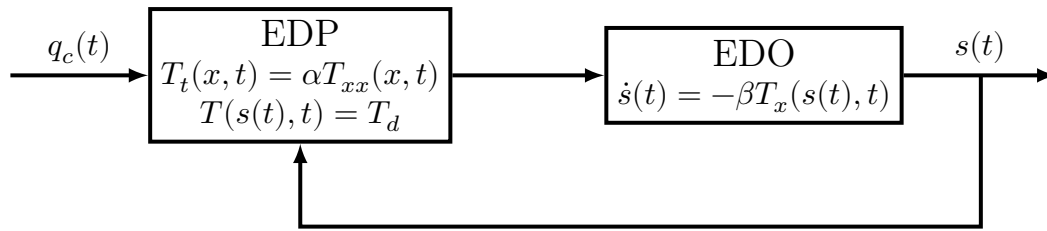


Figura 3: A cascata da dinâmica EDP e a planta EDO.

Esse tipo de realimentação é a principal diferença em relação às EDPs de fronteira fixa, onde o domínio não depende do tempo t e é um valor fixo.

Levando em consideração que o domínio $x \in [0, s(t)]$ é ocupado pela fase líquida e com o objetivo de manter a validade física do material, alguns conceitos precisam ser definidos no problema de Stefan

Observação 1. *A formulação do problema de Stefan é válida somente se as seguintes condições forem verdadeiras*

$$T(x, t) \geq T_d, \quad \forall x \in [0, s(t)], \quad \forall t \geq 0, \quad (17)$$

$$0 < s(t) < L, \quad \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Ou seja, o modelo é válido somente se a temperatura do líquido for maior que a temperatura de derretimento e a interface do sistema permanecer dentro do domínio do material. A partir de (17) o seguinte lema é derivado

Lema 1. *Se a condição (17) for verdadeira, então a interface é monotonicamente não decrescente, ou seja,*

$$\dot{s}(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (19)$$

O lema 1 é definido utilizando o lema de Hopf e uma prova detalhada pode ser encontrada em [26]. Para satisfazer as condições (17) e (18) deve-se assumir a seguinte restrição de condição inicial

Hipotese 1. *A posição da interface inicial satisfaz $s_0 > 0$ e $T_0(x)$ é uma função Lipschitz contínua se,*

$$0 \leq T_0(x) - T_d \leq H(s_0 - x). \quad (20)$$

1.2 Teoria da Média

O cálculo da média é um dos elementos mais importantes para a aplicação da busca extremal e a prova de estabilidade desse problema apresentado na Seção 2.6. Esse método aproxima a solução de um sistema periódico não linear para um sistema médio e é definido de acordo com o seguinte teorema.

Seja

$$\dot{x} = \epsilon u(t, x, \epsilon), \quad (21)$$

$$\dot{x} = \epsilon u_{av}(x), \quad (22)$$

onde

$$u_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau, x, 0) d\tau. \quad (23)$$

Teorema 1 (Teorema da média [2]). *Seja $u(t, x, \epsilon)$ e sua derivada parcial em relação a (x, ϵ) até a segunda ordem seja contínua e limitada por $(t, x, \epsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \epsilon_0]$, para cada conjunto compacto $D_0 \subset D$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio. Suponha que u é T -periódico em t para algum $T > 0$, ou seja, $u(x + nT) = u(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, e ϵ é um parâmetro positivo. Seja $x(t, \epsilon)$ e $x_{av}(\epsilon t)$ as soluções de (21) e (22), respectivamente*

- *Se $x_{av}(\epsilon t) \in D \forall t \in [0, b/\epsilon]$ e $x(0, \epsilon) - x_{av}(0) = \mathcal{O}(\epsilon)$, então existe um $\epsilon^* > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon^*$, $x(t, \epsilon)$ é definido e*

$$x(t, \epsilon) - x_{av}(\epsilon t) = \mathcal{O}(\epsilon) \text{ em } [0, \infty) \quad (24)$$

- *Se a origem $x = 0 \in D$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (22), $\Omega \subset D$ é um subconjunto da sua região de atração, $x_{av}(0) \in \Omega(\epsilon)$ e $x(0, \epsilon) - x_{av}(0) = \mathcal{O}(\epsilon)$, então existe um $\epsilon^* > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon^*$, $x(t, \epsilon)$ é definido e*

$$x(t, \epsilon) - x_{av}(\epsilon t) = \mathcal{O}(\epsilon) \text{ para todo } t \in [0, \infty) \quad (25)$$

- *Se a origem $x = 0 \in D$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (22), então existe uma constante positiva ϵ^* e k tal que, para todo $0 < \epsilon < \epsilon^*$, (21) tem uma única, exponencialmente estável, solução T -periódica $\bar{x}(t, \epsilon)$ com a propriedade $\|\bar{x}(t, \epsilon)\| \leq k\epsilon$*

O teorema 1 é exemplificado com um problema teórico de acordo com a Figura 4. a dinâmica do sistema é dada por

$$\dot{x} = \epsilon(x \sin^2(t) - 0.5x^2) = \epsilon u(t, x). \quad (26)$$

A função $u(t, x)$ é π -periódica em t . A função média u_{av} será

$$u_{\text{av}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \sin^2(t) - 0.5x^2) dt = 0.5(x - x^2). \quad (27)$$

Dessa forma, o sistema médio é representado por

$$\dot{x} = 0.5\epsilon(x - x^2) \quad (28)$$

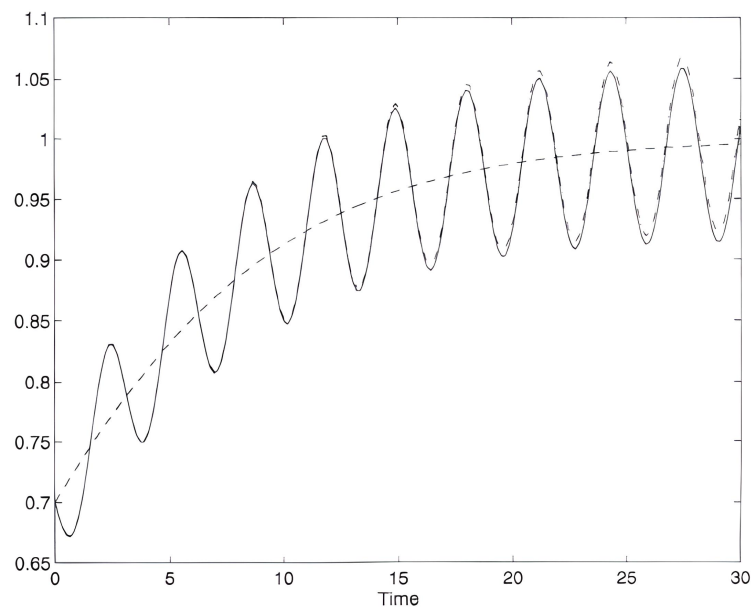


Figura 4: Exemplo do método do cálculo da média com a dinâmica do sistema convergendo para o equilíbrio $x = 1$, a solução exata é representada pela linha contínua e a média pela linha tracejada com $\epsilon = 0.3$. O eixo vertical é o estado x [2]

Se $u(t, 0, \epsilon) = 0$ para todo $(t, \epsilon) \in [0, \infty) \times [0, \epsilon_0]$, a origem será um ponto de equilíbrio de (21). Pela unicidade da solução $x(t, \epsilon)$ T-periódica, verifica-se que $\bar{x}(t, \epsilon)$ é uma solução trivial em $x = 0$. Nesse caso, o teorema garante que a origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável de (21).

Ao analisar um sistema médio e provando que ele é exponencialmente estável, pode-

se aplicar o teorema 1, dessa forma, se o sistema original (21) é exponencialmente estável, a solução se comporta como (25). Esse teorema é muito útil quando aplicado o esquema de busca extremal, pois é mais simples analisar o sistema médio em malha fechada do que o sistema original.

Como as dinâmicas de atuação governadas pela EDP de Stefan representam um sistema de dimensão infinita, a aplicação da teoria da média necessita ser estendido para sistemas de dimensão infinita, no qual o resultado pode ser encontrado em [27] e é resumido pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (Teoria da média para EDPs [27]). *Considere o sistema de dimensão infinita, definido no espaço de Banach \mathcal{X} , que é um espaço vetorial normatizado completo, pois, dado uma sequência de vetores de Cauchy, ele sempre converge para um limite bem definido que está dentro do espaço [28].*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(\epsilon, x), \quad (29)$$

com $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$, $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$ da origem a um semigrupo contínuo $T_A(t)$ com a propriedade $\|T_A(t)\| \leq Me^{\mu t}$ para algum M, μ . Além disso, a não linearidade $F : (\mathbb{R})_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ com $t \rightarrow F(t, x)$ é Fréchet diferenciável em x , fortemente contínua e uniformemente periódica em t com respeito a x no subconjunto compacto \mathcal{X} . Adicionalmente, a seguinte hipótese 1 tem de ser satisfeita: Se $h : [s, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ é norma contínua, então:

- i) $\int_s^t T_A(t - \tau)h(\tau) \in \mathcal{D}(A)$, para $s \leq t$;
- ii) $\left\| A \int_s^t T_A(t - \tau)h(\tau)d\tau \right\| \leq Me^{\mu t} \sup_{s \leq \tau \leq t} \|h(\tau)\|$.

Junto com (29), o sistema médio

$$\dot{x}_{av} = Ax_{av} + F_0(x) \quad \text{com} \quad F_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, x)d\tau \quad (30)$$

é considerado. Suponha que $x_{av} = 0 \in D \subset \mathcal{X}$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (30), então para algum $\bar{\omega} > 0$ e $\omega > \bar{\omega}$

- a) existe uma solução periódica exponencialmente estável única $t \rightarrow \bar{x}(t, 1/\omega)$, contínua em t e $1/\omega$, com $\|\bar{x}(t, 1/\omega)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ para $t > 0$,

b) e $\|x_0 - x_{av}(0)\| < \mathcal{O}(1/\omega)$, a solução estimada de (29) é dada por

$$\|x(t) - x_{av}(t)\| < \mathcal{O}(1/\omega), \quad t > 0, \quad (31)$$

c) e para $\|x_0\| < \mathcal{O}(1/\omega)$ e pelo múltiplo teorema estável, assegura-se

$$\|x(t) - \bar{x}(t, 1/\omega)\| \leq Ce^{\gamma t}, \quad t > 0, \quad (32)$$

para algum $C, \gamma > 0$

Observação 2. De acordo com a hipótese 1 [27], a propriedade de suavidade do operador A é trivialmente satisfeita se A gera um semigrupo analítico em (29) e (30)

Conforme demonstrado no teorema 2 e na observação 2, o sistema original de malha fechada (29) necessita atender alguns critérios para que se possa concluir sobre sua estabilidade exponencial, definindo um vetor de estado de dimensão infinita adequado e mostrando que A gera um semigrupo analítico.

1.3 Busca Extremal

Nesta seção será abordada a versão mais comum da busca extremal, no qual utilizam-se sinais de perturbação com o objetivo de estimar o gradiente do mapa desconhecido que será otimizado. A Figura 7 exemplifica o mapeamento estático na forma quadrática com entrada única

A Figura 7 apresenta três valores de θ , no qual θ^* é o valor desconhecido da entrada que leva a saída do mapeamento para o ponto ótimo y^* , $\hat{\theta}(t)$ é a estimativa em tempo real de θ^* e $\theta(t)$ é a entrada do mapeamento.

