



# DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA NÃO-SUAVE COM SUPORTE DE MEMÓRIA DE FORMA

Júlio César Silva Pontes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2023

DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA NÃO-SUAVE COM SUPORTE DE  
MEMÓRIA DE FORMA

Júlio César Silva Pontes

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Aprovada por: Prof. Marcelo Amorim Savi

Prof. Fernando Pereira Duda

Prof. Ricardo Alexandre Amar Aguiar

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2023

Pontes, Júlio César Silva

Dinâmica não-linear de um sistema não-suave com suporte de memória de forma / Júlio César Silva Pontes. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2023.

XV, 68 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2023.

Referências Bibliográficas: p. 49-66.

1. Dinâmica não-linear. 2. Ligas com memória de forma.
  3. Sistemas não-suaves com suportes descontínuos.
- I. Savi, Marcelo Amorim. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica.
- III. Título.

“Não temas, porque Eu sou contigo...”

Isaías 43.5

Palavra de Deus



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, toda a minha gratidão a Deus por ter me dado os recursos essenciais à produção deste trabalho. Agradeço também de todo o meu coração à minha família, em especial, à minha mãe Maria Lúcia (*in memoriam*) por todo o seu legado de amor, carinho, conselhos, paciência e sua grande fé em Deus; à minha sogra Mariza; à minha esposa Bianca; à minha filha Júlia; ao meu irmão Joelmir; ao meu sogro Sérgio; e ao meu enteado Matheus por toda a compreensão, paciência, todo o amor e apoio necessários, além da perseverança deles em Deus, para o atingimento de meus objetivos acadêmicos, principalmente nos períodos mais desafiadores e difíceis desta jornada.

À Marinha do Brasil (MB), em especial à Diretoria de Engenharia Naval (DEN), pelo ensejo que me foi confiado de cursar com aproveitamento o mestrado acadêmico, na área de acústica, dinâmica e vibrações.

Ao meu orientador acadêmico, professor, *D.Sc.*, Marcelo Amorim Savi, pela sua elevada capacidade técnica, acadêmica e profissional, pela sua atenção, disponibilidade, orientação, mentoria, compreensão, amizade, pelas suas orientações sempre muito bem direcionadas nesta jornada, para aumentar meu aprendizado acadêmico e profissional.

Ao Capitão de Mar e Guerra (FN-RM1), professor, *D.Sc.*, Sergio de Almeida Oliveira, pela sua atenção, disponibilidade, coorientação, pelo incentivo, encorajamento, pelos conselhos, e por todo o seu profissionalismo e sua amizade nesta jornada; ao Professor da UFBA, *D.Sc.*, Marcelo Costa Tanaka, colega desde os tempos em que cursamos graduação em Engenharia Mecânica na UFRN; aos pesquisadores do Centro de Mecânica Não Linear (MECANON) da COPPE/UFRJ pelo exemplo de dedicação acadêmica incessantemente demonstrada, em especial, ao professor, *D.Sc.*, Lucas Vignoli, aos colegas, *M.Sc.*, Luã Guedes; *D.Sc.*, Vanderson Dornelas; *M.Sc.*, Alex Brandão; *M.Sc.*, Igor Fortuna; e aos colegas de mestrado Endryws Moura, Thiago Pimenta e Victor Hugo pelos momentos incomensuráveis de alegria, descontração e conhecimentos compartilhados por ocasião das disciplinas acadêmicas cursadas.

Por fim, meus sinceros agradecimentos aos professores das disciplinas por mim cursadas no Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PEM) da COPPE/UFRJ, sobretudo da área de dinâmica/vibrações, pelos valiosos ensinamentos; e ainda pela oportunidade do uso de excelente qualidade das instalações, dos recursos computacionais (especialmente do MECANON), os quais tornaram possível o cumprimento desta missão acadêmica.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA NÃO-SUAVE COM  
SUPORTE DE MEMÓRIA DE FORMA

Júlio César Silva Pontes

Dezembro/2023

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Programa: Engenharia Mecânica

Os sistemas dinâmicos não-suaves são comuns em sistemas de engenharia estando associados a contatos e descontinuidades e possuindo respostas complexas. O uso de materiais inteligentes permite atenuar amplitudes vibracionais indesejáveis explorando características como a dissipação histerética. Este trabalho apresenta uma investigação da dinâmica não-linear de um sistema com contato envolvendo ligas com memória de forma. Considera-se um sistema dinâmico com um grau de liberdade sujeito a contato unilateral em um suporte descontínuo que possui um elemento com memória de forma. O comportamento termomecânico das ligas com memória de forma é descrito a partir de um modelo constitutivo com cinética de transformação assumida. Simulações numéricas são realizadas comparando a resposta de um suporte elástico com o suporte com memória de forma. Os resultados mostram mudanças significativas nas respostas devidas às transformações de fase.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NONLINEAR DYNAMICS OF A SHAPE MEMORY SUPPORTED NON-  
SMOOTH SYSTEM

Júlio César Silva Pontes

December/2023

Advisor: Marcelo Amorim Savi

Department: Mechanical Engineering

Non-smooth dynamical systems are common in engineering systems being associated with impacts and discontinuities, presenting complex responses. The use of smart materials allows attenuating undesirable vibration amplitudes by exploiting characteristics such as hysteretic dissipation. This work presents an investigation of the nonlinear dynamics of an impact system involving shape memory alloys. It is considered a one degree of freedom system subjected to unilateral impact on a discontinuous support with a shape memory alloy element. The thermomechanical behavior of shape memory alloys is described by a constitutive model with assumed transformation kinetics. Numerical simulations are performed comparing the response of an elastic support with the shape memory support. Results show significant changes in responses due to phase transformations.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
	<b>1.1 Organização do Trabalho</b> .....	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (SMAs)</b> .....	<b>5</b>
	<b>2.1 Aplicações</b> .....	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b> .....	<b>20</b>
	<b>3.1 Sistema Dinâmico</b> .....	<b>20</b>
	<b>3.2 Formulação Dinâmica</b> .....	<b>21</b>
	<b>3.3 Modelo Constitutivo</b> .....	<b>22</b>
	<b>3.4 Mola Helicoidal</b> .....	<b>26</b>
	<b>3.5 Equações de Movimento</b> .....	<b>29</b>
	<b>3.6 Variáveis de Estado</b> .....	<b>29</b>
	<b>3.6.1 Procedimento Numérico</b> .....	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b> .....	<b>33</b>
	<b>4.1 Vibrações Livres</b> .....	<b>34</b>
	<b>4.2 Vibrações Forçadas</b> .....	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E OBSERVAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>APÊNDICE</b> .....	<b>67</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Efeito da variação de temperatura na transformação de fase de <i>SMA</i> . Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	5
Figura 2 – Comportamento pseudoelástico (ou superelástico). Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	6
Figura 3 – Efeito de memória de forma ou, do inglês, <i>Shape Memory Effect (SME)</i> . Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	7
Figura 4 – Instalação de divisas e barras de <i>SMA</i> na saída das turbinas (HARTL & LAGOUDAS, 2007). Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	14
Figura 5 – Acoplamento de <i>SMA</i> para montagem de tubos (HODGSON & BROWN, 2000). Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	15
Figura 6 – Amostrador de tubo hidrotérmico formado por mola de <i>SMA</i> para sucção. Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	16
Figura 7 – Modelo de sistema não suave com suporte de <i>SMA</i> .....	20
Figura 8 – DCL para os modos de operação (a) sem contato e (b) com contato .....	21
Figura 9 – Tensão de transformação de fase crítica em função da temperatura absoluta. Extraído de SAVI <i>et al.</i> (2016) .....	23
Figura 10 – Mola helicoidal (a) submetida a esforço compressivo uniaxial e (b) DCL da mola. Extraído de SHIGLEY (2011) e adaptado .....	26
Figura 11 – Variação linear de $\tau$ na seção transversal do fio de mola helicoidal .....	28
Figura 12 – Vibração livre do sistema sem contato para $x_0 = 0,001$ m .....	34
Figura 13 – Vibração livre do sistema com contato para $x_0 = 0,004$ m .....	35
Figura 14 – Vibração livre do sistema com contato para $x_0 = 0,01$ m .....	36
Figura 15 – Vibração livre do sistema com contato para $x_0 = 0,05$ m que induz transformações de fase no suporte .....	37
Figura 16 – Vibração livre do sistema com contato para $x_0 = 0,05$ m e diferentes temperaturas .....	38
Figura 17 – Vibração livre do sistema com contato para $x_0 = 0,10$ m .....	39
Figura 18 – Vibração forçada do sistema sem contato para $m = 0,0015$ kg .....	40
Figura 19 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,015$ kg .....	41
Figura 20 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,085$ kg .....	42
Figura 21 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,120$ kg .....	43

Figura 22 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,150$ kg .....	44
Figura 23 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,185$ kg .....	45
Figura 24 – Vibração forçada do sistema com contato para $m = 0,285$ kg .....	46

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros mecânicos e geométricos do sistema .....	33
Tabela 2 – Propriedades das <i>SMAs</i> segundo modelo constitutivo de BRINSON (1993) .....	33
Tabela 3 – Quadro-resumo das equações de movimento e constitutivas do sistema .....	67

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\cos( )$  Cosseno de um ângulo

$\frac{d}{dt}$  Derivada (ou operador diferencial) temporal

$\int$  Integração (ou operador integral)

$n$  Número natural

$n!$  Fatorial de  $n$

*SMA* *Shape Memory Alloy*

$t$  Instante de tempo

$x_0$  Posição inicial do sistema no instante  $t = 0$

$x$  Posição do sistema em um determinado instante  $t$

$v_{0x}$  Velocidade inicial do sistema no instante  $t = 0$

$v_x$  Velocidade,  $\dot{x}$ , do sistema em um determinado instante  $t$

$M$  Massa do sistema

$R$  Raio do rotor

$m$  Massa desbalanceada do rotor

$\rho$  Raio de  $m$  ao centro do rotor

$\Omega$  Frequência angular de forçamento externo

$\varphi$  Ângulo de fase inicial (ou fase)

$c$  Coeficiente de amortecimento viscoso do dissipador linear do sistema

$k_1$  Rigidez da mola linear nº 1

$k_2$  Rigidez da mola linear nº 2



$F_S$	Força de contato exercida pelo suporte
$c_S$	Coefficiente de amortecimento viscoso do dissipador linear do suporte
$k_S$	Rigidez do suporte no caso elástico (ou sem <i>SMA</i> )
$\check{I}_-$	Subespaço vetorial de fase em que não ocorre contato
$\check{I}_+$	Subespaço vetorial de fase em que ocorre contato
$(x, v_x)$	Vetor de estados associado ao espaço de fase do sistema dinâmico
$h(x, v_x)$	Função indicatriz escalar associada a cada $(x, v_x) = (x, \dot{x})$
$\check{\Sigma}$	Grande superfície que divide $\check{I}_-$ e $\check{I}_+$ e é definida por $h(x, v_x)$
$h_\alpha(x, v_x)$	Função $h(x, v_x)$ dos deslocamentos do sistema relativos ao suporte
$h_\beta(x, v_x)$	Função $h(x, v_x)$ de forças do suporte
$\beta$	Fração volumétrica de martensita ou indicador de transformação de fase
$\dot{\beta}$	Indicador de transformação de fase, $\beta$ , na forma de taxas
$T$	Temperatura absoluta
$\dot{T}$	Temperatura absoluta na forma de taxas
$E$	Módulo de elasticidade
$\dot{\sigma}$	Tensão uniaxial na forma de taxas
$\sigma$	Tensão uniaxial
$\dot{\varepsilon}$	Deformação uniaxial na forma de taxas
$\varepsilon$	Deformação uniaxial
$\alpha$	Parâmetro escalar que controla o tamanho vertical do ciclo de histerese
$\theta$	Coefficiente de expansão térmica linear
$( )_0$	Condições iniciais ou valores instantâneos passados das respectivas quantidades
$\sigma_0$	Referente a $( )_0$ para $\sigma$
$\varepsilon_0$	Relativo a $( )_0$ para $\varepsilon$
$\beta_0$	Concernente a $( )_0$ para $\beta$
$T_0$	Atinente a $( )_0$ para $T$