Como o método da busca extremal utilizado é o da perturbação senoidal, baseado na teoria da perturbação [2], o sinal de perturbação será

$$S(t) = a \text{sen}(\omega t), \quad (33)$$

sendo a a amplitude da perturbação e ω sua frequência. Esse sinal é somado à estimativa do otimizador θ^* , dado por $\hat{\theta}(t)$. O sinal de excitação usado para estimar o gradiente é

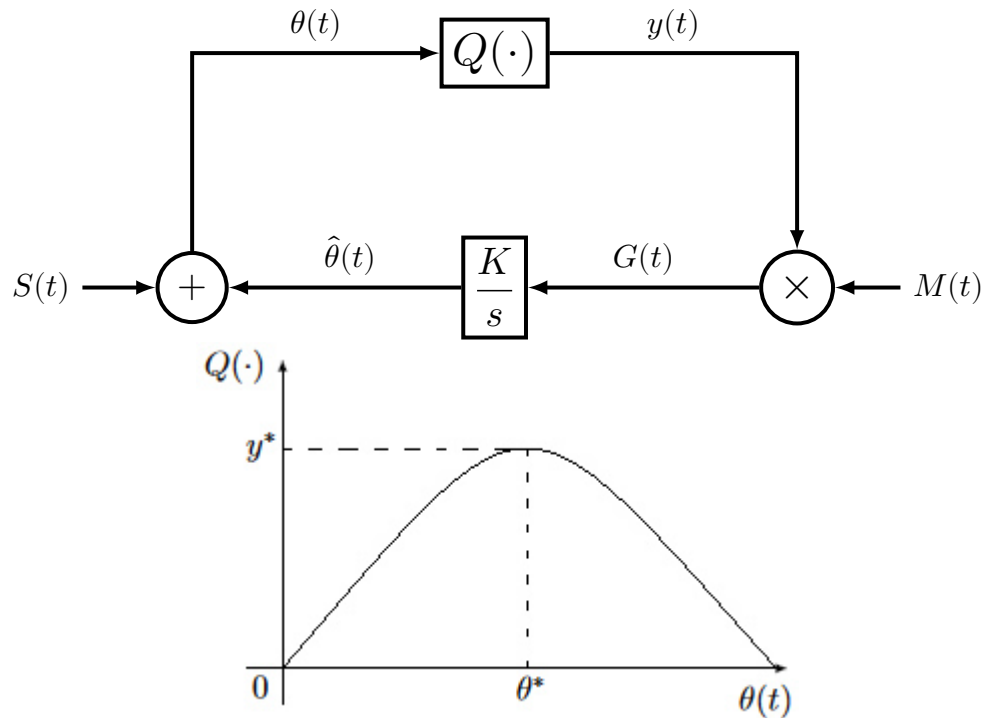


Figura 5: Esquema de busca extremal para mapeamento escalar $y(t) = Q(\theta(t))$ baseado em perturbações senoidais $S(t)$ e $M(t)$

dado por

$$M(t) = \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t), \quad (34)$$

O mapa não linear desconhecido é localmente quadrático, de forma que

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (35)$$

onde $H < 0$ é a Hessiana do mapa não linear. A Figura 6 ilustra o princípio do funcionamento do método da perturbação senoidal. Uma pequena perturbação é introduzida na vizinhança do máximo. A frequência de perturbação, que é idêntica à frequência do filtro passa baixa utilizado no esquema do controle extremal, deve ser feita menor que a do sistema de controle. Nota-se nesta figura que no caso de $G(t)$ negativo (positivo), o ponto de operação encontra-se do lado direito (esquerdo) do extremo máximo, respectivamente. Quando o sinal de perturbação $a \text{sen}(\omega t)$ é introduzido na função objetivo $y(t)$, a saída resultante é denotada por

$$y(t) = y(\hat{\theta}(t) + a \text{sen}(\omega t)). \quad (36)$$

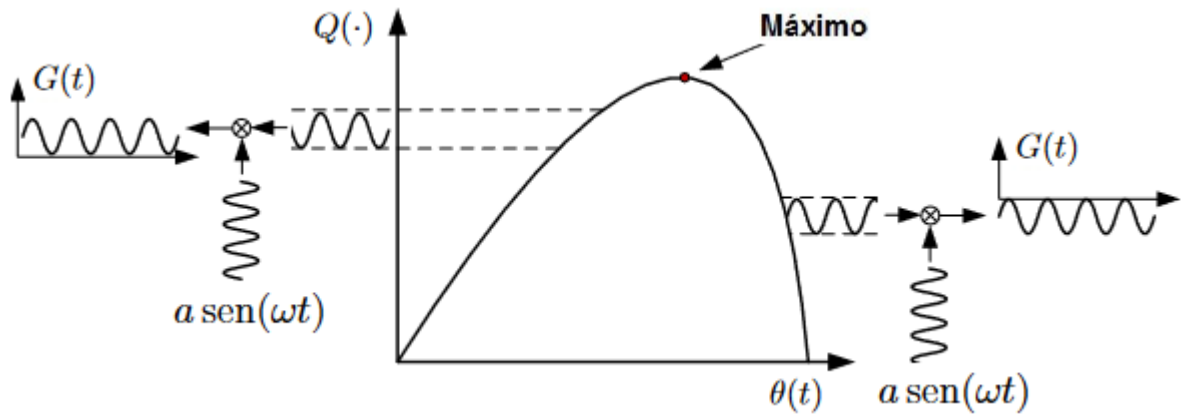


Figura 6: Ilustração da perturbação senoidal [3]

1.3.1 Análise de convergência

O objetivo principal da busca extremal é encontrar uma entrada $\theta(t)$ em uma pequena vizinhança do ponto θ^* que maximize ou minimize a saída $y(t)$ apenas com sua informação [15]. Para o objetivo seja alcançado, o erro entre a estimativa $\hat{\theta}(t)$ e o ponto desconhecido θ^*

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (37)$$

deve convergir para zero, ou alguma vizinhança pequena da origem. Analisando a Figura 7 e utilizando a equação (37)

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + \theta^* + a \text{sen}(\omega t). \quad (38)$$

A partir da Figura 7

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) y(t) \\ &= \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) \left[y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2 \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Substituindo (38) em (39)

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[y^* + \frac{H}{2} (\tilde{\theta}(t) + a \operatorname{sen}(\omega t))^2 \right] \\
&= \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[y^* + \frac{H}{2} (\tilde{\theta}^2(t) + 2a\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}(\omega t)) + a^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) \right] \\
&= \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + 2H\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}^2(\omega t) + aH \operatorname{sen}^3(\omega t),
\end{aligned} \tag{40}$$

utilizando a identidade $\operatorname{sen}^2(\omega t) = (1 - 2 \cos(2\omega t))/2$ e $4 \operatorname{sen}^3(\omega t) = 3 \operatorname{sen}(\omega t) - \operatorname{sen}(3\omega t)$ então

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + H\tilde{\theta}(t)(1 - \cos(2\omega t)) + \\
&\quad + \frac{Ha}{2} (3 \operatorname{sen}(\omega t) - \operatorname{sen}(3\omega t)).
\end{aligned} \tag{41}$$

Aplicando o teorema da média na equação (41) e escolhendo uma frequência ω grande, os termos que dependem de seno e cosseno com argumentos $\omega, 2\omega, 3\omega$ convergem para zero, portanto

$$G_{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}(t) = H(\hat{\theta}_{av}(t) - \theta^*). \tag{42}$$

Usando como referência a Figura 7, é possível achar a relação da dinâmica do erro médio

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = KH\tilde{\theta}_{av}(t), \tag{43}$$

com o ganho $K > 0$. O sistema (43) é exponencialmente estável assim como a dinâmica de erro original que se segue

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = KH\tilde{\theta}(t). \tag{44}$$

De acordo com [29], (44) é uma lei de controle do método de otimização de gradiente descendente. Utilizando o método do gradiente na busca extremal, é necessário que a Hessiana H seja estimada, como mostrado em [13]. De acordo com [11], a convergência de (θ, y) para a região do extremo (θ^*, y^*) é dada por

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega), \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \tag{45}$$

Portanto, é possível concluir que a busca extremal baseada no gradiente é apenas localmente convergente e a taxa de convergência depende da hessiana H . O exemplo da

simulação apresentada na Figura 7 ilustra o que foi descrito neste capítulo. Pode-se observar no resultado da simulação em malha fechada utilizando o mapa estático (65), o comportamento da entrada $\theta(t)$ e da saída $y(t)$ convergindo para os valores ótimos θ^* e y^* respectivamente, além da estimativa $\hat{\theta}(t)$ que também converge para o valor que otimiza o mapa e o gradiente que converge para zero.

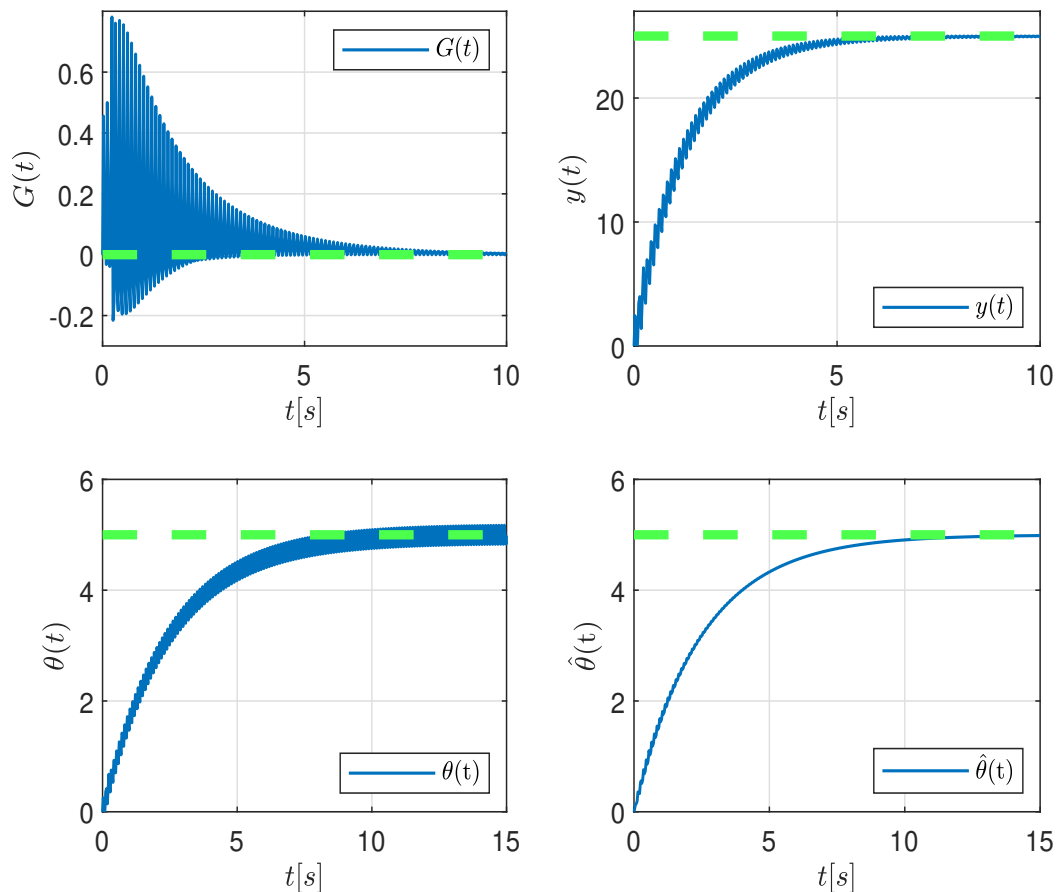


Figura 7: Resultado da simulação em malha fechada do mapeamento $y(t) = Q(\theta(t)) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t) - \theta^*)$ e com os seguintes parâmetros: $\omega = 20\pi$, $a = 0.2$, $k = 10$, $H = -2$, $y^* = 25$ e $\theta^* = 5$.

1.4 Método de *Backstepping* para EDPs

O método de controle por *backstepping* é uma abordagem particular para a estabilização de sistemas dinâmicos e é bem sucedida na área de controle não linear [30]. Para um melhor entendimento, o *backstepping* é uma extensão do método de “linearização por

realimentação” para sistemas de dimensão finita, o qual fornece ferramentas de projeto que dotam o controlador de robustez a parâmetros incertos, distúrbios externos e a outras formas de erro de modelagem, incluindo algumas incertezas dinâmicas [31].

O primeiro passo desse método é identificar o termo, ou os termos indesejáveis no modelo da EDP. Essa tarefa pode ser trivial quando a estabilidade da planta de malha aberta pode ser analisada facilmente, como por exemplo, computando os autovalores em malha aberta [31]. Após isso, decide-se o “sistema alvo”, no qual os termos indesejáveis são eliminados após uma aplicação de uma mudança de variável e realimentação, como no caso da linearização por realimentação. A mudança de variável é um ponto chave desse método, ela muda a representação do estado do sistema por um operador de Volterra (na variável espacial da EDP), atuando no mesmo estado. O operador de Volterra é um operador integral onde o limite vai de zero até x como limite superior (em vez de ser uma integral sobre todo o domínio espacial). A forma com que a transformação de Volterra desloca a variável de estado, implica que a transformação de estado é triangular, como no projeto do método de *backstepping* para sistemas de dimensão finita em sistemas não lineares. Essa triangularidade garante a invertibilidade da mudança de variável. Mais um ponto chave desse método é a realimentação de fronteira obtida pela transformação de Volterra, pois a transformação por si só não é capaz de eliminar os termos indesejáveis, essa transformação apenas desloca esses termos até a fronteira, no qual o controlador de realimentação de fronteira podem eliminá-los.

O método de *backstepping* é exemplificado com a análise de uma EDP do calor com fronteira fixa e uma termo adicional de reação. Esse termo é uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e descreve um processo de mudança na função u .

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t), \quad x \in (0, 1) \quad (46)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (47)$$

$$u(1, t) = U(t), \quad (48)$$

no qual λ é uma constante arbitrária e $U(t)$ é a lei de controle. O sistema de malha aberta (46)-(47), com $u(1, t) = 0$ é instável com diversos autovalores instáveis para um λ suficientemente grande.