$A$	Austenita
$M$	Martensita maclada
$M +$	Martensita não-maclada
$\beta_T$	Variável interna associada à fração de $\beta$ induzida por temperatura que gera $M$
$\beta_S$	Variável interna associada à fração de $\beta$ induzida por tensão que gera $M +$
$\beta_{S,T}(\sigma, T)$	Função de $\beta_S$ e $\beta_T$ que depende dos valores instantâneos de $\sigma$ e $T$
$E_A$	Módulo de elasticidade austenítico
$E_M$	Módulo de elasticidade martensítico
$\varepsilon_r$	Máxima deformação recuperável (ou residual) por carregamento térmico
$\alpha(\beta)$	Função de $\alpha$ com respeito a $\beta$
$\alpha(\beta_0)$	Função de $\alpha$ em relação a $\beta_0$
$\beta_{S_0}$	Corresponde à tensão induzida e é relacionada a $(\ )_0$ para $\beta_S$
$\beta_{T_0}$	Corresponde à temperatura induzida e é relativa a $(\ )_0$ para $\beta_T$
$A_s$	Temperatura de início de formação de $A$
$A_f$	Temperatura de término de formação de $A$
$M_s$	Temperatura de começo de formação martensítica
$M_f$	Temperatura de fim de formação martensítica
$A \Rightarrow M +$	Transformação martensítica direta
$M + \Rightarrow A$	Transformação martensítica inversa
$\pi$	Número irracional (3,1415...) para o argumento expresso em radianos
$\sigma^{\text{CRIT}}$	Tensão crítica para transformação induzida
$\sigma_s^{\text{CRIT}}$	Tensão crítica para início de $A \Rightarrow M +$
$\sigma_f^{\text{CRIT}}$	Tensão crítica para término de $A \Rightarrow M +$
$\Delta_T$	Parâmetro de incremento ou não a $\beta_T$ de acordo com $T$ em relação a $T_0$ , $M_s$ e $M_f$
$C_A$	Aumento linear de $\sigma^{\text{CRIT}}$ para $M + \Rightarrow A$ quando $T > A_s$
$C_M$	Aumento linear de $\sigma^{\text{CRIT}}$ para $A \Rightarrow M +$ quando $T > M_s$
$A_A$	Parâmetro de $SMA$ na fase $A$
$A_M$	Parâmetro de $SMA$ na fase $M$

$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento da mola de <i>SMA</i>
$k_a$	Rigidez austenítica da mola de <i>SMA</i>
$d$	Diâmetro do fio (ou diâmetro interno) da mola helicoidal de <i>SMA</i>
$D$	Diâmetro externo (ou de espiral) da mola helicoidal de <i>SMA</i>
$N$	Número de espiras ativas da mola helicoidal de <i>SMA</i>
$\dot{\tau}$	Tensão cisalhante no fio de mola de <i>SMA</i> na forma de taxas
$\tau$	Tensão de cisalhamento no fio de mola de <i>SMA</i>
$\dot{\gamma}$	Deformação cisalhante do fio de mola de <i>SMA</i> na forma de taxas
$\gamma$	Deformação de cisalhamento do fio de mola de <i>SMA</i>
$\gamma_r$	Máxima deformação cisalhante recuperável (ou residual) do fio de mola de <i>SMA</i>
$\dot{F}_{SMA}$	Força de restituição exercida pela mola de <i>SMA</i> na forma de taxas
$F_{SMA}$	Força de restituição exercida pela mola de <i>SMA</i>
$\dot{u}$	Deslocamento unidimensional da mola de <i>SMA</i> na forma de taxas
$u$	Deslocamento unidimensional da mola de <i>SMA</i>

# 1 INTRODUÇÃO

A não linearidade do tipo não suave é abundante na natureza, estando relacionada a fenômenos de atrito ou descontinuidades associadas a contatos intermitentes entre componentes do sistema dinâmico. As não suavidades são especialmente importantes em sistemas rotativos e osciladores descontínuos. Tipicamente, esses sistemas possuem diferentes modos de resposta que representam as condições sem contato e com contato.

Os sistemas não suaves possuem uma complexidade incomum, necessitando de um tratamento adequado. SAVI *et al.* (2007) apresentaram uma análise dinâmica numérica e experimental de um oscilador descontínuo. Esse oscilador é submetido a um forçamento externo excitado por um motor elétrico em laboratório.

Diversos trabalhos exploraram os diferentes aspectos da riqueza dinâmica de sistemas não suaves, destacando-se os seguintes: WIERCIGROCH *et al.* (1998); TODD & VIRGIN (1996, 1997); BEGLEY & VIRGIN (1998); SLADE *et al.* (1997); VIRGIN & BEGLEY (1999); PIIROINEN *et al.* (2004). WIERCIGROCH (2000) tratou da modelagem de sistemas dinâmicos com descontinuidades dependentes de movimento. LEINE (2000); LEINE *et al.* (2000); LEINE & VAN CAMPEN (2002a, 2002b) avaliaram diferentes aspectos de sistemas não suaves incluindo bifurcações, caos e procedimentos de modelagem.

A descrição de sistemas rotativos por meio do modelo de *Jeffcott* (JEFFCOTT, 1919) é usual na literatura, representando de forma simples e satisfatória o sistema rotor-mancal. A característica não suave desse sistema mostra a importância de investigar sistemas descontínuos para uma grande variedade de aplicações. SRIVASTAVA *et al.* (2021); BOUSAÏD *et al.* (2020); SILVA *et al.* (2013) avaliaram a excentricidade e os efeitos de rotação de um sistema rotor-mancal rígido conforme modelo de *Jeffcott*.

SIRA-RAMIREZ *et al.* (2007); KARPENKO *et al.* (2002, 2003); ZHANG *et al.* (1999) avaliaram a complexidade da dinâmica envolvida em sistemas de rotor-mancal por meio de ferramentas de dinâmica não linear. MOREIRA (2017) identificou a sensibilidade às condições iniciais para uma mesma frequência de forçamento ao perceber mudanças abruptas de periodicidade de movimento até o regime caótico. Outros aspectos da dinâmica não linear de sistemas rotativos não suaves são discutidos nas seguintes referências: PHADATARE & PRATIHER (2021); SIMADER *et al.* (2021); SGHIR (2021); YANG *et al.* (2021); XING *et al.* (2021); PATIL & JADHAV (2020); ZHANG *et al.* (2012); LIU *et al.* (2019); PASYNKOVA *et al.* (2006); SHEN *et al.* (2007); ZHANG *et al.* (2020).

Nos últimos anos houve um aumento do interesse pelos chamados materiais inteligentes devido a uma variedade de vantagens técnicas que esses materiais apresentam em muitas aplicações de diversas áreas de emprego direto de altas tecnologias. Os materiais inteligentes possuem um acoplamento multifísico e incluem os materiais piezelétricos e magnetorreológicos, além das ligas com memória de forma, do inglês *Shape Memory Alloys* (*SMA*s). As *SMA*s apresentam a habilidade de recuperar uma forma pré-definida sob a ação de um carregamento termomecânico adequado, sendo empregadas em uma variedade de aplicações nos mais variados campos do conhecimento humano.

As propriedades singulares das *SMA*s são devidas às transformações de fase sólidas, representadas essencialmente por 2 fases cristalográficas: a austenita e a martensita (SAVI *et al.*, 2016). As *SMA*s têm se mostrado interessantes para aplicações dinâmicas explorando tanto a dissipação histerética quanto a variação de rigidez induzida pela transformação de fases. SAVI *et al.* (2015) apresentaram uma revisão de diversas aplicações dinâmicas de sistemas com *SMA*, mostrando respostas complexas (inclusive caóticas).

A combinação das não linearidades não suaves com as *SMA*s pode fornecer condições adequadas para o controle vibracional passivo de sistemas descontínuos, notadamente sistemas rotativos. Trabalhos importantes com os chamados rotores inteligentes quanto à análise de incertezas e controle de vibrações são atribuídos a PISAREV *et al.* (2021); ZHAO *et al.* (2021); UNGURÁN *et al.* (2019); KOROISH *et al.* (2018); RAIOLA *et al.* (2016); ENEMARK & SANTOS (2016); MOLINA *et al.* (2015); BERNHAMMER *et al.* (2016); BERGAMI & HENRIKSEN (2014); SILVA *et al.* (2013).

BORGES *et al.* (2018) propuseram um sistema rotativo com elementos com memória de forma mostrando reduções de até 60% de amplitude por alteração de rigidez do sistema durante o período de ressonância na primeira velocidade crítica. ENEMARK *et al.* (2015) avaliaram a dinâmica de rotores, comparando molas de aço com molas de *SMA*, e mostraram diminuição de até 47% de amplitudes de vibração e alteração máxima de 7% nas 2 primeiras velocidades críticas por variações de temperatura, o que elucida o comportamento adaptativo do sistema com a temperatura de elementos de *SMA*. ALVES *et al.* (2018) realizaram investigações numérica e experimental para avaliar o efeito pseudoelástico em uma suspensão de fios de *SMA* pré-tensionados que melhoram as respostas dinâmicas de um rotor flexível.

O interesse em mitigar o efeito da vibração de sistemas submetidos a contato lateral e radial tem aumentado com o emprego das *SMA*s que podem ser incorporados a componentes mecânicos de tais sistemas, com o objetivo de controle ativo ou passivo de vibrações de

máquinas como turbinas e rotores em geral. SANTOS & SAVI (2009) obtiveram resultados com reduções de amplitudes vibracionais de um oscilador de 1 grau de liberdade quando submetido a contato com suporte descontínuo em razão do efeito dissipativo-histerético de um suporte de *SMA* descrito a partir do modelo constitutivo de SAVI & PAIVA (2005).

O objetivo deste trabalho é investigar a dinâmica não linear de um oscilador não suave de 1 grau de liberdade com suporte descontínuo representado por uma mola helicoidal de *SMA*. Uma excitação externa é proporcionada por uma massa desbalanceada rotativamente.

Nessa perspectiva, a principal motivação deste trabalho é investigar as propriedades adaptativas das *SMAs* para alterar a dinâmica complexa envolvida em sistemas descontínuos. O comportamento termomecânico das *SMAs* é descrito por meio de um modelo com cinética de transformação assumida, proposto por BRINSON (1993). A dinâmica do sistema é analisada considerando diferentes condições de operação. Os resultados de simulações numéricas indicam que a dissipação de energia no contato do sistema com o suporte altera significativamente a dinâmica do sistema quando existe transformação de fase. A contribuição deste trabalho é mostrar que, em função do efeito dissipativo-histerético devido às transformações de fase da mola de *SMA*, as reduções de amplitudes vibracionais do sistema variam de acordo com a temperatura. Essa adaptabilidade permite controlar o nível de dissipação desejado para o sistema, atenuando situações indesejáveis de vibração.

## 1.1 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em 7 capítulos. O primeiro capítulo contém esta INTRODUÇÃO, em que são mencionados os principais materiais inteligentes com destaque para descrição e contribuição das *SMAs*. O segundo capítulo refere-se às LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (*SMAs*) com suas aplicações.

O terceiro capítulo trata da MODELAGEM MATEMÁTICA do sistema dinâmico não suave com suporte descontínuo avaliado neste trabalho, contemplando uma modelagem constitutiva aplicável à mola helicoidal constituída de *SMA* e conectada ao suporte descontínuo do referido sistema, para obtenção das equações de movimento do sistema, suas variáveis de estado e o procedimento utilizado para implementação numérica.

O quarto capítulo mostra os resultados obtidos de SIMULAÇÕES NUMÉRICAS de vibrações livres e forçadas do sistema a diferentes temperaturas e condições de operação para comparação dos resultados no caso elástico (sem *SMA*) com os resultados no caso com *SMA*.

O quinto capítulo apresenta a CONCLUSÃO E OBSERVAÇÕES FINAIS. O sexto capítulo relaciona as REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS citadas neste trabalho e no sétimo capítulo é apresentado um APÊNDICE que contém um quadro-resumo das equações dinâmicas do sistema, equações constitutivas e de cinética de transformação de fase (leis de evolução) para *SMA* conforme o modelo constitutivo unidimensional de BRINSON (1993).

## 2 LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (SMAs)

As propriedades singulares das *SMAs* são devidas às transformações de fase sólidas, representadas essencialmente por 2 fases cristalográficas (BRINSON, 1993): a austenita (de estrutura cúbica de corpo centrado, estável a elevadas temperaturas e livre de tensões); e a martensita (de estrutura cúbica de face centrada, estável a baixas temperaturas e livre de tensões), induzida tanto por temperatura quanto por tensão. A austenita possui somente 1 variante, enquanto a martensita tem 24 variantes associadas a orientações cristalográficas distintas entre si. As variantes da martensita podem ser induzidas por tensão (martensita não maclada ou, em inglês, *detwinned*) ou temperatura (martensita maclada ou, em inglês, *twinned*).

Os principais fenômenos associados aos comportamentos termomecânicos das *SMAs* são conhecidos como pseudoelasticidade (ou superelasticidade), efeito de memória de forma ou, do inglês, *Shape Memory Effect (SME)* e transformações de fase devido à variação de temperatura (SAVI *et al.*, 2016).

SAVI *et al.* (2016) ressaltam ser necessário que algumas temperaturas características de *SMA* sejam definidas para introduzir os comportamentos termomecânicos característicos das transformações de fase de *SMA*, isto é, ao considerar um estado livre de tensão, as temperaturas  $A_s$  e  $A_f$  são, respectivamente, a de começo e término de formação de austenita (*A*), enquanto  $M_s$  e  $M_f$  são as temperaturas, respectivamente, de formação inicial e final de martensita (*M*). Logo, se uma amostra estiver livre de tensão ( $\sigma = 0$ ) e submetida a variações de temperatura, ocorrerão transformações de fase definidas por essas temperaturas.

Na Figura 1 extraída de SAVI *et al.* (2016) é apresentada uma curva típica  $\epsilon \times T$  (deformação-temperatura absoluta).

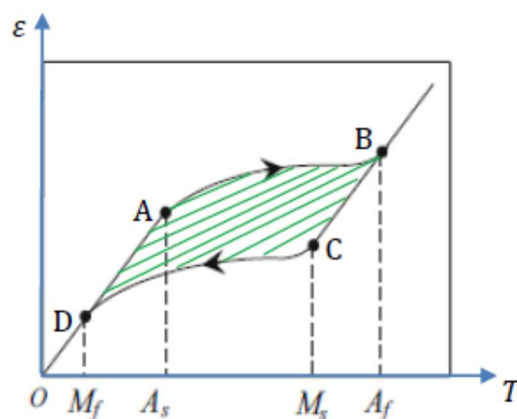
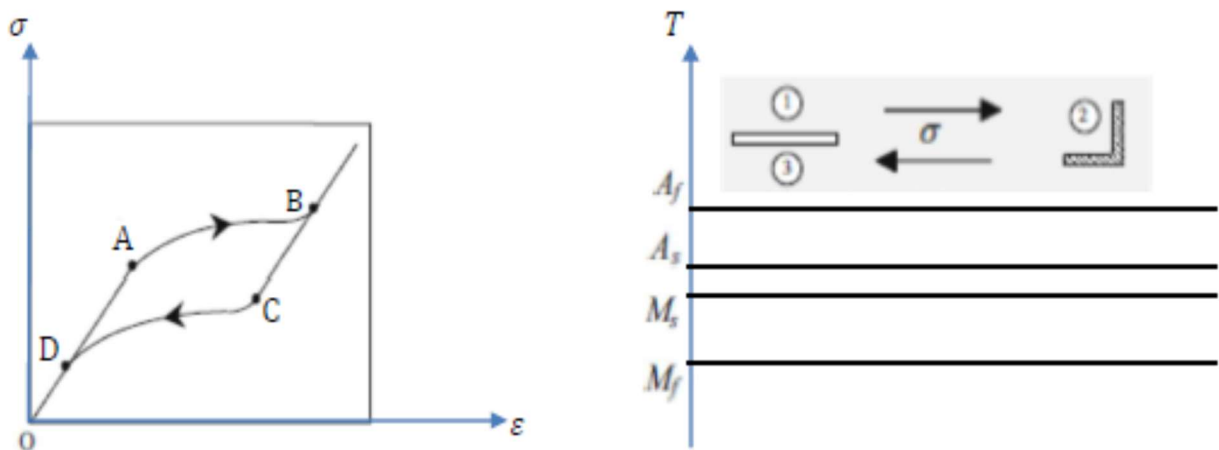


Figura 1 – Efeito da variação de temperatura na transformação de fase de *SMA*.  
Extraído de SAVI *et al.* (2016).



Na Figura 1, a amostra está em estado martensítico maclado, composto por um total de 24 variantes, a pequenas temperaturas inferiores a  $M_f$ . Elevando a temperatura, a transformação de fase martensítica inversa ( $M \Rightarrow A$ ) começa em  $A_s$ , ponto A, finalizando em  $A_f$ , no ponto B. Ao reduzir a temperatura ocorre a transformação de fase martensítica direta ( $A \Rightarrow M$ ), iniciando em  $M_s$ , no ponto C, e terminando em  $M_f$ , no ponto D. Tendo em vista que as temperaturas de transformação de fase ( $A \rightarrow B$  e  $C \rightarrow D$ ) para cada fase (AB e CD) têm valores diferentes, de  $A_s$  para  $A_f$  e de  $M_s$  para  $M_f$ , a amostra terá um comportamento histerético dissipativo (ciclo ABCD) mostrado na área hachurada da curva  $\varepsilon \times T$  da Figura 1.

SAVI *et al.* (2016) descrevem que a pseudoelasticidade (ou superelasticidade) sempre ocorre quando uma amostra de *SMA* está a uma alta temperatura superior a  $A_f$ . Nesse caso, isotermicamente a Figura 2 (a) extraída de SAVI *et al.* (2016) mostra a curva típica tensão-deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ), expressando o comportamento macroscópico de *SMA*. Um processo de carregamento mecânico ocasiona uma restituição elástica até atingir um valor crítico (ponto A), no qual surge a transformação martensítica direta ( $A \Rightarrow M$ ), encerrando no ponto B cuja a estrutura cristalina da amostra é inteiramente composta por martensita não maclada  $M +$  (variante simples). Para tensões maiores, a *SMA* apresenta uma restituição linearmente elástica. Durante o processo de descarregamento, a amostra apresenta um processo de recuperação elástica ( $B \Rightarrow C$ ). Do ponto C ao ponto D é possível perceber a transformação martensítica inversa ( $M \Rightarrow A$ ). Depois disso, no descarregamento a amostra tem comportamento elástico.



(a) (b)  
 Figura 2 – Comportamento pseudoelástico (ou superelástico).  
 Extraído de SAVI *et al.* (2016).

Conforme SAVI *et al.* (2016), o processo de carregamento/descarregamento é concluído quando as *SMA*s não apresentam deformação residual ( $\epsilon_r = 0$ ). No entanto, visto que os caminhos das transformações martensíticas direta e inversa não coincidem ocorre um ciclo de histerese associado à energia dissipada. O efeito pseudoelástico pode ser observado de outro modo mediante Figura 2 (b) extraída de SAVI *et al.* (2016). Inicialmente, ao considerar uma temperatura superior a  $A_f$ , existe somente a fase austenítica ①. Carregamento mecânico isotérmico é aplicado para surgir martensita não maclada ②. Enquanto ocorre descarregamento, o processo de transformação martensítica inversa ( $M + \Rightarrow A$ ) acontece e ao cessar a carga, ③, a amostra não apresenta deformação residual ( $\epsilon_r = 0$ ).

SAVI *et al.* (2016) explicam que o *SME* ocorre a temperaturas inferiores a  $A_s$ . Tipicamente, o comportamento macroscópico de *SMA* da amostra e o *SME* podem ser observados na curva de tensão-deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) indicada para  $T < M_f$  na Figura 3 (a) extraída de SAVI *et al.* (2016). Ao carregar mecanicamente a amostra, a tensão nela atinge um valor de ponto crítico (ponto A) e o processo de reorientação da martensita maclada à martensita não-maclada inicia, encerrando no ponto B. Ao terminar o processo de carregamento-d Descarregamento mecânico, a amostra de *SMA* indica uma deformação residual máxima,  $\epsilon_r$ , no ponto C, a qual pode ser recuperada aquecendo-se a amostra e isso induz a transformação de fase martensítica inversa ( $M + \Rightarrow A$ ), processo conhecido por ser unidirecional do *SME*. Esse fenômeno corresponde ao movimento do ciclo (ou laço) de histerese da Figura 3 (a) extraída de SAVI *et al.* (2016). Ao reduzir a temperatura, a altura do laço de histerese se torna menor.