Como o termo $\lambda u(x, t)$ é a fonte de instabilidade desse sistema, o objetivo natural

da realimentação por fronteira é eliminar esse termo. A ideia principal do método de *backstepping* é utilizar a transformação de coordenada

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t) dy, \quad (49)$$

juntamente com o controle por realimentação

$$u(1, t) = \int_0^1 k(1, y)u(y, t) dy, \quad (50)$$

para transformar o sistema (46)-(47) no sistema alvo

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1) \quad (51)$$

$$w(0, t) = 0, \quad (52)$$

$$w(1, t) = 0, \quad (53)$$

o qual é exponencialmente estável. A transformação (49) é denominada transformação integral de Volterra. A sua principal característica é o limite da integral ser de zero a x e não de zero a 1, fazendo com que ela seja “espacialmente causal”, ou seja, dado x , o lado direito da transformação (49) depende somente dos valores de u no intervalo $[0, x]$. Outra importante característica da transformação é que ela é invertível, dessa forma, a estabilidade do sistema alvo garante a estabilidade do sistema de malha fechada formado pela planta mais a realimentação de fronteira.

O termo $k(x, y)$ é o ganho do controlador de fronteira e é definido como o *kernel* da transformação de Volterra. A simplicidade de calcular esse ganho é uma das grandes vantagens do método de *backstepping*, pois os métodos convencionais para controle de EDPs obtêm seus ganhos através da solução da equação de Ricatti, geralmente difíceis de serem calculadas. No Capítulo 2 será mostrado como o *kernel* é calculado.

1.5 Desigualdades importantes

Neste trabalho, as desigualdades de *Young*, *Poincaré*, *Agmon* e *Cauchy-Schwarz* são usadas com frequência. Dessa forma, declaramos essas desigualdades na forma como elas são usadas neste trabalho, nominalmente para um domínio espacial $[0, D]$. Na literatura [32], essas desigualdades são declaradas para o domínio espacial normalizado $[0, 1]$.

Definição 1 (Desigualdade de Poincaré).

$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq 2w(D, t)^2 + 4D^2 \|w_x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \quad (54)$$

$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq 2Dw(0, t)^2 + 4D^2 \|w_x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \quad (55)$$

Definição 2 (Desigualdade de Agmon (Caso 1)).

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(0, t)^2 + 2 \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2} \|w_x(t)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (56)$$

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(D, t)^2 + 2 \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2} \|w_x(t)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (57)$$

Definição 3 (Desigualdade de Young).

$$ab \leq \frac{\gamma}{2}a^2 + \frac{1}{2\gamma}b^2, \quad \gamma > 0 \quad (58)$$

Definição 4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

$$\int_0^D u(x, t)w(x, t)dx \leq \|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (59)$$

As provas estendidas de [32] para o domínio $[0, D]$ das desigualdades de Poincaré e Agmon podem ser encontradas no Apêndice A.

2 PROJETO DO CONTROLADOR E PROVA DE ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

Esse capítulo abrange o principal assunto teórico desta dissertação e analisa a estabilidade e o teorema de convergência do sistema em malha fechada da Figura 1. Como a prova de estabilidade envolve diferentes transformações, ela é demonstrada passo a passo para melhor entendimento. Antes de enunciar o teorema da estabilidade e convergência, as equações necessárias para o projeto do controlador com compensador e para a análise de estabilidade são derivadas. Um diagrama de blocos mais detalhado do problema de Stefan aplicado à busca extremal é apresentado, gerando um parâmetro $\theta(t)$, baseado na saída $y(t)$ do mapa estático desconhecido $Q(\cdot)$.

2.1 Dinâmica de Atuação e Sinal de Saída

O sistema de equações que definem a dinâmica de atuação utilizou o sistema (13)-(16) como referência, com $\alpha = \beta = k = 1$, $\theta(t) \in \mathbb{R}$ e $\Theta(t) \in \mathbb{R}$, também denominado atuador propagado na teoria do controle extremal aplicado a EDP's, ele é representado como a saída da cascata EDP-EDO

$$\dot{\Theta}(t) = \dot{s}(t) = -\alpha_x(s(t), t) \quad (60)$$

$$\partial_t \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (61)$$

$$\alpha(s(t), t) = 0 \quad (62)$$

$$-\partial_x \alpha(0, t) = \theta(t), \quad (63)$$

onde $\alpha : [0, s(t)] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é $\alpha(x, t) = T(x, t) - T_d$ e $s(t) = \Theta(t)$ é a interface desconhecida representada como a fronteira móvel. A saída é medida pelo mapa estático desconhecido com a entrada (60)

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (64)$$

O objetivo da busca extremal é otimizar um mapa estático desconhecido $Q(\cdot)$ usando um controle de otimização em tempo real com saída desconhecida ótima y^* e o otimizador Θ^* , bem como a saída mensurável $y(t)$ e a entrada $\theta(t)$.

O mapa não linear desconhecido é localmente quadrático, de forma que

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2, \quad (65)$$

onde $\Theta^*, y^* \in \mathbb{R}$ e $H < 0$ é a Hessiana. Assim, a saída do mapa estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2 \quad (66)$$

O esquema da busca extremal a ser descrito nesta seção foi motivado pelo esquema proposto em [20]. O gradiente $G(t)$ e a estimativa da Hessiana $H(t)$ do mapa desconhecido são calculados multiplicando a saída $y(t)$ com os sinais de excitação $M(t)$ e $N(t)$, respectivamente. O compensador do problema de Stefan é alimentado com essas informações e gera um sinal $U(t)$, que possui o mesmo valor da estimativa da entrada ótima $\hat{\theta}(t)$. Como a busca extremal é baseada na teoria da perturbação apresentada na seção 1.3, um sinal de perturbação $S(t)$ é somado ao sinal $\hat{\theta}(t)$ para gerar a entrada $\theta(t)$. Combinando (60)-(63) com a abordagem da busca extremal, o sistema de malha fechada com dinâmica de atuação e o compensador é mostrado na Figura 8.

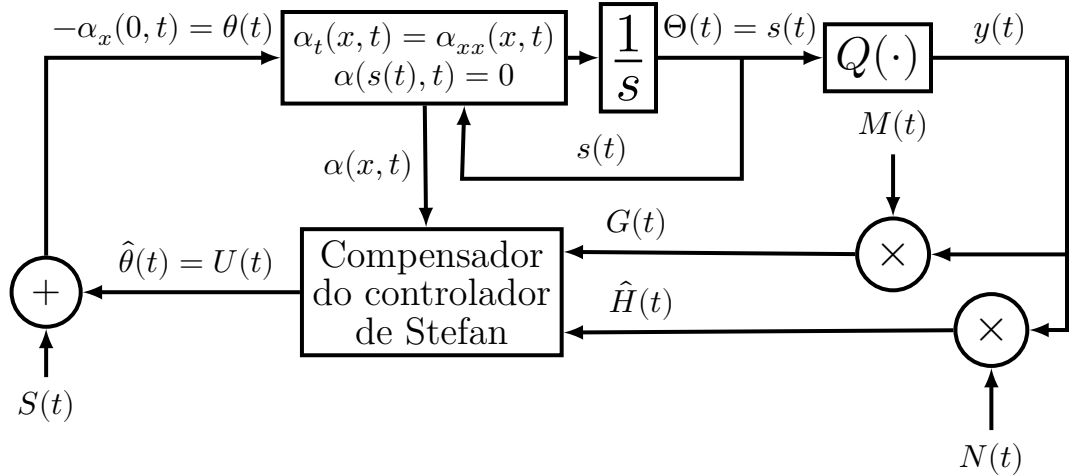


Figura 8: Diagrama de blocos do controle extremal aplicado ao problema de Stefan de uma fase.

O sinal de demodulação $N(t)$ que é usado para estimar a Hessiana do mapa estático multiplicando-o com a saída $y(t)$ é definido em [33] como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{com} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \quad (67)$$

enquanto que o sinal $M(t)$ é usado para estimar o gradiente do mapa estático, como segue abaixo:

$$G(t) = M(t)y(t) \text{ com } M(t) = \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t). \quad (68)$$

2.2 Sinal de Perturbação

O cálculo do sinal $S(t)$ descrito na Figura 8 envolve o problema inverso da equação de Stefan, no qual, de posse do comportamento da fronteira móvel, necessita-se da solução inversa do problema, ou seja, uma série convergente para determinar qual trajetória a saída do sistema deve seguir. O problema inverso da equação de Stefan é um problema de Cauchy não característico com os dados de Cauchy: $u(s(t), t) = 0$ e $u_x(s(t), t) = -\dot{s}(t)$ [34], onde $u(x, t)$ é o estado da EDP de Stefan (erro dinâmico).

$$S(t) := -\partial_x \beta(0, t), \quad (69)$$

$$\partial_t \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (70)$$

$$\beta(s(t), t) = 0 \quad (71)$$

$$\beta_x(s(t), t) = -a\omega \cos(\omega t), \quad (72)$$

no qual $\beta : [0, s(t)] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. A solução explícita de (69) é encontrada a partir da trajetória de referência e da solução de referência postulada por uma série de potências [35]

$$s(t) = a \text{sen}(\omega t), \quad (73)$$

$$\beta(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(t)}{i!} [x - s(t)]^i. \quad (74)$$

Para calcular o primeiro termo da série $a_0(t)$, utiliza-se a condição (71) em (74)

$$\beta(s(t), t) = \frac{a_0(t)}{0!} [0]^0 + \frac{a_1(t)}{1!} [0]^1 + \frac{a_2(t)}{2!} [0]^2 + \frac{a_3(t)}{3!} [0]^3 + \dots + \frac{a_i(t)}{i!} [0]^i, \quad (75)$$

$$a_0(t) = 0.$$

Para calcular o segundo termo da série $a_1(t)$, utiliza-se a condição (72). Calculando

a derivada espacial de (74)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta(x, t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(t) \cdot i}{i!} [x - s(t)]^{i-1}. \quad (76)$$

Substituindo (76) em (72)

$$-\beta_x(s(t), t) = \frac{a_0(t)}{0!} [0]^{-1} + \frac{a_1(t)}{1!} [0]^0 + \frac{a_2(t)}{2!} [0]^1 + \frac{a_3(t)}{3!} [0]^2 + \dots + \frac{a_i(t)}{i!} [0]^{i-1}, \quad (77)$$

$$a_1(t) = -\dot{s}(t).$$

A derivada espacial de segunda ordem e a temporal de (74) são respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\beta(x, t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(t) \cdot i(i-1)}{i!} [x - s(t)]^{i-2}, \quad (78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta(x, t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\dot{a}_i(t)}{i!} [x - s(t)]^i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\dot{a}_i(t) \cdot i \cdot \dot{s}(t)}{i!} [x - s(t)]^{i-1}. \quad (79)$$

Substituindo (78) e (79) em (70) e após algumas manipulações matemáticas

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i+2}(t)}{i!} [x - s(t)]^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\dot{a}_i(t)}{i!} [x - s(t)]^i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i+1}(t)}{i!} \dot{s}(t) [x - s(t)]^i, \quad (80)$$

eliminando os termos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [x - s(t)]^i$ em comum de (80), a expressão geral da série infinita será

$$a_i(t) = \dot{a}_{i-2}(t) - a_{i-1}(t)\dot{s}(t). \quad (81)$$

A expressão analítica dos cinco primeiros coeficientes da série (74) foram calculadas para verificar como aparecem as sucessivas derivadas de $s(t)$

$$a_2(t) = \dot{s}(t)^2, \quad (82)$$

$$a_3(t) = \ddot{s}(t) - \dot{s}(t)^3, \quad (83)$$

$$a_4(t) = \ddot{s}(t)^2 + \ddot{s}(t)\dot{s}(t) + \dot{s}(t)^4, \quad (84)$$

$$a_5(t) = \dot{a}_3(t) - a_4(t)\dot{s}(t) - \ddot{s}(t) - \ddot{s}(t)^3 - \ddot{s}(t)^2\dot{s}(t) - \ddot{s}(t)\dot{s}(t)^2 - \dot{s}(t)^4. \quad (85)$$

A solução de geração de trajetória que fornece todos os termos da série de potências (74) é dada por [34]

$$\beta(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} [x - s(t)]^{2i}. \quad (86)$$

Embora (86) não seja uma expressão explícita, escolhendo valores adequados para a e ω em (73), a série converge com poucas iterações do somatório infinito, obtendo o sinal senoidal $s(t)$ desejado na saída do integrador.