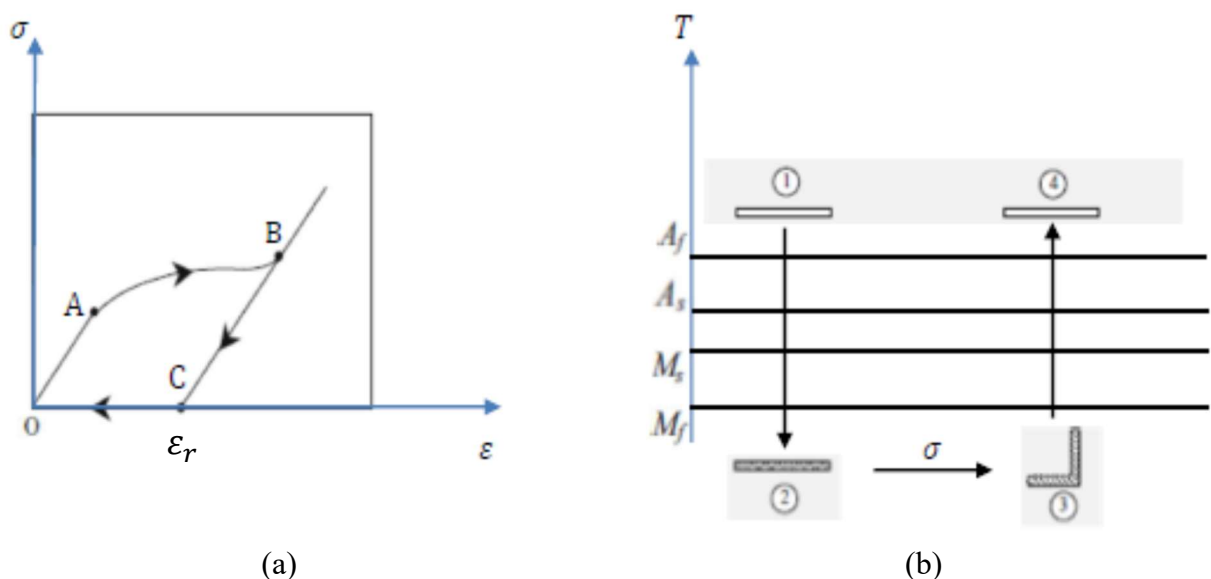


Figura 3 – Efeito de memória de forma ou, do inglês, *Shape Memory Effect (SME)*.  
Extraído de SAVI *et al.* (2016).

SAVI *et al.* (2016) apresenta que uma alternativa de observar o *SME* é mostrada na Figura 3 (b) extraída de SAVI *et al.* (2016). A princípio, a temperatura da amostra de *SMA* é superior a  $A_f$ , ①, na qual a amostra tem somente a fase austenítica. Ao reduzir a temperatura da amostra de *SMA* e cruzar a linha relacionada a  $M_f$ , a transformação de fase inicia e a austenita é substituída pela martensita maclada. Essa transformação é finalizada no momento em que a temperatura da amostra é inferior a  $M_f$ , ②. Um carregamento mecânico isotérmico é aplicado (②→③) e disso surge martensita não maclada. Ao cessar essa carga, a amostra indica uma deformação residual, ③. Por aquecimento (③→④), recupera-se a forma anterior da amostra que ocasiona a transformação martensítica inversa ( $M + \Rightarrow A$ ). SAVI *et al.* (2016) descreve que por um processo de treinamento obtém-se o *SME* bidirecional. Esse processo atua para a amostra ter as formas nas fases austenita e martensita. Variações de temperatura geram alterações na forma da amostra livre de carregamento mecânico. ZHANG *et al.* (1991) aponta que, normalmente, há 2 processos de treinamento: *SME* cíclico mediante surgimento da martensita não maclada, e o treinamento de martensita induzida por tensão ou, do inglês, *Stress-Induced Martensite (SIM) training*. Todos esses induzem significativas deformações plásticas.

Embora descrever o comportamento termomecânico das *SMAs* seja complexo, em razão de fenômenos intrínsecos do material, existem diversos modelos propostos para essas ligas disponíveis na literatura, ressaltando destacar a pesquisa de SAVI *et al.* (2005) que avaliou os subciclos internos devido a transformações de fase incompletas que ocorrem nas *SMAs*. Entre os vários modelos sugeridos para avaliar os fenômenos inerentes às *SMAs*, unidimensionalmente foram publicados trabalhos de FALK (1980 e 1983) que exploraram o modelo de energia livre, mecânica e termodinâmica de *SMA*; de TANAKA (1986) que esboçou o aspecto termomecânico de *SME*; de BRINSON (1993) que avaliou o comportamento constitutivo de *SMA* por derivação termomecânica com funções de material não constantes e variável interna de martensita redefinida; de AURICCHIO & SACCO (1997) que abordaram um modelo com diferentes propriedades elásticas entre austenita e martensita; de SAVI *et al.* (2002a) que realizaram modelagem fenomenológica e simulação numérica de *SMA* de um modelo acoplado de transformação de fase termoplástica; de PAIVA *et al.* (2005) que apresentaram um modelo constitutivo para *SMA* com tração e compressão, ambas, considerando plasticidade e assimetria; e de ADEODATO *et al.* (2022) que abordaram um modelo constitutivo de *SMA* com função polinomial para cinética de transformação de fase.

Tridimensionalmente, importantes pesquisas foram realizadas por FREMOND & MIYAZAKI (1996) que descreveram uma robusta teoria macroscópica termomecânica das

*SMA*s; por SOUZA *et al.* (1998) que identificaram a influência geométrica da não linearidade associada ao comportamento mecânico de molas helicoidais de *SMA*; por BROCCA *et al.* (2002) que desenvolveram um modelo constitutivo para *SMA* com base no Modelo de Microplano; por AURICCHIO & PETRINI (2004) que elaboraram uma modelagem que descreve transformações de fase sólida induzidas por tensão e temperatura com acoplamento termomecânico para aplicações em compósitos híbridos; por PANICO & BRINSON (2007) que apresentaram uma modelagem fenomenológica para reorientação de martensita nas *SMA*s; por POPOV & LAGOUDAS (2007) que produziram um modelo constitutivo para *SMA* capturando os efeitos de pseudoelasticidade (ou superlasticidade) e separação de martensita auto-acomodada; por AURICCHIO *et al.* (2007) que descreveram uma modelagem para transformação de fase sólida induzida por tensão permanentemente inelástica; por ARGHAVANI *et al.* (2010) que elaboraram um modelo constitutivo fenomenológico para *SMA* submetido a cargas multiaxiais; por OLIVEIRA *et al.* (2010) e OLIVEIRA (2013) que apresentaram um modelo constitutivo de *SMA* desenvolvido com modelagem termodinâmica; por OLIVEIRA (2016) que abordaram plasticidade no comportamento termomecânico das *SMA*s; por CHEMISKY *et al.* (2018) que elaboraram um modelo constitutivo que incorpora estrutural e funcionalmente os efeitos de fadiga em atuadores compostos de *SMA*; por PHILLIPS *et al.* (2019) que mostraram um estudo de como o dano interno evolui durante a atuação de fadiga em *SMA*; e modelagem constitutiva incluindo fadiga em *SMA* a partir do trabalho de DORNELAS (2020), descrição macroscópica da fadiga funcional dessas ligas por DORNELAS *et al.* (2020) e modelagem constitutiva com observação experimental por DORNELAS *et al.* (2021).

As propriedades termomecânicas das *SMA*s já eram conhecidas desde a década de 1930 (SAVI, 2017). Dessas ligas as resultantes da combinação de Níquel e Titânio (Ni-Ti) são conhecidas como Nitinol desde os anos 1960 (SAVI *et al.*, 2016), e que têm desde aquela época (SAVI, 2017) atraindo interesse tecnológico (em razão de especificidades únicas dessas ligas) em diversas aplicações distintas do conhecimento humano, destacando-se as áreas de controle biomédico, robótica, aeroespacial e de vibrações (SAVI *et al.*, 2016). Essas propriedades singulares das *SMA*s estão cada vez mais despertando motivação e aplicação para os avanços tecnológicos em várias áreas da ciência e tecnologia, com destaque nas áreas de engenharia, de indústria biomédica, de controle de vibração, robótica e engenharia aeroespacial, além de acoplamentos, juntas de tubos, sensores e/ou atuadores, e componentes para contato de equipamentos alternativos e rotativos, o que será vista na próxima seção.

## 2.1 Aplicações

Tendo em vista o que foi até aqui apresentado sobre os comportamentos termomecânicos das *SMA*s dependerem da temperatura, conferindo comportamento adaptativo a essas ligas, o seu uso tem sido amplamente aplicado à dinâmica de estruturas inteligentes com grande potencial, sendo desenvolvidas principalmente pelo investimento industrial. Por isso, as propriedades notáveis das *SMA*s estão atraindo significativamente mais interesse tecnológico em diversos contextos científicos e de engenharia, da biomédica às aplicações aeroespaciais (SAVI *et al.*, 2016).

Estudos destacam que o emprego de *SMA* no campo da biomedicina tem se mostrado eficiente devido à característica de dispositivos não invasivos e também pela excelente biocompatibilidade dessas ligas. Em geral, as *SMA*s são bem sucedidas ao serem empregadas em instrumentos cirúrgicos, mecanismos cardiovasculares, ortopédicos e aparelhos ortodônticos, entre outras aplicações de dispositivos biomédicos constituídos de *SMA*, como as estruturas auto-erigíveis que exploram a biocompatibilidade de maneiras diferentes.

Das aplicações da biocompatibilidade das *SMA*s, uma de grande utilidade é a descrita por DUERIG *et al.* (1990) referente à finalidade principal do filtro *Simon* que é a de filtragem dos coágulos na corrente sanguínea, enquanto a de AHLHELMET *et al.* (2009) destaca que o objetivo mais importante dos *stents* autoexpansíveis é o de suportar qualquer passagem tubular como, por exemplo, vasos sanguíneos. Além disso, DUERIG *et al.* (1999), REYNAERLS *et al.*, (1997) e MACHADO & SAVI (2002, 2003) apresentaram aplicações biomédicas do tipo ortodônticas e ortopédicas.

Outros empregos das *SMA*s, somadas às aplicações biomédicas, dizem respeito aos que são explorados nas áreas de engenharia. Juntamente às aplicações de *SMA* na indústria marítima, são mencionados nesta seção o emprego de *SMA* no controle de vibração, na robótica e na engenharia aeroespacial. No contexto de possíveis aplicações na área marítima, IVOŠEVIĆ & RUDOLF (2019) destacam o uso de *SMA* em tubos subaquáticos em lugar das soldas orbitais e seu emprego como componente de termostato de dispositivos subaquáticos. Esses autores apontam que as *SMA*s possuem, em ambiente marinho, elevada resistência à corrosão e à fadiga. Por isso, o uso de *SMA* para favorecer a dinâmica de estruturas inteligentes tem um excelente potencial e isso tem sido investido pela indústria marítima para desenvolver essas estruturas. REDINIOTIS *et al.* (2002) abordaram um protótipo de hidrofólio flexível multi-atuado por *SMA* em túnel de água que simula propulsão hidrodinâmica.

Nesse protótipo, os fios de *SMA* são acionados externamente por fonte de aquecimento elétrico. VAIDYANATHAN *et al.* (2000) relatam o emprego de *SMA* em robô hidrostático na indústria marítima, destacando que molas de *SMA* usadas no robô (submetido a pressões de profundidade elevadas) propiciam uma dinâmica ondulante que o capacita a transpor obstáculos. Mediante investigação experimental realizada por RAO *et al.* (2014) foi possível avaliar como fios de *SMA* responderam pseudoelasticamente (ou superelasticsearchamente) a esforços torcionais na região de histerese com transformações parciais.