De acordo com (69), calculando a derivada de (86) em relação a x e substituindo $x = 0$, chega-se a expressão final de

$$S(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} [-a \operatorname{sen}(\omega t)]^{2i-1}. \quad (87)$$

2.3 Erro de estimação e dinâmica do erro da EDP

Como o objetivo do controle é encontrar Θ^* , que corresponde ao atuador ótimo desconhecido $\theta(t)$, os estimadores e os erros de estimação são introduzidos

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - S(t). \quad (88)$$

$$\hat{\Theta}(t) = \Theta(t) - a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (89)$$

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \Theta^*. \quad (90)$$

$$\vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*. \quad (91)$$

Combinando $\hat{\Theta}(t)$ em (89) e (91) obtemos a relação entre o erro de estimativa propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$ e o otimizador do mapa estático Θ^*

$$\Theta(t) - \Theta^* = \vartheta(t) + a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (92)$$

Definindo

$$u(x, t) = \alpha(x, t) - \beta(x, t). \quad (93)$$

$$\hat{\theta}(t) = U(t). \quad (94)$$

Derivando (91) em relação ao tempo

$$\dot{\vartheta}(t) = \dot{\hat{\Theta}}(t). \quad (95)$$

Derivando (89) em relação ao tempo e substituindo em (95)

$$\dot{\vartheta}(t) = \dot{\Theta}(t) - a\omega \cos(\omega t). \quad (96)$$

Substituindo (60) e (72) em (96)

$$\dot{\vartheta}(t) = -\alpha_x(s(t), t) + \beta_x(s(t), t) = -(\alpha_x(s(t), t) - \beta_x(s(t), t)). \quad (97)$$

Derivando (93) em relação a x , realizando $x = s(t)$ e substituindo em (97)

$$\dot{\vartheta}(t) = -u_x(s(t), t). \quad (98)$$

Derivando (93) em relação a x e realizando $x = 0$

$$u_x(0, t) = \alpha_x(0, t) - \beta_x(0, t). \quad (99)$$

Substituindo (63) e (69) em (99)

$$u_x(0, t) = -\theta(t) + S(t). \quad (100)$$

Substituindo (88) em (100) e utilizando (100) como referência

$$u_x(0, t) = -\hat{\theta}(t), \quad (101)$$

$$-u_x(0, t) = U(t). \quad (102)$$

A partir de (98) e (102), o sistema original será:

$$\dot{\vartheta}(t) = -u_x(s(t), t) \quad (103)$$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (104)$$

$$u(s(t), t) = 0 \quad (105)$$

$$-u_x(0, t) = U(t). \quad (106)$$

2.4 Compensação do Problema de Stefan

Para melhor entendimento de como a lei de controle do problema de Stefan utilizando o método de *backstepping* é derivada, o problema será resolvido primeiro para a cascata EDP-EDO do problema de Stefan em um domínio fixo D e posteriormente será feito uma comparação com o domínio móvel $s(t)$, considerando o seguinte sistema de equações

$$\dot{\vartheta}(t) = -u_x(D, t) \quad (107)$$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, D) \quad (108)$$

$$u(D, t) = 0 \quad (109)$$

$$u_x(0, t) = -U(t). \quad (110)$$

Introduzindo a seguinte transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_x^D k(x, y)u(y, t) dy - \phi(x - D)\vartheta(t), \quad (111)$$

no qual transforma (107)-(110) no seguinte sistema alvo

$$\dot{\vartheta}(t) = -\bar{K}\vartheta(t) - w_x(D, t), \quad (112)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + \bar{K}\dot{s}(t)\vartheta(t), \quad x \in (0, D) \quad (113)$$

$$w_x(0, t) = 0, \quad (114)$$

$$w(D, t) = 0, \quad (115)$$

sendo $\bar{K} > 0$ um ganho arbitrário do controlador. Para os próximos cálculos, serão utilizadas como referência as seguintes relações

$$k_x(x, x) + k_y(x, x) = \frac{d}{dx}k(x, x), \quad (116)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_0^x f_x(x, y) dy. \quad (117)$$

Realizando a derivada de (111) em relação a x

$$w_x(x, t) = u_x(x, t) + k(x, x)u(x, t) - \int_x^D k_x(x, y)u(y, t) dy - \phi'(x - D)\vartheta(t). \quad (118)$$

Realizando a derivada de (118) em relação a x

$$w_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) + k(x, x)u_x(x, t) + \left(k_x(x, x) + \frac{d}{dx}k(x, x)\right)u(x, t) - \int_x^D k_{xx}(x, y)u(y, t) dy - \phi''(x - D)\vartheta(t). \quad (119)$$

Realizando a derivada de (111) em relação a t com o auxílio da teoria de integração por partes

$$w_t(x, t) = u_{xx} + k(x, x)u_x(x, t) - k_y(x, x)u(x, t) - (k(x, D) - \phi(x - D))u_x(D, t) - \int_0^x k_{yy}(x, y)u(y, t) dy. \quad (120)$$

Substituindo (119) e (120) em (113)

$$- \left(2\frac{d}{dx}k(x, x)\right)u(x, t) - (k(x, D) - \phi(x - D))u_x(D, t) + \int_0^x (k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y))u(y, t) dy + \phi''(x - D)\vartheta(t) = 0. \quad (121)$$

Substituindo $x = D$ em (111) e (118) respectivamente

$$w(D, t) = -\phi(0)\vartheta(t), \quad (122)$$

$$w_x(D, t) = u_x(D, t) - \phi'(0)\vartheta(t). \quad (123)$$

Substituindo a condição de fronteira (115) em (122) e comparando a EDO (107) com (112) utilizando (123), as seguintes condições são obtidas

$$\phi''(x) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = \bar{K}. \quad (124)$$

As soluções dos *kernels* são dadas por

$$\phi(x) = \bar{K}x, \quad (125)$$

$$k(x, y) = \phi(x - y) = \bar{K}(x - y), \quad (126)$$

Substituindo (125) e (126) em (111), a nova transformação de *backstepping* será

$$w(x, t) = u(x, t) - \bar{K} \int_x^D (x - y)u(y, t) dy - \bar{K}(x - D)\vartheta(t). \quad (127)$$

Realizando a derivada de (127) em relação a x e usando as equações (110) e (115), a seguinte lei de controle é obtida

$$U(t) = -\bar{K} \left(\int_0^D u(y, t) dy + \vartheta(t) \right) \quad (128)$$

A partir desse ponto, será derivada a lei de controle para o problema de Stefan com fronteira móvel. Considerando a cascata EDP-EDO (103)-(106) e usando a transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u(x, t) - \bar{K} \int_x^{s(t)} (x - \sigma)u(\sigma, t) dy - \bar{K}(x - s(t))\vartheta(t) \quad (129)$$

sendo $\bar{K} > 0$ um ganho arbitrário do controlador. A equação (129) transforma (103)-(106) no sistema alvo:

$$\dot{\vartheta}(t) = -\bar{K}\vartheta(t) - w_x(s(t), t) \quad (130)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + \bar{K}\dot{s}(t)\vartheta(t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (131)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad (132)$$

$$w(s(t), t) = 0. \quad (133)$$

Comparando as transformações (129) e (111), verifica-se que a única diferença é a dependência do tempo da fronteira. Em relação ao termo adicional $\bar{K}\dot{s}(t)\vartheta(t)$ em (131), ele foi empregado para eliminar o termo adicional que aparece na derivada de (129) em relação a t . Verifica-se que após utilizar os mesmos passos do desenvolvimento do problema de Stefan com fronteira fixa, a equação final de controle é a mesma de (128),

com a diferença que o domínio fixo D é substituído por $s(t)$, dessa forma

$$U(t) = -\bar{K} \left(\vartheta(t) + \int_0^{s(t)} u(x, t) dx \right). \quad (134)$$

2.5 Implementação da lei de controle da busca extremal

Como não há medição de $\vartheta(t)$, (134) não é aplicável diretamente. Assim, introduzindo um resultado de [33], a versão média do gradiente e a estimativa da Hessiana são calculadas por

$$G_{av}(t) = H\vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av}(t) = H. \quad (135)$$

Aplicando a teoria da média em (134), escolhendo $\bar{K} = KH$ com $K < 0$ e substituindo os valores do gradiente médio e da estimativa da Hessiana em (135), verifica-se

$$U_{av}(t) = -KG_{av}(t) - KH \int_0^{s(t)} u_{av}(x, t) dx. \quad (136)$$

Um filtro passa-baixa no controlador é introduzido com o objetivo de aplicar o teorema da média [27] para sistemas de dimensão infinita na prova de estabilidade que se segue, portanto

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx \right] \right\}, \quad (137)$$

para um $c > 0$ suficientemente grande.

2.6 Análise de estabilidade

O teorema a seguir resume a estabilidade e a propriedade de convergência da dinâmica do erro (103)-(106)

Teorema 2.1. Assumindo as condições de validade do modelo $T_{av}(x, t) > T_d$, $\dot{s}_{av}(t) > 0$, $x \in (0, s(t))$ e $s_0 < s_{av}(t) < s^$ são satisfeitos ao menos para o sistema médio, $\forall t > 0$, $s^* = \Theta^*$ e para as condições iniciais $(T_{av}(x, 0), s_0)$ compatíveis com a lei de controle $U(t)$ em (137). Então, para um $c > 0$ suficientemente grande, existe algum $\bar{\omega} > 0$, tal que $\forall \omega > \bar{\omega}$, a dinâmica do erro (103)-(106) com estados $\vartheta(t)$, $u(x, t)$, tem uma única solu-*

ção periódica exponencialmente estável em t do período $\Pi := 2\pi/\omega$, denotado por $\vartheta^\Pi(t)$, $u^\Pi(x, t)$, satisfazendo $\forall t > 0$

$$\left(|\vartheta^\Pi(t)|^2 + \|u^\Pi(t)\|^2 + \|u_x^\Pi(t)\|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad (138)$$

além disso

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega) \quad (139)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2) \quad (140)$$

Prova: A prova é realizada nas Subseções (2.6.1)-(2.6.4).

2.6.1 Sistema médio em malha fechada

Para obter o sistema médio em malha fechada, substitui-se (92) em (66) para obter a equação da saída do mapa estático em termo de $\vartheta(t)$

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a \operatorname{sen}(\omega t))^2 \quad (141)$$

Inserindo os valores de $M(t)$ e $G(t)$ em (67) e (68)

$$G(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t)y(t), \quad \hat{H}(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t)y(t) \quad (142)$$

Expandindo o termo quadrático de (141) e substituindo em (142), obtêm-se os valores de $G(t)$ e $\hat{H}(t)$ em função de $\vartheta(t)$, inserindo esses termos na lei de controle (137)

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) &= -(u_{\text{av}})_x(s_{\text{av}}(t), t) \\
(u_{\text{av}})_t(x, t) &= (u_{\text{av}})_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s_{\text{av}}(t)) \\
u_{\text{av}}(s_{\text{av}}(t), t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(u_{\text{av}})_x(0, t) &= -c(u_{\text{av}})_x(0, t) - cK \left[-y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \right. \\
&+ y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \text{sen}(\omega t) - \frac{4H}{a^2} \vartheta^2(t) \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \\
&+ 2H\vartheta(t) \text{sen}^2(\omega t) - \frac{8H}{a} \vartheta(t) \text{sen}(\omega t) \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \\
&\left. + Ha \text{sen}^3(\omega t) - 4H \text{sen}^2(\omega t) \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx \right]. \tag{143}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) &= -(u_{\text{av}})_x(s_{\text{av}}(t), t) \\
(u_{\text{av}})_t(x, t) &= (u_{\text{av}})_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s_{\text{av}}(t)) \\
u_{\text{av}}(s_{\text{av}}(t), t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(u_{\text{av}})_x(0, t) &= -c(u_{\text{av}})_x(0, t) - cK \left[-y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \right. \\
&+ y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \text{sen}(\omega t) - \frac{4H}{a^2} \vartheta^2(t) \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \\
&+ H\vartheta(t) - H\vartheta(t) \cos(2\omega t) - \frac{4H}{a} \vartheta(t) [\text{sen}(3\omega t) - \text{sen}(\omega t)] \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \\
&+ \frac{3aH}{4} \text{sen}(\omega t) - \frac{aH}{4} \text{sen}(3\omega t) - 2H \cos(2\omega t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \\
&\left. + [H + H \cos(4\omega t)] \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \right], \tag{144}
\end{aligned}$$

no qual foi utilizado a representação de espaço de estado para o filtro passa baixa e as seguintes identidades $2 \text{sen}^2(\omega t) = 1 - \cos(2\omega t)$, $2 \text{sen}(\omega t) \cos(2\omega t) = \text{sen}(3\omega t) - \text{sen}(\omega t)$, $4 \text{sen}^3(\omega t) = 3 \text{sen}(\omega t) - \text{sen}(3\omega t)$ e $4 \text{sen}^2(\omega t) \cos(2\omega t) = 2 \cos(2\omega t) - \cos(4\omega t) - 1$ e após isso aplicado o teorema da média, em que os termos dependentes de seno e cosseno com argumentos ω , 2ω e 3ω podem ser nulos se escolhido um ω muito grande. Dessa forma, o sistema médio será

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = -(u_{\text{av}})_x(s_{\text{av}}(t), t) \quad (145)$$

$$(u_{\text{av}})_t(x, t) = (u_{\text{av}})_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s_{\text{av}}(t)) \quad (146)$$

$$u_{\text{av}}(s_{\text{av}}(t), t) = 0 \quad (147)$$

$$\frac{d}{dt}(u_{\text{av}})_x(0, t) = -c(u_{\text{av}})_x(0, t) - cKH \left[\vartheta_{\text{av}}(t) + \int_0^{s_{\text{av}}(t)} u(x, t) dx \right] \quad (148)$$

A transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) - KH \int_x^{s_{\text{av}}(t)} (x - \sigma) u_{\text{av}}(\sigma, t) dy - KH(x - s_{\text{av}}(t)) \vartheta_{\text{av}}(t) \quad (149)$$

mapeia a dinâmica do erro média (145)-(148) no sistema alvo exponencialmente estável após assumir $c \rightarrow +\infty$ por uma questão de simplicidade, consequentemente

$$\dot{\vartheta}(t) = -KH\vartheta_{\text{av}}(t) - w_x(s_{\text{av}}(t), t), \quad (150)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + KH\dot{s}_{\text{av}}(t)\vartheta_{\text{av}}(t), \quad (151)$$

$$w_x(0, t) = 0, \quad (152)$$

$$w(s_{\text{av}}(t), t) = 0. \quad (153)$$

2.6.2 Transformação inversa

Para garantir a propriedade de estabilidade equivalente entre o sistema alvo e o sistema original, a invertibilidade da transformação (149) precisa ser garantida. Suponha que a transformação inversa mapeia (150)-(153) em (145)-(148):

$$u_{\text{av}}(x, t) = w(x, t) + \int_x^{s_{\text{av}}(t)} k(x - \sigma) u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma + \phi(x - s_{\text{av}}(t)) \vartheta_{\text{av}}(t), \quad (154)$$

onde $k(x - \sigma)$ e $\phi(x - s_{\text{av}}(t))$ são as funções do *kernel*. Realizando a derivada em relação a t e x respectivamente ao longo da solução de (150)-(153), as funções $\phi(x)$ e $k(x - \sigma)$ devem satisfazer:

$$\phi''(x) = -KH\phi(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi' = KH. \quad (155)$$

$$k(x - s_{\text{av}}(t)) = \phi(x - s_{\text{av}}(t)). \quad (156)$$

$$\phi'(x - s_{av}(t)) = KH \left(1 + \int_x^{s_{av}(t)} k(x - \sigma) d\sigma \right). \quad (157)$$

As soluções dos *kernels* podem ser deduzidas de (155)-(157), tal que

$$\phi(x) = KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \text{sen}(\sqrt{KH}x). \quad (158)$$

$$k(x - \sigma) = \phi(x - \sigma). \quad (159)$$

Assim, substituindo (158) e (159) em (154), temos a seguinte transformação inversa:

$$\begin{aligned} u_{av}(x, t) = w(x, t) + \int_x^{s_{av}(t)} KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \cdot \text{sen}(\sqrt{KH}(x - \sigma)) w(\sigma, t) d\sigma + \\ + KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \text{sen}(\sqrt{KH}(x - s_{av}(t))) \vartheta_{av}(t). \end{aligned} \quad (160)$$

2.6.3 Estabilidade Exponencial

Provamos a estabilidade exponencial do sistema de malha fechada médio baseado no sistema alvo (145)-(148) usando o método de Lyapunov. Consideramos a seguinte função de Lyapunov:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (161)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx \quad (162)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx \quad (163)$$

$$V_3 = \rho \frac{1}{2} \vartheta_{av}^2(t). \quad (164)$$

Derivando (162) em relação a t :

$$\dot{V}_1 = - \int_0^{s(t)} w_x(x, t)^2 dx + KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t) dx. \quad (165)$$

Derivando (163) em relação a t :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & w_x(s_{av}(t), t)w_t(x, t) - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx + \\ & - KH\dot{s}_{av}(t)\vartheta_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t) + \frac{1}{2}\dot{s}_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t)^2. \end{aligned} \quad (166)$$

Usando a relação $w_t(s_{av}(t), t) = -\dot{s}_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t)$ e substituindo por (166), nós obtemos

$$\dot{V}_2 = - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx - \frac{1}{2}\dot{s}_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t)^2 - KH\dot{s}_{av}(t)\vartheta_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t). \quad (167)$$

Derivando (164) em relação a t , nos leva a

$$\dot{V}_3 = -\rho KH\vartheta_{av}(t)^2 - \rho\vartheta_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t). \quad (168)$$

Substituindo os termos (165), (167) e (168) na derivada temporal de (161) e usando a desigualdade de Young em $\rho\vartheta_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t)$, $KH\dot{s}_{av}(t)\vartheta_{av}(t)\int_0^{s_{av}(t)} w(x, t) dx$ e $-KH\dot{s}_{av}(t)\vartheta_{av}(t)w_x(s_{av}(t), t)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx - \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx - \frac{\rho KH}{2}\vartheta_{av}(t)^2 + \\ & + \frac{\rho}{2KH}w_x(s_{av}(t), t)^2 + \dot{s}_{av}(t) \left(\frac{s^*}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx + (KH)^2\vartheta_{av}(t)^2 \right). \end{aligned} \quad (169)$$

Escolhendo $\rho = \frac{KH}{4s^*}$ e aplicando as desigualdades de Poincaré e Agmon respectivamente em $\int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx$ e $w_x(s_{av}(t), t)^2$, verifica-se

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{8s^{*2}} \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx - \frac{1}{4s^{*2}} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx + \\ & + \dot{s}_{av}(t) \left(\frac{s^*}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx + (KH)^2\vartheta_{av}(t)^2 \right) + \\ & - \frac{\rho KH}{2}\vartheta_{av}(t)^2 \leq -mV + n\dot{s}_{av}(t)V, \end{aligned} \quad (170)$$

onde

$$m = \max \{1, 8s^*KH\} \quad (171)$$

$$n = \min \left\{ \frac{1}{4s^{*2}}, KH \right\}. \quad (172)$$

O termo $n\dot{s}_{\text{av}}(t)V$ do lado direito de (170) não nos permite concluir diretamente a estabilidade exponencial, para resolver esse problema, uma nova função de Lyapunov W é definida

$$W(t) = V(t)e^{-ms_{\text{av}}(t)}. \quad (173)$$

A derivada de tempo de (173) pode ser calculada usando (170)

$$\dot{W}(t) = (\dot{V}(t) - m\dot{s}_{\text{av}}(t)V(t))e^{-ms_{\text{av}}(t)} \leq -nW(t) \quad (174)$$

Levando em consideração (161), podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\|w\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \rho\vartheta_{\text{av}}(t)^2 \leq e^{ms^*} (\|w_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \rho\vartheta_{\text{av}}(0)^2)e^{-nt}, \quad (175)$$

onde $w_0 = w(x, 0)$. Assim, podemos concluir a existência de uma constante positiva $D > 0$ usando a transformação inversa (149) combinada com as desigualdades de Young e Cauchy-Schwarz, tal que

$$\|u_{\text{av}}\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \vartheta_{\text{av}}(t)^2 \leq D(\|(u_{\text{av}})_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \vartheta_{\text{av}}(0)^2)e^{-nt}, \quad (176)$$

no qual $u_0 = u(x, 0)$.

2.6.4 Convergência assintótica para o ponto extremo

O próximo passo da prova será a aplicação do teorema da média local para sistemas de dimensão infinita. Para ω suficientemente grande, (145)-(148) tem uma única solução periódica exponencialmente estável em torno de seu equilíbrio. A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ é provada partindo do valor absoluto de (92)

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \text{sen}(\omega t)| \quad (177)$$

Escrevendo (177) em termos de solução periódica $\vartheta^2(t)$, aplicando a desigualdade

de Young e usando o teorema da média:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} \vartheta^2(t) + a \operatorname{sen}(\omega t) \right|, \quad (178)$$

e finalmente com (138) chegamos a (139)

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ seguimos os mesmos passos de $\Theta(t)$, inserindo (66) em (92):

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} H \vartheta^2(t) + H a^2 \operatorname{sen}(\omega t)^2 \right|, \quad (179)$$

Assim, novamente com (138), obtemos (140). Completando dessa forma a prova de estabilidade.

3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Esse capítulo valida a estabilidade e a convergência para a vizinhança de valores ótimos (Θ^*, y^*) como provado no Capítulo 2. Como a prova de estabilidade é baseada na média, é necessário um filtro passa alta para remover a parte estacionária da saída $y(t)$ e um filtro passa baixa para eliminar oscilações desnecessárias do gradiente $G(t)$ e da estimativa da Hessiana $H(t)$ como mostrado na Figura 9 e proposto em [8]. As frequências dos filtros de passa alta e passa baixa são proporcionais à frequência do sinal de excitação $S(t)$. Como primeiro passo desse capítulo, será explicado o método numérico utilizado para simulara EDP de Stefan e após isso, gráficos de simulação serão apresentados para diferentes sinais do sistema de malha fechada.

3.1 Derivação do Método Numérico

Essa seção apresenta o método numérico para simulação do problema de Stefan de uma fase utilizando como referência [36]. Apesar de existirem diversos métodos numéricos, será utilizado neste trabalho o método “*boundary immobilization method*” (BIM), o qual apresenta precisão necessária para o problema de Stefan na coordenada cartesiana. A ideia desse método consiste em dimensionar a coordenada original no domínio variante do tempo a uma nova coordenada no domínio fixo. O sistema resultante gera um sistema em cascata EDP-EDO não linear. Então, são utilizadas aproximações para as derivadas espaciais e temporais pelo método de diferença finita e o método de Euler, produzindo um conjunto de equações diferenciais não lineares.

3.1.1 Técnica *Boundary Immobilization Method*

O seguinte dimensionamento da coordenada espacial e sua variável de estado associada é apresentado

$$\xi := \frac{x}{s(t)}, \quad \varphi(\xi, t) := u(x, t). \quad (180)$$

Dessa forma, as relações das derivadas espaciais e temporais são dadas por

$$u_x(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \varphi_\xi = \frac{1}{s(t)} \varphi_\xi(\xi, t), \quad (181)$$

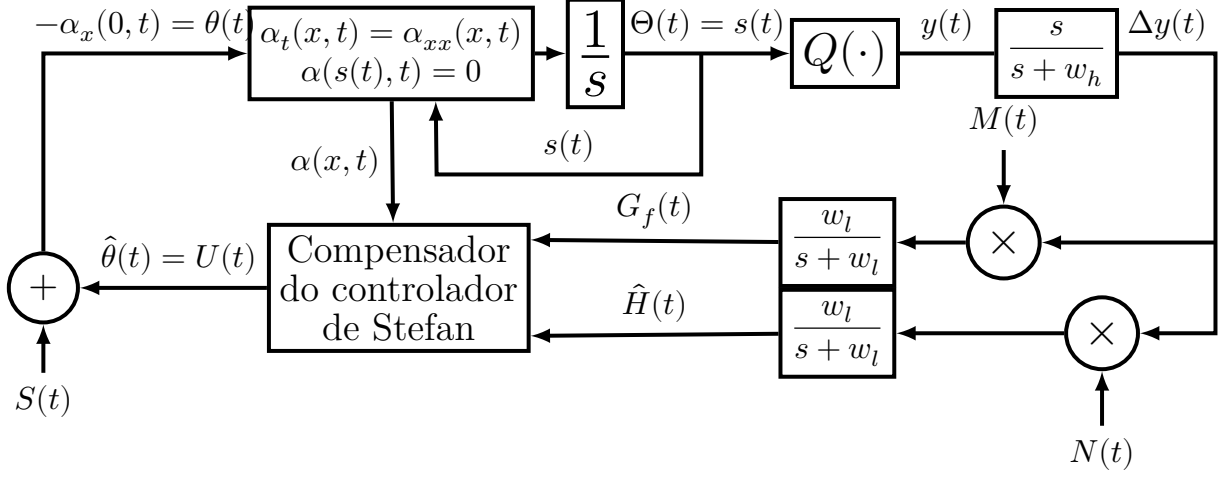


Figura 9: Diagrama de blocos do controle extremal aplicado ao problema de Stefan de uma fase com filtros adicionais para a simulação.

$$u_{xx}(x, t) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \varphi_{\xi\xi}(\xi, t) = \frac{1}{s(t)^2} \varphi_{\xi\xi}(\xi, t), \quad (182)$$

$$u_t(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \varphi_{\xi}(\xi, t) + \varphi_t(\xi, t) = -\frac{x\dot{s}(t)}{s(t)^2} \varphi_{\xi}(\xi, t) + \varphi_t(\xi, t) = -\frac{\xi\dot{s}(t)}{s(t)} \varphi_{\xi}(\xi, t) + \varphi_t(\xi, t). \quad (183)$$

Aplicando esse método para o sistema de equações (13)-(16) aplicado ao estado da EDP do erro dinâmico $u(x, t)$ com α , β e $k = 1$