O controle de vibrações é de muita relevância dentro da engenharia mecânica. Nesse contexto, as *SMA*s são utilizadas para controle vibracional passivo de estruturas devido à sua elevada capacidade dissipativa associada ao seu comportamento histerético cuja vantagem elevada é quanto maior a dissipação decorrente de maior amplitude. Isso foi verificado por VAN HUMBEECK *et al.* (1999) quando estudaram aplicações não médicas de *SMA*, e por SAVI *et al.* (2011) mediante simulação numérica para investigar o comportamento dissipativo por histerese de absorvedor vibracional adaptativo de *SMA*. ROGERS (1995) e BIRMAN (1997) relatam que para controle vibracional uma alternativa é a utilização de fios de *SMA* embutidos em matrizes compostas que alteram as propriedades mecânicas de finas estruturas. Outras importantes contribuições como a de OBERAIGNER *et al.* (2002), MCCORMICK *et al.* (2006), SITNIKOVA *et al.* (2009), TUISSI *et al.* (2009) também abordam elementos de *SMA* para atenuar amplitudes vibracionais.

SAVI *et al.* (2011) investigaram numericamente a possibilidade de emprego de *SMA* em um componente conhecido como Absorvedor de Vibrações Sintonizado ou, do inglês, *Tuned Vibration Absorber (TVA)*, um tipo de dispositivo de controle vibracional passivo clássico que consiste em um oscilador (sistema secundário) acoplado a um sistema primário. Ao ajustar por igualar as frequências natural do *TVA* e de excitação do sistema primário, atenuam-se os parâmetros vibracionais do sistema primário. Pesquisas de WILLIAMS *et al.* (2002, 2005) e TISEO *et al.* (2010) apresentaram o *Adaptive Tuned Vibration Absorber (ATVA)* de *SMA* que é um tipo de dispositivo adaptativo de *TVA*, usando *SMA*, para controle vibracional adequado de sistemas em que as frequências são desconhecidas ou variam. A utilização de *SMA* em *TVA* permite um maior intervalo de atuação desse tipo de absorvedor. SAVI *et al.* (2011) e AGUIAR *et al.* (2013) enfatizam que os *ATVA* de *SMA* possuem a capacidade de ajuste de sua rigidez conforme a temperatura de *SMA*, o que possibilita aos *ATVA* de *SMA* atenuarem as vibrações do sistema primário em um determinado intervalo de frequência.

Ainda no contexto de absorvedores sintonizados de vibrações, um dispositivo de *TVA* usado em plataformas de petróleo foi proposto por GHASEMI *et al.* (2019) para atenuar amplitudes vibracionais de contraventamentos, choques, abalos sísmicos e perturbações ondulatórias que submetem equipamentos mecânicos e elementos estruturais à fadiga devido aos carregamentos cíclicos induzidos no convés da plataforma, o que compromete por interrupção e desconforto dos tripulantes a produção de petróleo na plataforma. Trata-se de uma massa desse dispositivo conectada ao convés da plataforma por meio de um dissipador doravante conhecido por *VG-SMA* formado por barras de *SMA*, cilindro e pistão cujos limites são vários batentes nas quais são conectadas as barras.

Esse projeto de *ATVA* de *SMA* consiste de um absorvedor de vibrações adaptativo cujo fio de liga de Ni-Ti pré-tensionado é fixo nas extremidades com uma massa concentrada em seu centro geométrico. Mediante efeito *Joule*, o fio é aquecido por uma corrente elétrica com o intuito de forçar o campo interno de tensões a variar, inibindo a deformação, para atingir uma grande alteração de frequências naturais controladas.

Um outro contexto de elevado potencial de emprego de *SMA* é a área de robótica cujo intuito é simular um atuador muscular. Nesse sentido, SAFAK *et al.* (2002) relatam que são envidados grandes esforços para reproduzir o movimento muscular natural de animais em robôs por meio de aspectos locomotivos em locais irregulares, acidentados, ou de difícil acesso, como nas profundezas de oceanos e rios. SAFAK *et al.* (2002) realizaram um trabalho que consiste de um robô de 8 pernas, total de 24 graus de liberdade, sendo 3 por perna, e um conjunto de atuadores de *SMA* que operam por ação de corrente elétrica com uso de *SME* para favorecer a dinâmica rotacional das articulações desse robô. Uma garra flexível que corresponde a 2 vigas flexíveis foi introduzida por CHOI *et al.* (2001). Conectada a uma base de garra cada uma dessas vigas está conectada a 2 molas, sendo uma de *SMA* (utilizada como atuador), enquanto a outra mola é convencional e possui a função de restituir a posição do feixe de molas. Uma mola em espiral também existe para ligar as arestas livres das 2 vigas. A monitoração da deflexão do feixe de molas (acionadas externamente) é feita mediante uso de extensores (ou *strain gages*). JANI *et al.* (2014) destacam que 4 atuadores de *SMA* foram desenvolvidos para emprego em um robô com 13 graus de liberdade que pode voar multidirecionalmente.

Em várias situações que envolvem risco a determinadas atividades humanas são necessários os sistemas autônomos, o que tem conduzido a diversas pesquisas para desenvolvimento de robôs combinando mobilidade e precisão operacionais para desativar bombas e minas terrestres. DILIBAL & DILIBAL (2002) descrevem um protótipo de mão

robótica constituída de *SMA* na região de dedos acoplados a um tubo flexível no interior do qual passa um fluido. O princípio de funcionamento do atuador é o *SME* reversível e a temperatura do fluido (a qual aquece ou resfria a *SMA*) controla o movimento do dedo. Isso apresenta como vantagens principais comparativamente a sistemas pneumáticos e hidráulicos o controle vibracional maior da força exercida à mão, riscos menores no seu uso e redução do peso total do equipamento, sendo, portanto, mais versátil.

A aplicação de *SMA* na área aeroespacial abrange o programa de aeronaves de asa fixa, espaçonaves, painéis solares, entre outros. Pesquisas são realizadas com intuito de implementar tecnologias de materiais inteligentes para controle vibracional ativo, um passo importante no desenvolvimento e na otimização de desempenho de levantamento de corpos rígidos.

Utilizações vantajosas de *SMA* empregada em veículos aeroespaciais foram relatadas por IKEDA (2011) ao abordar que estruturas mais leves, resistentes e seguras podem ser adquiridas, como, por exemplo, os pneus que foram desenvolvidos pela *NASA* ao capturarem a pseudoelasticidade de fios de *SMA* apresentam a capacidade de restituir sua geometria inicial, ao transpor um obstáculo, significativa resistência à tração em área arenosa e redução de peso. PACHECO & SAVI (2000) modelaram e simularam numericamente a dinâmica de um dispositivo de *SMA* para aplicações aeroespaciais.

As *SMAs* empregadas em diversos componentes aeronáuticos, como, por exemplo, os *flaps* inteligentes dispensam que esses dispositivos utilizem sistemas hidráulicos extensos, além de atuadores e bombas, o que aumenta 2 pontos críticos do projeto aeronáutico (o peso e o seu custo). Pesquisas indicam que dispositivos que empregam as *SMAs* solucionam esse problema do projeto aeronáutico. Uma dessas soluções consiste em fios de *SMA* nas partes superior e inferior do *flap*. Além do controle de aquecimento por corrente elétrica nos fios, a geometria do *flap* pode ser controlada, otimizando o peso e a eficiência do projeto aeronáutico.

KUDVA *et al.* (1999) relatam que um dos programas mais populares de aeronaves de asa fixa foi o Programa Asa Inteligente ou, do inglês, *Smart Wing Program*, desenvolvido por uma equipe de pesquisa, com apoio da *NASA*, *AFOSR* e *AFRC*. O objetivo era desenvolver tecnologias inteligentes para melhoria de aeronaves militares no tocante ao seu desempenho aerodinâmico. O grupo de trabalho concebeu uma asa adaptativa com mecanismos integrados de atuação que ajustam a superfície padrão da asa e fornecem uma forma aerodinâmica para uma alta variedade de regimes de voo.

HARTL & LAGOUDAS (2007) descrevem que o modelo de asa inteligente possui *flap* articulado, incorporado e forma de *aileron* usando cabos de *SMA*. A partir dessas melhorias



foi obtida uma deflexão de  $10^\circ$  da superfície de controle. Com o uso de tubos de torque foi possível uma torção de  $5^\circ$  da estrutura da asa, o que melhorou o desempenho de 8 a 12% relativamente à superfície de asa convencional. PITT *et al.* (2001) descrevem que, em parceria com o Laboratório de Pesquisa Naval da Marinha Norte-Americana, a *NASA* desenvolve um programa de utilização de atuadores de *SMA* para ajuste do aspecto geométrico de entrada de ar em motores aeronáuticos a velocidades subsônicas. A pesquisa de WANG *et al.* (2023) aponta significativa melhora de operação dos motores além de otimização da sua configuração estrutural com o uso de *SMA*.

Ainda no contexto aeronáutico, a engenharia tem sido desafiada ao longo dos anos a reduzir os ruídos aeroportuários em razão do crescimento internacional da frota de aeronaves e de aeroportos relativamente próximos a grandes centros urbanos. Os níveis desses ruídos permitidos no pouso e decolagem têm sido cada vez mais controlados em todos os países. Uma alternativa para redução desses ruídos é, segundo HARTL & LAGOUDAS (2007) e mostrada na Figura 4 extraída de SAVI *et al.* (2016), por meio de divisas e barras de *SMA* instaladas na saída das turbinas para o fluxo de descarga de gases ser misturado. Essas barras dobram as divisas no fluxo de gases de combustão durante o voo à altitude pequena ou a velocidades baixas, para elevar a mistura de gases e reduzir o ruído gerado. Quando em velocidades altas ou altitudes elevadas, as barras de *SMA* retornam à fase martensítica porque são resfriadas. Essa transformação de fase altera o formato das divisas, aumentando a eficiência da turbina. Nesse caso, o sistema elétrico por meio de corrente elétrica nas barras de *SMA* favorece a temperatura induzir transformação de fase nas referidas barras.

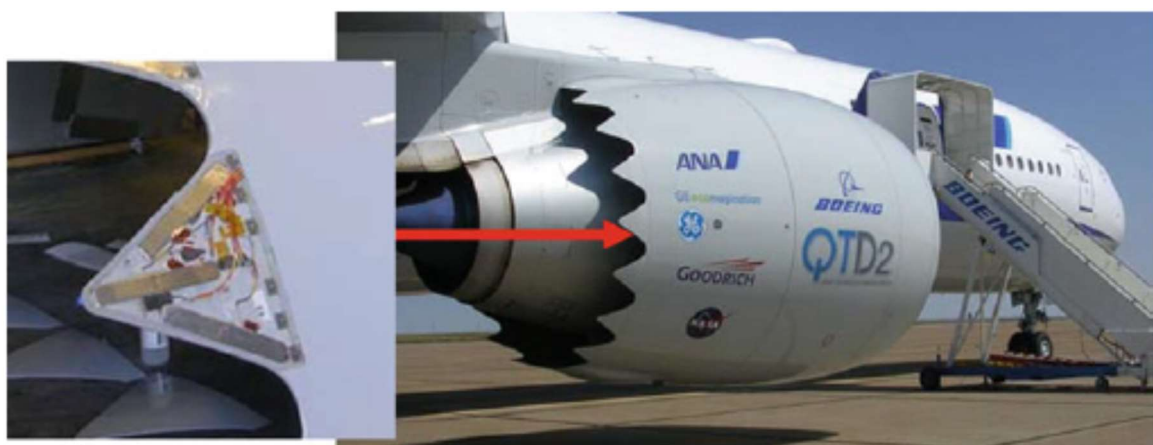


Figura 4 – Instalação de divisas e barras de *SMA* na saída das turbinas (HARTL & LAGOUDAS, 2007). Extraído de SAVI *et al.* (2016).