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{s(t)^2} \varphi_{\xi\xi}(\xi, t) + \frac{\xi\dot{s}(t)}{s(t)} \varphi_{\xi}(\xi, t), \quad 0 < \xi < 1 \quad (184)$$

$$\varphi(0, t) = s(t)q_c(t), \quad (185)$$

$$\varphi(1, t) = 0, \quad (186)$$

$$\dot{s}(t) = -\frac{1}{s(t)} \varphi_{\xi}(1, t). \quad (187)$$

O estado da EDP nos pontos discretizados será

$$\xi = ih, \quad (188)$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, onde N é o número de discretização, então

$$Nh = 1. \quad (189)$$

Dessa forma o número de elementos será $N + 1$ e o vetor de variável de estado é

definido como

$$\varphi^{(i)}(t) = \varphi(ih, t), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (190)$$

Para aproximar as derivadas espaciais, será utilizado o método de diferença finita. A primeira e segunda derivadas espaciais em uma precisão de segunda ordem são obtidas como

$$\varphi_{\xi}(ih, t) = \frac{\varphi^{(i+1)}(t) - \varphi^{(i-1)}(t)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (191)$$

$$\varphi_{\xi\xi}(ih, t) = \frac{\varphi^{(i+1)}(t) - 2\varphi^{(i)}(t) + \varphi^{(i-1)}(t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (192)$$

Avaliando a EDP (184) no domínio fixo com $\xi = ih$ para $i = 0, 1, \dots, N - 1$, a EDO de ordem N th será

$$\frac{d}{dt}\varphi^{(i)} = \frac{1}{h^2 s(t)^2}(\varphi^{(i+1)}(t) - 2\varphi^{(i)}(t) + \varphi^{(i-1)}(t)) + \frac{i\dot{s}(t)}{2s(t)}(\varphi^{(i+1)}(t) - \varphi^{(i-1)}(t)) \quad (193)$$

Entretanto, quando $i = 0$, um valor desconhecido é obtido, que é $\varphi^{(-1)}$, esse valor é chamado de “valor fictício” e é obtido aplicando (191) na condição de contorno (185) em $\xi = 0$, obtendo

$$\varphi^{(-1)}(t) = \varphi^{(1)}(t) + 2hs(t)q_c(t) \quad (194)$$

Para descrever a derivada temporal da interface móvel $s(t)$, não é possível utilizar a aproximação central, pois não existe uma posição posterior a fronteira móvel. Por isso, a aproximação de diferença finita da primeira derivada com precisão de segunda ordem é utilizada [36].

3.2 Resultado das Simulações

A simulação numérica emprega o mapa quadrático descrito em (65) e os parâmetros são escolhidos conforme indicado na Tabela 1.

A Figura 10 corresponde ao gráfico do perfil de temperatura para o sistema em malha fechada convergindo em um espaço tridimensional (levando em consideração o domínio L e o tempo t) para uma vizinhança de T_d .

A Figura 11 mostra a convergência da fronteira móvel para o otimizador Θ^* . O movimento senoidal de $s(t)$ violaria as condições usuais para o problema de Stefan, no qual a temperatura permaneceria acima ou abaixo da temperatura de derretimento em

Tabela 1: Parâmetros de simulação sem atraso

	Símbolo	Descrição	Valor
Parâmetros do controlador	K	ganho do controlador	-0.1
	a	amplitude da perturbação	0.1
	ω	frequência da perturbação [rad/s]	10
	c	frequência do controlador [rad/s]	10
Parâmetros do sistema	L	domínio espacial [m]	1
	Θ^*	otimizador do mapa estático	0.8
	y^*	valor ótimo do mapa estático	4
	H	Hessiana do mapa estático	-1
	s_0	interface inicial [m]	0.1
	T_0	temperatura inicial [°C]	110
	T_d	temperatura de derretimento [°C]	100

todo o intervalo $[0, s(t)]$, formando uma cadeia periódica de líquido e sólido. No entanto, como o problema ocorre apenas no ponto extremo e em sua vizinhança, nós poderíamos redesenhar o algoritmo para introduzir sinais de excitação e diminuir a perturbação após a vizinhança extrema ser alcançada, como estudado em [37], [38] e [39].

Por fim, a Figura 12 e a Figura 13 mostram a convergência da saída $y(t)$ para y^* e $U(t)$ para 0, respectivamente.

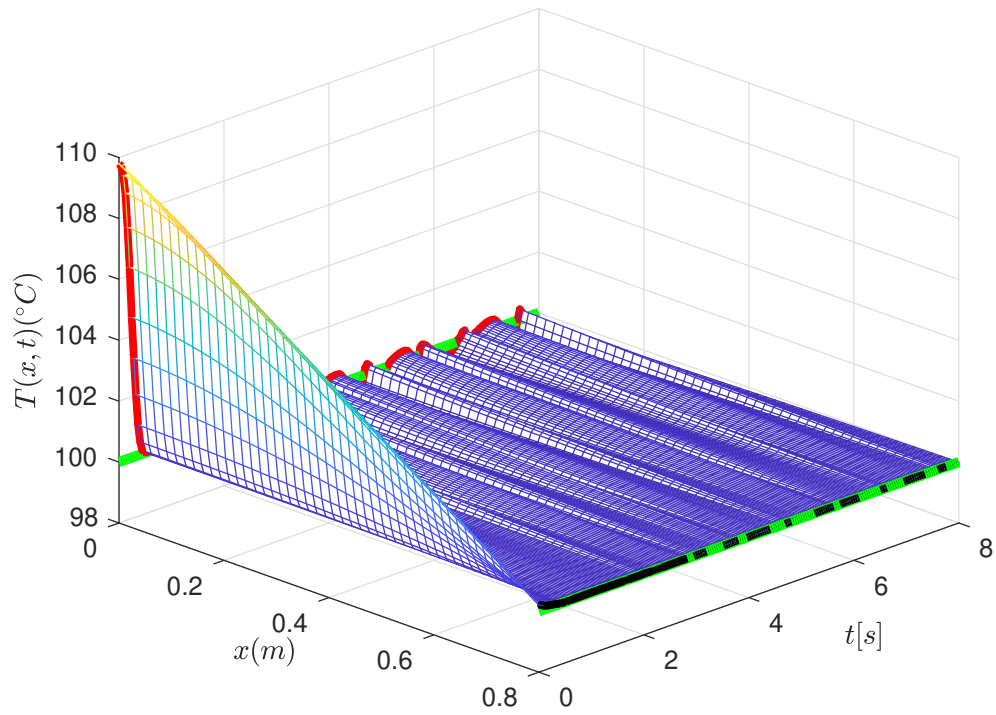


Figura 10: Convergência de $T(0,t)$ (curva vermelha) e $T(s(t),t)$ (curva preta) para T_d (curva verde) em um espaço tridimensional para o estado da EDO $T(x,t)$.

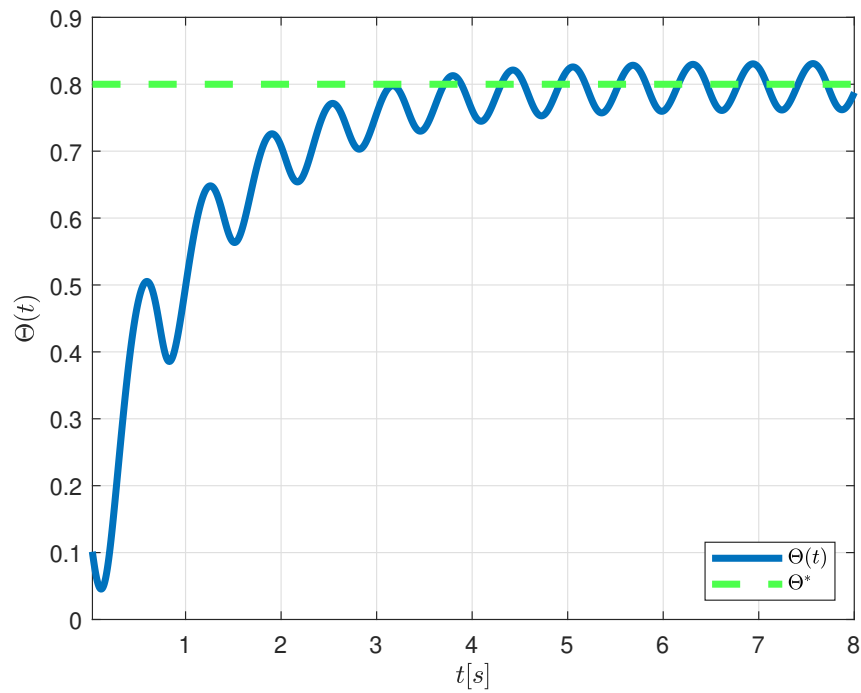


Figura 11: Convergência da fronteira móvel $\Theta(t)$ para Θ^* .

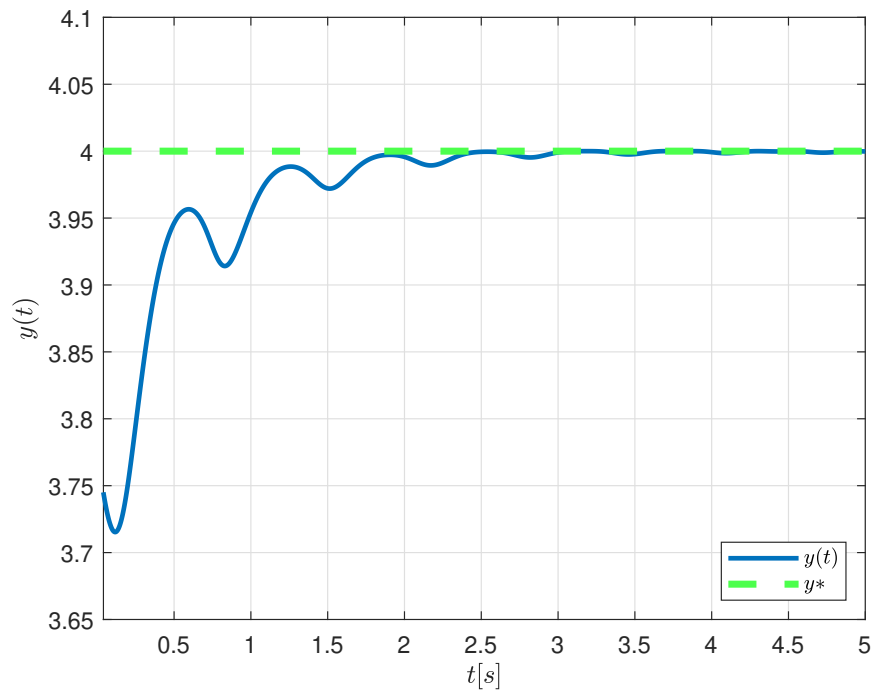


Figura 12: Convergência da saída $y(t)$ para y^* .

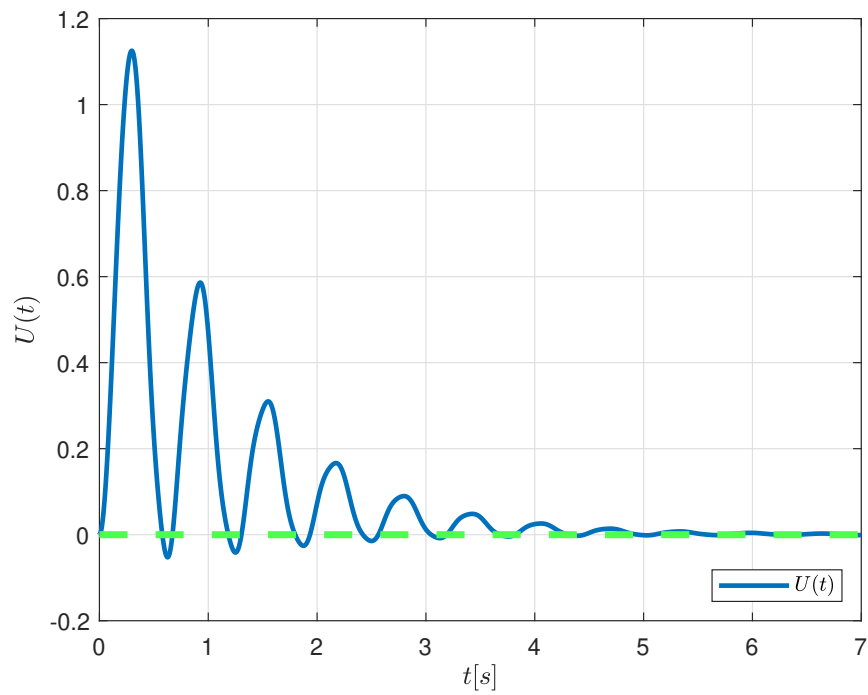


Figura 13: Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0.

4 EXTENSÃO DA BUSCA EXTREMAL PARA EDP DE STEFAN COM ATRASO

A equação de difusão da temperatura na fase líquida com atraso do atuador representada pela Figura 14 é descrita por

$$T_t(x, t) = \alpha T_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (195)$$

$$-kT_x(0, t) = q_c(t - d) \quad (196)$$

$$T(s(t), t) = T_d \quad (197)$$

$$\dot{s}(t) = -\beta T_x(s(t), t), \quad (198)$$

onde d é o atraso no tempo.