Em 2023, segundo a *BUSINESS RESEARCH COMPANY*, o predomínio no ano anterior de aplicações de *SMA* é das indústrias aeroespacial e bélica. Para a área de defesa, a *BAE Systems* vem desenvolvendo um protótipo de suspensão de *SMA* para veículos blindados que resiste a explosões de minas terrestres. Esse tipo de dispositivo de suspensão não possui molas e restitui a sua forma original logo após ser deformado (sem fraturar) em decorrência de impacto ou explosão.

Outra aplicação de *SMA* que merece atenção é na atuação espacial de painéis solares. *CARPENTER & LYONS* (2001) relatam que dispositivos usados como finas tiras de elementos inteligentes correspondem a dobradiças de *SMA* para abrir os painéis aquecidos por estímulo elétrico. O que motiva o interesse pelo emprego de *SMA* nesse caso é o menor peso dessas dobradiças de *SMA* comparado ao das dobradiças convencionais, o que contribui significativamente para melhor relação potência/peso.

A Força Aérea dos Estados Unidos da América aplica com sucesso um dispositivo em caça *F-14* de uso inicial na década de 1970. Isso motiva o emprego interessante de *SMA* referente a dispositivo de montagem de tubos, conhecido como *CryOfit*, sendo desenvolvido por *RAYCHEM* (2001) e apresentado na Figura 5 extraída de *SAVI et al.* (2016). Conforme *HODGSON & BROWN* (2000), trata-se de 2 partes que para serem montadas o acoplamento de *SMA* deve ser imerso em um banho de nitrogênio líquido ( $\cong -196\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Posteriormente é ampliado mecanicamente o diâmetro do acoplamento, o qual é mantido imerso no banho de nitrogênio. Ao retirar do banho, o acoplamento é rapidamente montado nos 2 tubos a serem conectados. Enquanto retorna à temperatura ambiente, o formato anterior contraído do acoplamento de *SMA* é recuperado, conectando os tubos. Em alguns casos, a adesão é melhor do que por juntas soldadas (sem o inconveniente da tensão residual inerente).

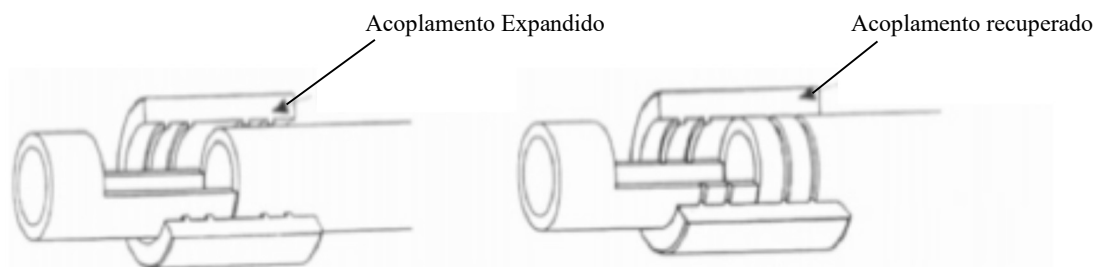


Figura 5 – Acoplamento de *SMA* para montagem de tubos (*HODGSON & BROWN*, 2000).  
Extraído de *SAVI et al.* (2016).

Caso similar ao relatado no parágrafo anterior eventualmente pode ser visto no acoplamento e juntas de frequente aplicação na indústria de óleo, em que *SINTEF* (1999)

descreve que um dispositivo de *SMA* é empregado em flanges de tubos. O procedimento consiste em pré-comprimir uma arruela cilíndrica de *SMA* e colocá-la entre a porca e o flange. Ao ser aquecida, a arruela restitui o seu formato anterior, exercendo força de restituição axial no parafuso para montar as 2 partes. Esse procedimento evita a ação de torques, o que impede a tensão de cisalhamento ser induzida no parafuso. A modelagem e simulações correspondentes a esse dispositivo mostradas por LA CAVA *et al.* (2000) permitem concluir que essa forma de montagem diminui de cerca de 20% a tensão equivalente no parafuso em comparada ao procedimento tradicional.

O uso de sensores e atuadores de *SMA* compreende as aplicações dessas ligas em fios, barras, molas e componentes de maior complexidade como absorvedores de vibração, inclusive molas helicoidais de NiTi que ao serem tracionadas e comprimidas conferem proteção sísmica a edificações foram apresentadas por SPEICHER *et al.* (2009). NAGNUMA *et al.* (1998) desenvolveram um dispositivo de *SMA* formado por um sensor e atuador inteligentes em um amostrador de tubo hidrotérmico que detecta fluido quente e gera potência de bombeamento a partir da energia térmica do fluido conforme Figura 6 extraída de SAVI *et al.* (2016). O funcionamento desse dispositivo consiste, inicialmente (ponto A), na compressão à baixa temperatura da mola de *SMA* para sucção. No ponto A, devido ao impulso do pistão, a força de atrito é superior à força de sucção. Ao ser exposta ao fluido aquecido, a mola de *SMA* para sucção imediatamente se estende com força de sucção mais elevada o suficiente para ingerir o líquido (ponto B). O aumento do comprimento da mola diminui a força de sucção e o pistão repousa ao final do curso (ponto C). A mola de *SMA* é resfriada sem ocorrer sucção (ponto D).

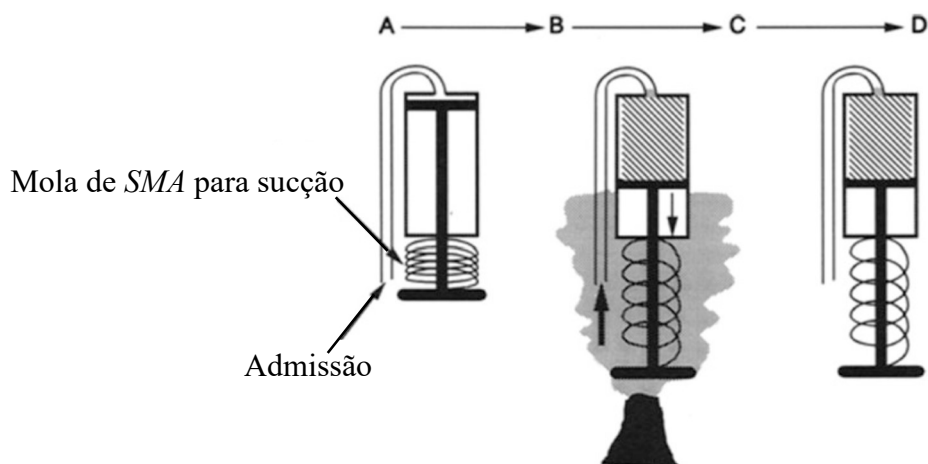


Figura 6 – Amostrador de tubo hidrotérmico formado por mola de *SMA* para sucção. Extraído de SAVI *et al.* (2016).

JUN *et al.* (2007) descreveram uma análise de sistema atuador compacto de *SMA* movido a combustível de alta densidade de energia, por exemplo, o propano, como fonte energética. Essa alta densidade energética possui benefícios evidentes em ciclos (aquecimento e resfriamento) de ativação de eficiência. A combustão gera calor com possibilidade de ser controlado por transferência desse calor por convecção forçada a um fluido e, a partir daí, para o elemento do atuador de *SMA*, até alcançar a temperatura de transformação de fase. Com a velocidade grande que a temperatura do fluido pode alcançar e uma área de superfície relativamente elevada do atuador, o processo pode ser rapidamente ativado. O encerramento do ciclo ocorre por resfriamento mediante convecção forçada para evitar o superaquecimento do elemento, o que é comum em atuadores que usam eletricidade como mecanismo de ativação ficarem superaquecidos, resultando em capacidade de desempenho perdida.

No sistema atuador de *SMA* avaliado, o elemento de *SMA* (componente principal do atuador) opera como um motor térmico ao converter a partir do combustível energia de combustão em energia mecânica. Em razão da alta capacidade de restituição de tensão e de deformação de *SMA*, o atuador compacto pode exercer consideráveis esforços. O aquecimento e resfriamento de *SMA* por convecção forçada também implicam em frequências de atuação relativamente elevadas.

Têm sido aplicados atuadores de *SMA* para diferentes objetivos de sistemas automotivos. Nesse sentido, CZECHOWICZ (2013) apontou que a motivação principal do emprego de atuadores de *SMA* na área automotiva se deve às seguintes razões: 1) Alta capacidade de operação desses atuadores inteligentes (com magnitudes de até 80 N de força e de até 30 mm de curso); 2) Possibilidade de menor peso/custo e menos complexidade, pois é reduzido o número de peças do atuador e podem ser eliminados os sensores externos já que são substituíveis por um único fio de *SMA*; 3) Resistência à corrosão desses atuadores; e 4) Operação silenciosa desses componentes. Baseando-se nessas 4 razões apresentadas, foram propostos 3 atuadores de *SMA* adaptativos conceituais por CZECHOWICZ (2013) e o mais promissor deles foi validado experimentalmente.

Trata-se de um atuador que opera contra uma mola convencional fixada em paralelo a um dispositivo de *SMA* adicional cuja finalidade é exercer uma tensão mecânica adicionalmente em temperaturas ambientes variáveis. Portanto, um dos 2 dispositivos de *SMA* é utilizado como atuador, enquanto o outro como componente pseudoelástico (dispositivo de *SMA* adicional).

No campo industrial de óleo e gás, PATIL & SONG (2017) avaliaram aplicações de *SMA* em atuadores de válvulas de equipamentos que operam em profundidades elevadas. Esses

atuadores comparativamente aos elétricos ou aos de ar comprimido apresentam funcionamento mais seguro e confiável, além de reforço estrutural, o que permite uso em selos de tubos e conectores de cabos, e em acionadores de explosivos para fragmentação da rocha para elevar o petróleo produzido. Em razão de variações ambientais induzidas nas *SMA*, atuadores dessas ligas exercem tensões grandes em rochas que são fragmentadas sem necessidade de explosivos, o que confere um processo mais seguro.

Quando existe a necessidade de serem exercidos esforços de atuação elevados uma alternativa é utilizar atuadores de *SMA* como um conjunto de fios ligados a um dispositivo do tipo tendão, o qual foi desenvolvido por MOSLEY *et al.* (1999) que apresentam o projeto, o protótipo construído, e a avaliação experimental das características dinâmicas de um conjunto atuador de *SMA* formado por 48 fios de *SMA* empacotados mecanicamente em paralelo constituindo um músculo poderoso. Esse conjunto atuador tem capacidade de suspender 100 lb, cerca de 300 vezes seu peso. Autores nessa linha de pesquisa têm por objetivo o desenvolvimento em grande escala de uma nova geração de manipuladores robóticos leves, compactos, hábeis e capazes de exercer elevadas forças de atuação.

Filmes finos de *SMA* têm sido cada vez mais reconhecidos como uma grande promessa para materiais de alto desempenho no emprego de sistemas microeletromecânicos ou, do inglês, *Micro-Electro-Mechanic Systems (MEMS)*, o que padroniza os processos de fabricação por litografia que possuem poucas quantidades de massa para aquecimento ou resfriamento, resultando em respostas rápidas nos ciclos de ativação. A energia associada ao trabalho por unidade de volume desses dispositivos é superior ao desempenho de qualquer outro dispositivo. Esses filmes quando aplicados possibilitam um aumento da simplificação dos mecanismos com projeto grandemente flexíveis e produção de movimento e vibração sem fricção (ou atrito).

Nesse contexto, a película fina de *SMA* sofre transformação de fase que altera substancialmente as propriedades mecânicas, físicas, químicas, elétricas e ópticas (como tensão de escoamento, módulo de elasticidade, dureza, resistividade e condutividade elétrica, coeficiente de expansão térmica, entre outras propriedades). Se usadas as alterações dessas propriedades, pode-se criar dispositivos (sensores ou atuadores) com diferentes características. Esses dispositivos são aplicáveis em ambientes severos como radioativos, corrosivos ou aeroespaciais, que requerem força de atuação grande, resistências e tensões elétricas de baixa operação. Esse tipo de aplicação é exemplificado por NAKATANI *et al.* (2003) ao apresentar o desenvolvimento de um *display* 3D criado por meio de atuadores de *SMA* pequenos.

SAVI *et al.* (2002b) avaliaram a dinâmica caótica em uma treliça de 2 barras com *SMA*. A pesquisa de SAVI *et al.* (2008) permitiu identificar que sistemas dinâmicos com *SMA* são influenciados pelo efeito de assimetria tração-compressiva.

A modelagem apropriada de dispositivos e componentes de *SMA* implica em desenvolvê-los adequadamente para respostas dinâmicas coerentes dos sistemas com *SMA*. Trabalhos propostos por PAIVA & SAVI (2006), JANI *et al.* (2014) e CISSE *et al.* (2015) descrevem modelos para capturarem os comportamentos termomecânicos dessas ligas.

No contexto de *SMA* aplicado a sistemas dinâmicos com contato radial, por exemplo, os rotores com elementos de *SMA* também têm sido utilizados para mitigar problemas vibracionais em razão das respostas dinâmicas complexas do contato (ALVES *et al.*, 2018; BORGES *et al.*, 2018, ENEMARK *et al.*, 2015, SILVA *et al.*, 2013), o que é especialmente importante para componentes mecânicos rotativos submetidos a contatos intermitentes entre si.

Visto o grande potencial dessas ligas em áreas distintas, é importante mencionar que a modelagem constitutiva e a caracterização termomecânica são ferramentas essenciais para o projeto de componentes constituídos de *SMA*. Por abordagem experimental, SAVI *et al.* (2016) descreveram os tipos de teste e de análise térmica para desenvolvimento das técnicas de caracterização termomecânica que determinam as temperaturas de transformação de fase que são essenciais para avaliação do comportamento histerético e de *SME* dessas ligas.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo é dedicado à formulação matemática de um sistema não-suave com suporte descontínuo. Na seção 3.1 é descrito o modelo do sistema dinâmico que consiste de um oscilador de 1 Grau de Liberdade (1-GdL). Na seção 3.2 é aplicada a formulação dinâmica por meio da abordagem *Newtoniana* de modo a avaliar o equilíbrio dinâmico de forças que atuam no sistema com mola helicoidal de *SMA* no suporte, considerando os modos de operação sem e com contato do sistema com o suporte e suas relações dinâmicas na transição entre os referidos modos de operação, para obter as equações que governam a dinâmica do sistema. Na seção 3.3 é apresentado o modelo constitutivo para aplicá-lo à mola helicoidal descrita na seção 3.4. Na seção 3.5 são obtidas as equações de movimento em sua forma final com suas variáveis de estado apresentadas na seção 3.6 e o procedimento numérico descrito na subseção 3.6.1 para obtenção dos resultados de simulação numérica deste trabalho.

#### 3.1 Sistema Dinâmico

Considere um sistema dinâmico descrito por um oscilador não suave de 1-GdL submetido a contato com suporte conforme a Figura 7. A excitação é proporcionada por um motor desbalanceado. O oscilador possui massa  $M$  e o motor proporciona uma excitação harmônica de frequência angular,  $\Omega$ , devida à massa desbalanceada,  $m$ , com um raio  $\rho$  em relação ao centro do rotor de raio  $R$ . O sistema possui um suporte com folga lateral,  $g$ . Note que o sistema possui 2 elementos elásticos de restituição lineares (de rigidezes  $k_1$  e  $k_2$ ), 1 elemento dissipativo linear de coeficiente de amortecimento viscoso,  $c$ , 1 mola helicoidal não linear de *SMA*, e 1 elemento dissipativo linear de coeficiente de amortecimento,  $c_s$ , conectado ao suporte.

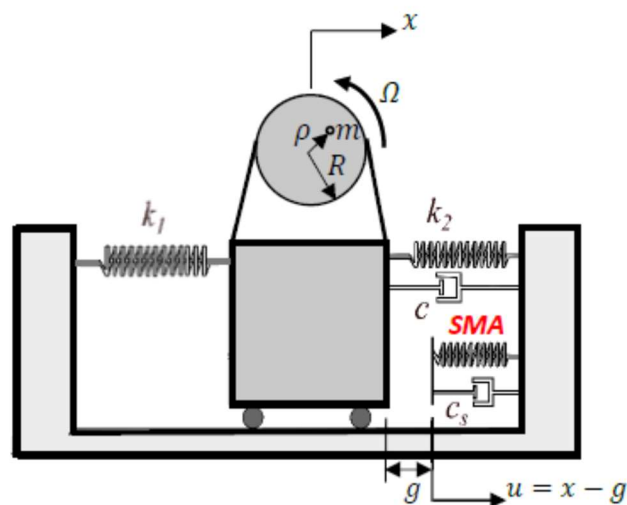


Figura 7 – Modelo de sistema não suave com suporte de *SMA*.

As relações cinemáticas para o deslocamento da mola helicoidal de SMA,  $u$ , em função da posição,  $x$ , do sistema, são relacionadas à seguinte condição de chaveamento:

$$u = \begin{cases} x - g & \text{se } x > g \\ 0 & \text{se } x \leq g \end{cases} \quad (1)$$

### 3.2 Formulação Dinâmica

A formulação dinâmica do sistema consiste em aplicar a abordagem *Newtoniana* para determinar as equações de movimento do sistema. A Figura 8 apresenta os Diagramas de Corpo Livre (DCL) relativos aos modos de operação sem contato e com contato lateral do sistema com o suporte. Despreza-se o atrito seco em ambos os DCL.

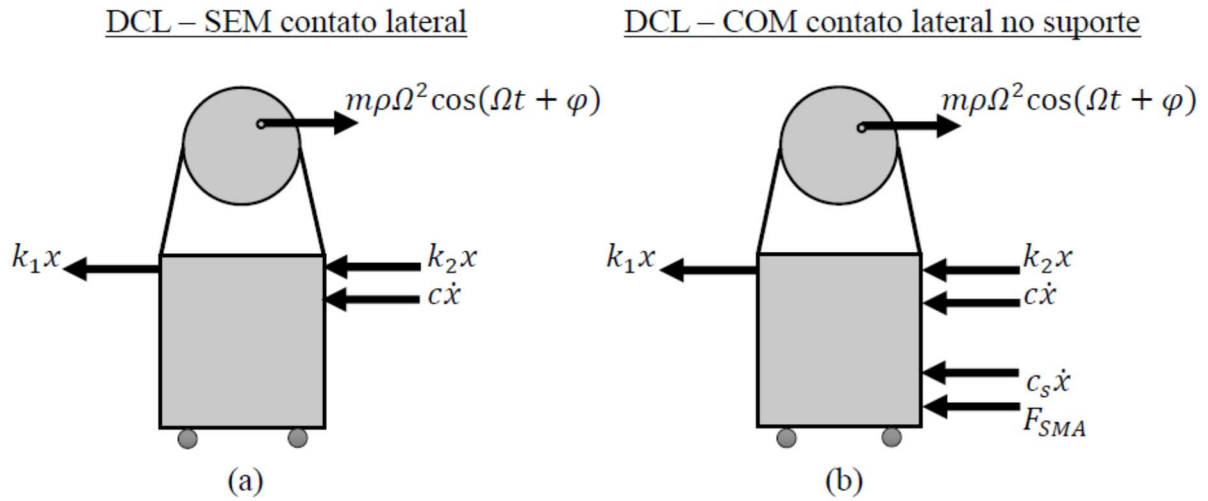


Figura 8 – DCL para os modos de operação (a) sem contato e (b) com contato.

A dinâmica do sistema é governada por equações não suaves, possuindo uma característica chaveada de acordo com os modos de operação sem contato e com contato:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0 & \text{sem contato } (x < g) \\ M\ddot{x} + (c + c_s)\dot{x} + (k_1 + k_2)x + F_{SMA} - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0 & \text{com contato } (x \geq g) \end{cases} \quad (2)$$

A não linearidade associada ao contato do sistema com o suporte corresponde à descontinuidade matemática na transição entre os 2 modos de operação representados pela seguinte expressão da força de contato,  $F_s$ , exercida pelo suporte (SAVI *et al.*, 2007):

$$\begin{cases} F_s = 0 & \text{sem contato } (x < g) \\ F_s = -(c_s\dot{x} + F_{SMA}) & \text{com contato } (x \geq g) \end{cases} \quad (3)$$



SAVI *et al.* (2007) enfatizaram que o suporte relaxa para o estado de equilíbrio quando está sem contato com o sistema dinâmico. Ao assumir as hipóteses de que o tempo entre 2 eventos de contato é muito superior ao tempo de relaxamento do suporte, e de que a massa do suporte é desprezível comparada à massa  $M$ , é razoável desconsiderar a dinâmica do suporte, o que implica que a Equação (2) representa a dinâmica do sistema.

A Equação (3a) indica que existe contato, sujeito a uma força de contato,  $F_s$ , entre o suporte descontínuo e o sistema dinâmico quando seu deslocamento,  $x$ , se tornar igual à folga lateral,  $g$ , isto é, para  $x = g$  (ou  $x - g = 0$ ). Entretanto, a força  $F_s$  é nula ao ser desfeito o contato, ou seja,  $F_s = -(c_s \dot{x} + F_{SMA}) = 0$ .

A complexidade inerente à descontinuidade matemática requer um chaveamento adequado para transição entre os 2 modos de operação. Um procedimento adequado de chaveamento consiste em aplicar as funções indicatrizes  $h_\alpha$  e  $h_\beta$  associadas a cada vetor de estados  $(x, v_x) = (x, \dot{x})$  do sistema (SAVI *et al.*, 2007).

### 3.3 Modelo Constitutivo

A modelagem constitutiva das *SMA*s é um tema de grande relevância. O modelo constitutivo escolhido para este trabalho foi o proposto por BRINSON (1993) que descreve os fenômenos físicos associados aos comportamentos termomecânicos das *SMA*s, capturando de forma coerente o efeito histerético. O modelo assume a cinética de transformação de fase descrita a partir de uma função conhecida, utilizando funções cossenoidais.