De acordo com as referências [40] e [4], a lei de controle do sistema de malha fechada do sistema (195)-(198) é:

$$U(t) = -\bar{K} \left(\int_{t-d}^t U(\psi) d\psi + \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \vartheta(t) \right). \quad (199)$$

A equação (134) será representada como $U_\Delta(t)$ para diferenciar de (199). O objetivo desse capítulo é provar a equivalência entre o controle de compensação com atraso (199) e a realimentação baseada no preditor, em outras palavras, $U(t) \equiv U_\Delta(t + d)$, no qual pode ser descrito como

$$U_\Delta(t + d) = -\bar{K} \left(\int_0^{s(t+d)} u(x, t + d) dx + \vartheta(t + d) \right). \quad (200)$$

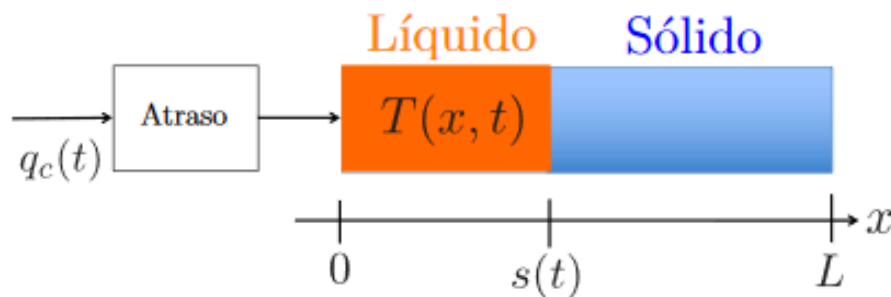


Figura 14: Esquema do problema de Stefan de uma fase com atraso [4]

Integrando $\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t)$ de t até $t + d$ produz

$$s(t + d) = s(t) - \int_t^{t+d} u_x(s(\tau), \tau) d\tau. \quad (201)$$

Integrando $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ no tempo de t até $t + d$ e no espaço de 0 to $s(t + d)$, respectivamente, é obtido

$$\int_0^{s(t+d)} \int_t^{t+d} u_t(x, t) dt dx = \int_0^{s(t+d)} \int_t^{t+d} u_{xx}(x, \tau) dt d\tau \quad (202)$$

$$\int_0^{s(t+d)} u(x, t+d) dx = \int_0^{s(t+d)} u(x, t) dx + \int_t^{t+d} u_x(s(t+d), \tau) d\tau + \int_{t-d}^t U(\varsigma) d\varsigma. \quad (203)$$

Substituindo (201) e (203) em (200), tem-se que

$$U_d(t + d) = -\bar{K} \left(\int_0^{s(t+d)} u(x, t) dx + \int_t^{t+d} (u_x(s(t+d), \tau) - u_x(s(\tau), \tau)) dx + \int_{t-d}^t U(\varsigma) d\varsigma + \vartheta(t) \right). \quad (204)$$

Analisando a segunda integral do lado direito da equação (204)

$$\int_t^{t+d} (u_x(s(t+d), \tau) - u_x(s(\tau), \tau)) dx = \int_t^{t+d} \int_{s(\tau)}^{s(t+d)} u_{xx}(x, \tau) dx d\tau = \int_{s(t)}^{s(t+d)} (u(x, s^{-1}(x)) - u(x, t)) dx \quad (205)$$

A condição de fronteira $u(s(t), t) = 0, \forall t \geq 0$ implica $u(x, s^{-1}(x)) = 0$, aplicando essa condição em (205)

$$\int_t^{t+d} (u_x(s(t+d), \tau) - u_x(s(\tau), \tau)) dx = - \int_{s(t)}^{s(t+d)} u(x, t) dx. \quad (206)$$

Finalmente, substituindo (206) em (204), obtem-se

$$U_{\Delta}(t) = -\bar{K} \left(\int_{t-d}^t U(\psi) d\psi + \int_0^{s(t)} u(x, t) dx + \vartheta(t) \right), \quad (207)$$

que é a mesma equação do compensador do controlador com atraso (199), completando a prova.

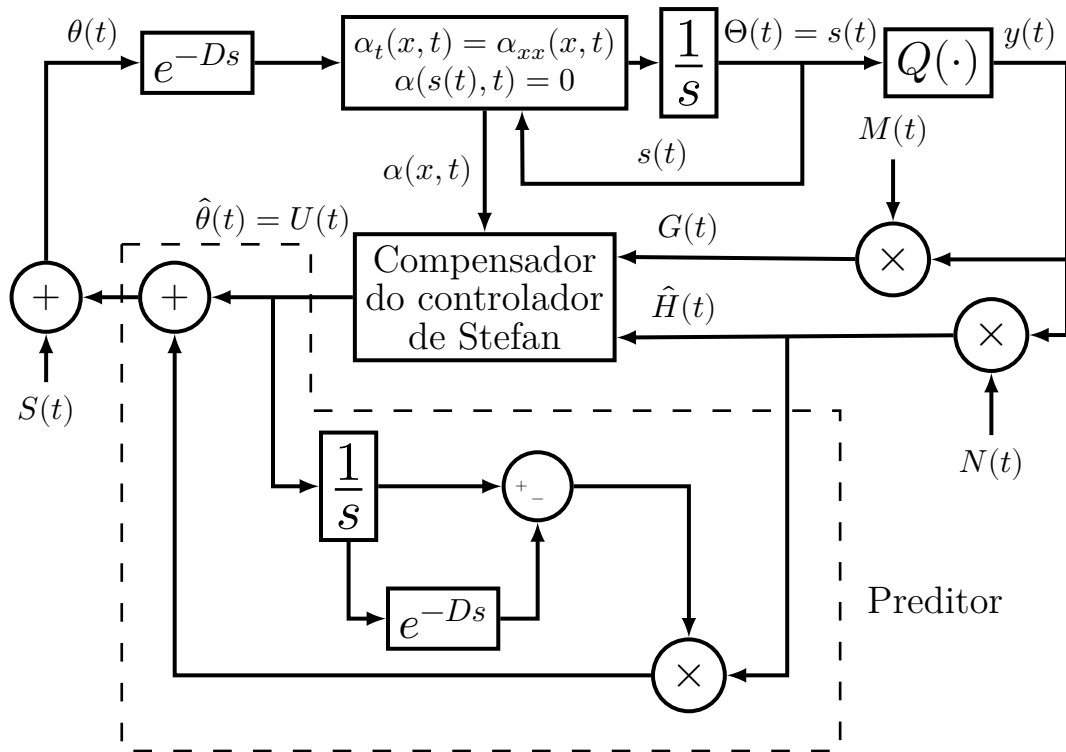


Figura 15: Malha de controle da busca extremal com um esquema básico de preditor aplicado ao problema de Stefan de uma fase.

Comparando a lei de controle preditora (207) com a lei de controle original sem delay (134), é possível verificar que a expressão adicional do lado direito $\int_{t-D}^t U(\psi) d\psi$ é similar a integral apresentada em [20] [Eq. 35] e pode ser representada como um esquema básico de predição de acordo com a Figura 15.

O sinal de perturbação $S(t)$ na Figura 15, usando como referência (86), será uma versão de (69) com avanço no tempo, ou seja:

$$S(t) = \beta_x(0, t + D). \quad (208)$$

Usando os mesmos passos do Capítulo 2 para (199), é obtido a lei de controle implementável com o filtro passa-baixa:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\psi) d\psi + \hat{H}(t) \int_0^{s(t)} u(x,t) dx \right] \right\}. \quad (209)$$

4.1 Simulação Numérica

A simulação numérica da EDP de Stefan com atraso emprega o mapa quadrático descrito em (65) e os parâmetros são escolhidos conforme indicado na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros de simulação com atraso

	Símbolo	Descrição	Valor
Parâmetros do controlador	K	ganho do controlador	-0.1
	a	amplitude da perturbação	0.1
	ω	frequência da perturbação [rad/s]	10
	c	frequência do controlador [rad/s]	10
Parâmetros do sistema	L	domínio espacial [m]	1
	Θ^*	otimizador do mapa estático	0.8
	y^*	valor ótimo do mapa estático	4
	H	Hessiana do mapa estático	-1
	s_0	interface inicial [m]	0.12
	T_0	temperatura inicial [°C]	110
	T_d	temperatura de derretimento [°C]	100
	d	atraso [s]	0.5

Verifica-se na Figura 16, Figura 17 e na Figura 18, respectivamente, que mesmo sob condição de atraso, observa-se a convergência de $(\Theta(t), y(t), U(t))$ para a vizinhança de $(\Theta^*, y^*, 0)$. As mesmas soluções propostas na Seção 3.2 para contornar a violação das condições usuais do problema de Stefan pode ser aplicada para o caso com atraso.

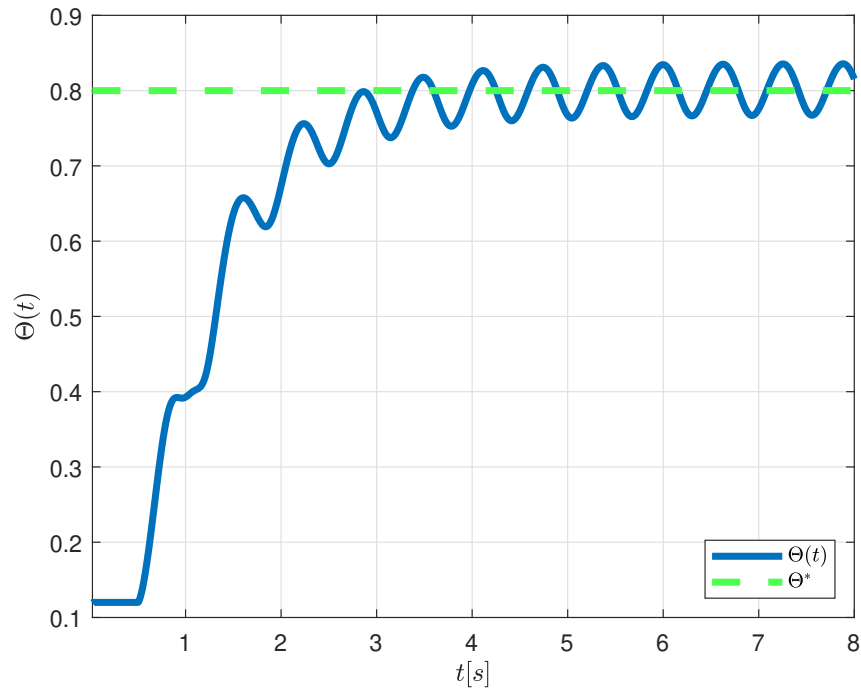


Figura 16: Convergência da fronteira móvel $\Theta(t)$ para Θ^* com atraso.

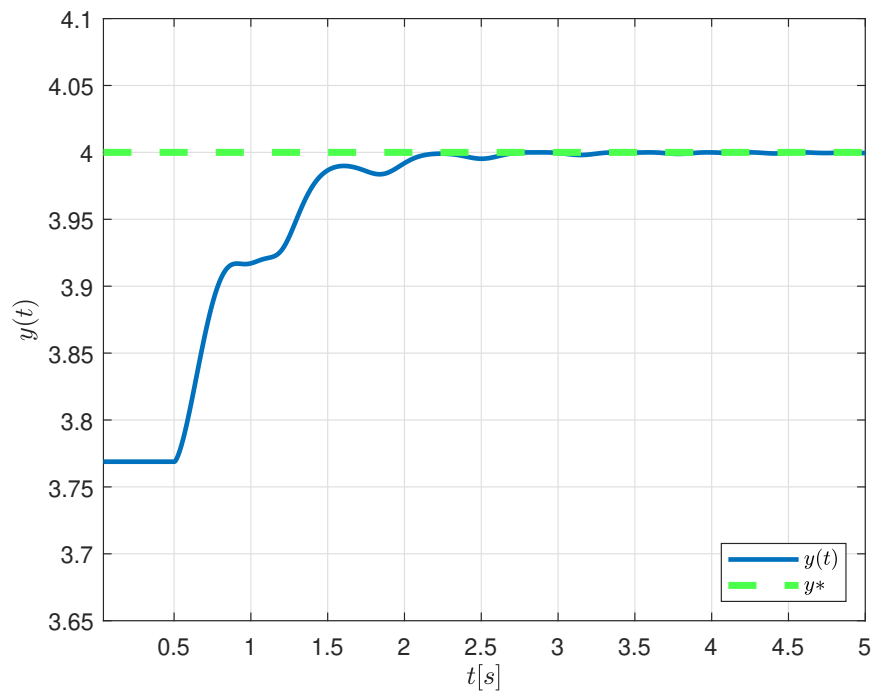


Figura 17: Convergência da saída $y(t)$ para y^* com atraso.

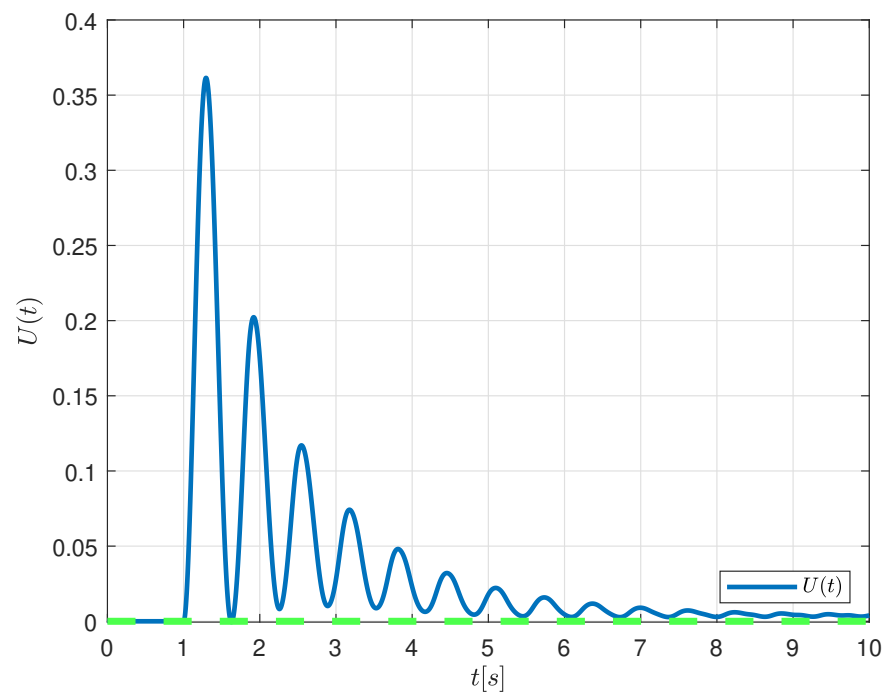


Figura 18: Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0 com atraso.

5 CONCLUSÃO

A metodologia proposta consegue maximizar o mapa estático, mesmo na presença de atraso, buscando o ponto extremo em uma EDP com fronteira móvel. Embora a dinâmica de atuação deva ser conhecida, nenhuma informação é assumida a partir dos parâmetros do mapa. A lei de controle média para compensar a dinâmica de atuação empregou a metodologia *backstepping*. Por fim, a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo foram garantidas. Uma ilustração dos benefícios do novo esquema da busca extremal para a EDP de Stefan é apresentada usando resultado de simulações consistentes.

Considerando o movimento senoidal de $s(t)$, os ciclos limite podem ser completamente eliminados [38] evitando violar a validade do princípio do máximo no problema de Stefan, onde o esforço dos controladores baseados na busca extremal desaparecem à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio. Em [37] e [39] o mesmo objetivo foi proposto com a busca extremal baseado em colchetes de Lie. Essa é realmente uma boa ideia para futuras investigações.

Publicações

Foram submetidos dois artigos relacionados com o tema desta dissertação, uma deles para o XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2022) intitulado “Busca extremal para a EDP de Stefan com fronteira móvel” e o outro para o *17th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS 2022)* intitulado “*Extremum Seeking for Stefan PDE with Moving Boundary and Delays*”.

Trabalhos futuros

Dentre possíveis futuros trabalhos, destacam-se:

- Elaboração de algoritmo de busca extremal com o objetivo de eliminar os ciclos limites decorrentes do movimento senoidal de $s(t)$, com base nos trabalhos de [38], [37] e [39];

- Resolver o problema da solução de trajetória para valores diferentes de α , β e k ;
- Aplicação da busca extremal para o problema de Stefan abrangendo o caso de congelamento;
- Extensão da metodologia proposta neste trabalho para outros tipos de EDPs;
- Aplicação da metodologia apresentada nesta dissertação para a otimização da queima de combustível de mísseis balísticos que utilizam combustíveis sólidos;
- Validação experimental.

REFERÊNCIAS

- [1] KOGA, S.; DIAGNE, M.; KRSTIC, M. Control and state estimation of the one-phase Stefan problem via backstepping design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 64, n. 2, p. 510–525, 2018.
- [2] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002.
- [3] YAU, H.-T.; WU, C.-H. Comparison of extremum-seeking control techniques for maximum power point tracking in photovoltaic systems. *Energies*, Molecular Diversity Preservation International, v. 4, n. 12, p. 2180–2195, 2011.
- [4] KOGA, S.; BRESCH-PIETRI, D.; KRSTIC, M. Delay compensated control of the Stefan problem and robustness to delay mismatch. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 30, n. 6, p. 2304–2334, 2020.
- [5] LEBLANC, M. Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*, 1922.
- [6] KAZAKEVICH, V. Technique of automatic control of different processes to maximum or to minimum. *Avtorskoe svidetelstvo, (USSR Patent)*, n. 66335, 1943.
- [7] DRAPER, C. S.; LI, Y. T. *Principles of optimizing control systems and an application to the internal combustion engine*. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 1951.
- [8] TAN, Y. et al. Extremum seeking from 1922 to 2010. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, p. 14–26, 2010.
- [9] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Autom.*, v. 36, p. 595–601, 2000.
- [10] ADETOLA, V.; DEHAAN, D.; GUAY, M. Adaptive extremum-seeking receding horizon control of nonlinear systems. In: IEEE. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. [S.l.], 2004. v. 4, p. 2937–2942.

- [11] ARIYUR, K.; KRSTIĆ, M. Real-time optimization by extremum-seeking control. In: . [S.l.: s.n.], 2003.
- [12] GUAY, M. et al. Flatness-based extremum-seeking control over periodic orbits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 52, n. 10, p. 2005–2012, 2007.
- [13] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NESIĆ, D. Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- [14] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. *Model-free stabilization by extremum seeking*. [S.l.]: Springer, 2017.
- [15] MOASE, W. H.; MANZIE, C.; BREAR, M. J. Newton-like extremum-seeking for the control of thermoacoustic instability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 55, n. 9, p. 2094–2105, 2010.
- [16] DRAKUNOV, S.; ÖZGÜNER, Ü. Optimization of nonlinear system output via sliding mode approach. In: *Proceedings of the IEEE International Workshop on Variable Structure and Lyapunov Control of Uncertain Dynamical Systems, Sheffield, UK*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 61–62.
- [17] ZHANG, C.; ORDÓÑEZ, R. *Extremum-seeking control and applications: a numerical optimization-based approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- [18] KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 57, n. 9, p. 750–758, 2008.
- [19] KRSTIC, M. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 55, n. 2, p. 287–303, 2009.
- [20] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 1911–1926, 2017.
- [21] WETTLAUFER, J. Heat flux at the ice-ocean interface. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Wiley Online Library, v. 96, n. C4, p. 7215–7236, 1991.

- [22] PETRUS, B.; BENTSMAN, J.; THOMAS, B. G. Enthalpy-based feedback control algorithms for the Stefan problem. In: IEEE. *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2012. p. 7037–7042.
- [23] CONRAD, F.; HILHORST, D.; SEIDMAN, T. Well-posedness of a moving boundary problem arising in a dissolution-growth process. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Pergamon, v. 15, n. 5, p. 445–465, 1990.
- [24] KOGA, S.; KRSTIC, M. *Materials Phase Change PDE Control & Estimation*. [S.l.]: Springer, 2020.
- [25] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- [26] GUPTA, S. C. *The classical Stefan problem: basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods*. [S.l.]: Elsevier, 2017.
- [27] HALE, J.; LUNEL, S. V. Averaging in infinite dimensions. *The Journal of integral equations and applications*, JSTOR, p. 463–494, 1990.
- [28] BEAUZAMY, B. *Introduction to Banach spaces and their geometry*. [S.l.]: Elsevier, 2011.
- [29] BERTSEKAS, D. P. Nonlinear programming. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 48, n. 3, p. 334–334, 1997.
- [30] KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V.; KANELLAKOPOULOS, I. *Nonlinear and adaptive control design*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [31] KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*. [S.l.]: SIAM, 2008.
- [32] KRSTIC, M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. Springer, 2009.
- [33] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NESIĆ, D. Multivariable Newton-based extremum seeking. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, p. 4436–4441, 2011.

- [34] HILL, C. D. Parabolic equations in one space variable and the non-characteristic Cauchy problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 20, n. 3, p. 619–633, 1967.
- [35] DUNBAR, W. B. et al. Motion planning for a nonlinear Stefan problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, EDP Sciences, v. 9, p. 275–296, 2003.
- [36] KUTLUAY, S.; BAHADIR, A.; ÖZDEŞ, A. The numerical solution of one-phase classical Stefan problem. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 81, n. 1, p. 135–144, 1997.
- [37] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. Non- C^2 lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 136, n. 1, 2014.
- [38] WANG, L.; CHEN, S.; MA, K. On stability and application of extremum seeking control without steady-state oscillation. *Automatica*, Elsevier, v. 68, p. 18–26, 2016.
- [39] DÜRR, H.-B. et al. Lie bracket approximation of extremum seeking systems. *Automatica*, Elsevier, v. 49, n. 6, p. 1538–1552, 2013.
- [40] KOGA, S.; KRSTIĆ, M. Delay compensated control of the Stefan problem. In: *IEEE. 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2017. p. 1242–1247.

APÊNDICE

A Prova de desigualdades utilizadas

Desigualdade de Poincaré

Deseja-se provar

$$\|w(t)\|^2 \leq 2w(D, t)^2 + 4D^2 \|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \int_0^D w(x, t)^2 dx &= [2xw(x, t)]_{x=0}^D - 2 \int_0^D xw(x, t)w_x(x, t) dx \\ &= Dw(D, t)^2 - 2 \int_0^D xw(x, t)w_x(x, t) dx \\ &\leq w(D, t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^D w(x, t)^2 dx + 2 \int_0^D x^2 w_x(x, t)^2 dx, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

no qual é utilizado a desigualdade de Young na última linha, após alguns cálculos e utilizando o limite superior $\int_0^D x^2 w_x(x, t)^2 \leq 2D^2 \|w_x(t)\|^2$ chega-se em (A.1).

O próximo passo consiste na prova de (55)

$$\|w(t)\|^2 \leq 2Dw(0, t)^2 + 4D^2 \|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.3})$$

Prova:

$$\int_0^D w(x, t)^2 dx = [(x - D)2w(x, t)]_{x=0}^D - 2 \int_0^D (x - D)w(x, t)w_x(x, t) dx, \quad (\text{A.4})$$

utilizando os mesmos passos da prova anterior, chega-se em (A.3)

Desigualdade de Agmon (Caso 1)

Deseja-se provar

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(0, t)^2 + 2 \|w(t)\| \|w_x(t)\| \quad (\text{A.5})$$

Prova: A partir de

$$\int_0^x w(x, t) w_x(x, t) dx = \frac{1}{2} (w(x, t)^2 - w(0, t)^2). \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma

$$w(x, t)^2 = w(0, t)^2 + 2 \int_0^x w(x, t) w_x(x, t) dx \leq w(0, t)^2 + 2 \int_0^x |w(x, t)| |w_x(x, t)| dx, \quad (\text{A.7})$$

onde a partir do valor absoluto é utilizado a desigualdade triangular. Após aplicar o máximo de (A.7) com respeito a $x \in [0, D]$, chega-se a (A.6).

O próximo passo consiste na prova de (56)

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(D, t)^2 + 2 \|w(t)\| \|w_x(t)\|. \quad (\text{A.8})$$

A partir de

$$\int_x^D w(x, t) w_x(x, t) dx = \frac{1}{2} (w(D, t)^2 - w(x, t)^2), \quad (\text{A.9})$$

seguindo os mesmos passos da prova anterior, chega-se a (A.8).

Desigualdade de Agmon (Caso 1)

Deseja-se provar

$$w(0, t)^2 \leq \frac{D+1}{D} \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 \quad (\text{A.10})$$

Prova:

A partir da integral

$$- \int_0^x w(x, t) w_x(x, t) dx = \frac{1}{2} (w(0, t)^2 - w(x, t)^2), \quad (\text{A.11})$$

pela desigualdade de Young, tem-se

$$\frac{1}{2}(w(0, t)^2 - w(x, t)^2) \leq \frac{1}{2} \int_0^x w(x, t)^2 + w_x(x, t) dx \leq \frac{1}{2}(\|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2). \quad (\text{A.12})$$

Integrando (A.12) no domínio espacial

$$\frac{1}{2}(w(0, t)^2 - w(x, t)^2) = \frac{1}{2}Dw(0, t)^2 - \frac{1}{2}\|w(t)\|^2 \leq D(\|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2), \quad (\text{A.13})$$

chega-se a (A.10).

O próximo passo consiste na prova de (??)

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(D, t)^2 + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\| \quad (\text{A.14})$$

Prova:

A partir da integral

$$\int_x^D w(x, t)w_x(x, t) dx = \frac{1}{2}(w(D, t)^2 - w(x, t)^2), \quad (\text{A.15})$$

seguindo os mesmos passos da prova anterior, chega-se a (A.14)