Considere que  $\varepsilon$  é a deformação axial,  $\beta$  é a fração volumétrica de martensita e  $T$  é a temperatura absoluta. Desta forma, a equação constitutiva é escrita da seguinte forma para o problema quasi-estático na forma de taxas:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\beta} - \theta\dot{T} \quad (4)$$

onde o ponto representa a derivada temporal,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\alpha$  é um parâmetro associado à transformação de fase, e  $\theta$  é associado ao coeficiente de expansão térmica.

O modelo separa a variável interna associada às variáveis da fração volumétrica de martensita,  $\beta$ , em suas parcelas induzidas por tensão (martensita não maclada,  $M^+$ ) e por temperatura (martensita maclada,  $M$ ), e desta forma (SAVI *et al.*, 2016):

$$\beta = \beta_S + \beta_T \quad (5)$$

Tendo em vista a não difusividade inerente à transformação martensítica, as parcelas  $\beta_S$  e  $\beta_T$  são assumidas como funções escalares de tensão e temperatura,  $\beta_{S,T} = \beta_{S,T}(\sigma, T)$ . Enquanto ocorre uma transformação de fase, considera-se que o módulo de elasticidade,  $E$ , varia de forma linear com  $\beta$ , sendo uma combinação linear também do módulo de elasticidade austenítico,  $E_A$ , com o módulo de elasticidade martensítico,  $E_M$  (SAVI *et al.*, 2016):

$$E = E_A + \beta(E_M - E_A) \quad (6)$$

A tensão crítica  $\sigma_S^{\text{CRIT}}$  corresponde ao início, enquanto  $\sigma_f^{\text{CRIT}}$  ao término, de transformações diretas de fase martensítica. A Figura 9 extraída de SAVI *et al.* (2016) apresenta as superfícies de transformação de fase que definem as tensões críticas em função da temperatura. Note que para  $T < M_S$  os níveis de tensão crítica não variam e para  $T > M_S$  ocorre um aumento linear da tensão crítica, cuja inclinação é dada pelo parâmetro  $C_M$  do material.

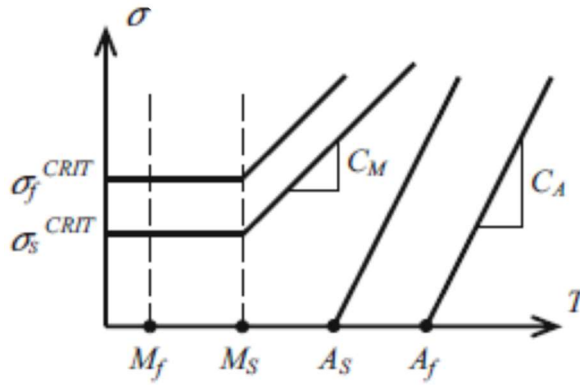


Figura 9 – Tensão de transformação de fase crítica em função da temperatura absoluta.  
Extraído de SAVI *et al.* (2016).

As equações de transformação de fase são cossenoidais para  $\beta_S$  e  $\beta_T$  e representam as leis de evolução do modelo constitutivo unidimensional apresentado (SAVI *et al.*, 2016).

A transformação martensítica direta ( $A \Rightarrow M$ ) ocorre nas seguintes situações:

Quando  $T > M_S$ , as equações cossenoidais para  $\beta_S$  e  $\beta_T$  são dadas por:

$$\beta_S = \frac{1 - \beta_{S0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_S^{\text{CRIT}} - \sigma_f^{\text{CRIT}}} [\sigma - \sigma_f^{\text{CRIT}} - C_M(T - M_S)] \right\} + \frac{1 + \beta_{S0}}{2} \quad (7)$$

$$\beta_T = \beta_{T0} - \frac{\beta_{T0}}{1 - \beta_{S0}} (\beta_S - \beta_{S0}) \quad (8)$$

As Equações (7) e (8) devem ser utilizadas na situação em que  $\sigma_s^{\text{CRIT}} + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{\text{CRIT}} + C_M(T - M_s)$ .

Enquanto  $T \leq M_s$ , as equações cossenoidais para  $\beta_s$  e  $\beta_T$  são dadas por:

$$\beta_s = \frac{1 - \beta_{s_0}}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{\sigma_s^{\text{CRIT}} - \sigma_f^{\text{CRIT}}} (\sigma - \sigma_f^{\text{CRIT}}) \right] + \frac{1 + \beta_{s_0}}{2} \quad (9)$$

$$\beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1 - \beta_{s_0}} (\beta_s - \beta_{s_0}) + \Delta_T \quad (10)$$

As Equações (9) e (10) devem ser utilizadas onde  $\sigma_s^{\text{CRIT}} < \sigma < \sigma_f^{\text{CRIT}}$ :

$$\Delta_T = \frac{1 - \beta_{T_0}}{2} \{ \cos[A_M(T - M_f)] + 1 \} \quad \text{se } M_f < T < M_s \text{ e } T < T_0 \quad (11)$$

$$\Delta_T = 0 \quad \text{outro}$$

Em que o parâmetro do material  $A_M$  é obtido por:

$$A_M = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (12)$$

A transformação martensítica inversa ( $M \rightleftharpoons A$ ) é dada por:

$$\beta_s = \frac{\beta_{s_0}}{2} \left\{ \cos \left[ A_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (13)$$

$$\beta_T = \frac{\beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[ A_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (14)$$

Para testes cíclicos descreverem de forma apropriada os subciclos decorrentes de transformações incompletas de fase, as variáveis internas  $\beta_{s_0}$  e  $\beta_{T_0}$  dizem respeito às frações volumétricas remanescentes de transformações ocorridas anteriormente.

As Equações (13) e (14) são usadas para  $T > A_s$  e  $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$ , onde, de acordo com a Figura 9 extraída de SAVI *et al.* (2016), o parâmetro  $C_A$  do material indica a elevação linear da tensão dada pela linha reta inclinada para as transformações inversas quando  $T > A_s$ , enquanto o parâmetro do material  $A_A$  é obtido pela Equação (15):

$$A_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad (15)$$

A Equação (4) após ser integrada pode ser descrita em sua forma discreta,

$$\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \alpha(\beta - \beta_0) - \theta(T - T_0) \quad (16)$$

onde as quantidades com subíndice 0 estão associadas às condições iniciais.

Como uma consideração extra, em relação à deformação residual máxima, ou seja,  $\varepsilon_r$ , a qual é definida como a deformação acumulada após ser carregada mecanicamente até a transformação de fase completa ser alcançada e, posteriormente, descarregada isotermicamente (SAVI *et al.*, 2016).

Com as condições iniciais  $\sigma_0 = \varepsilon_0 = \beta_0 = 0$  e as condições finais  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_r$ ,  $\beta = 1$  para  $T = T_0 < M_f$  substituídas na Equação (16), obtém-se a relação  $\alpha = -\varepsilon_r E$  (BRINSON, 1993).

Ao substituir a expressão de  $E$  da Equação (6) em  $E$  da relação  $\alpha = -\varepsilon_r E$ , obtém-se  $\alpha = -\varepsilon_r [E_A + \beta(E_M - E_A)]$ , onde percebe-se que  $\alpha$  é uma função linear implícita de  $\beta$ . A partir dessas considerações, a equação constitutiva unidimensional obtida na Equação (16) pode ser reescrita em sua forma final discreta como:

$$\sigma - \sigma_0 = E(\beta)\varepsilon - E(\beta_0)\varepsilon_0 + \alpha(\beta)\beta_s - \alpha(\beta_0)\beta_{s_0} - \theta(T - T_0) \quad (17)$$

Na seção que se segue, esse modelo constitutivo é aplicado para descrever o comportamento termomecânico de uma mola helicoidal de SMA.

### 3.4 Mola Helicoidal

AGUIAR (2011) e SHIGLEY (2011) destacaram que molas são componentes de máquinas amplamente aplicados em diversos sistemas mecânicos, pois conseguem restituir consideráveis deslocamentos, armazenar energia mecânica (principalmente de natureza potencial elástica), possibilitando o controle de emprego de forças, e, conseqüentemente, de torques, o que implica na capacidade de recuperarem elevada energia de deformação, resultante de esforços nelas aplicados.

Considere uma mola helicoidal de fio de seção circular submetida a uma força axial  $F$  e apresentando um deslocamento  $u$ , conforme mostrada na Figura 10 (a). A mola possui como características essenciais o diâmetro  $D$  (diâmetro médio de cada espira), o diâmetro do fio,  $d$ , e o número de espiras ativas,  $N$ . SHIGLEY (2011) afirmou que a deflexão de molas helicoidais submetidas a  $F$  é composta de componentes torcional e de cisalhamento. Ao supor que a mola seja seccionada em um ponto, decorre que essa remoção e seu efeito sejam substituídos por reações internas equivalentes, o que resultam em uma força de cisalhamento direta,  $F$ , devido à compressão, e um torque  $T$ , tal que  $T = (1/2)FD$ .

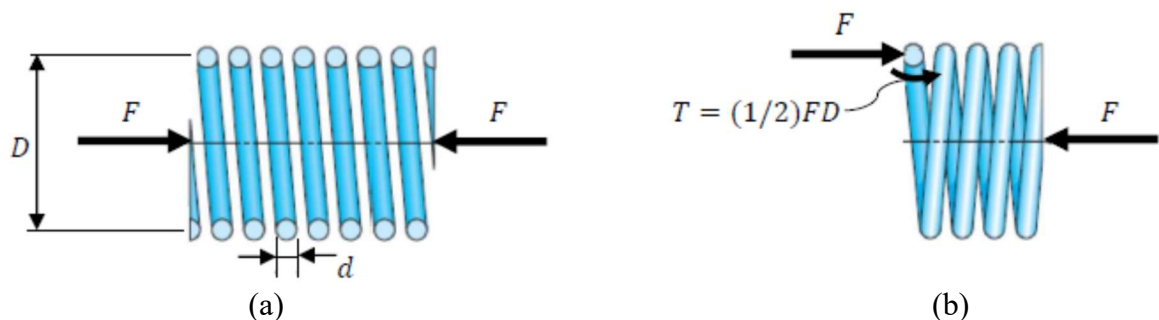


Figura 10 – Mola helicoidal (a) submetida a esforço compressivo uniaxial e (b) DCL da mola. Extraído de SHIGLEY (2011) e adaptado.

SHIGLEY (2011) afirmou que a hipótese de distribuição uniforme de tensão é feita frequentemente em projeto. Como resultado disso, pode-se considerar exclusivamente a compressão pura ou o cisalhamento puro. Analogamente, a torção pura (ou simples) diz respeito à hipótese de efeito exclusivo de torção.

Das condições de equilíbrio da mola, por meio do DCL da Figura 10 (b), é possível estabelecer a seguinte equação da força de restituição,  $F = F_{SMA}$ , da mola de SMA em função de sua tensão de cisalhamento,  $\tau$ :

$$F_{SMA} = \frac{4\pi}{D} \int_0^{r_{fio}} \tau r^2 dr \quad (18)$$

Em que  $r$  refere-se à coordenada radial para toda área de seção transversal do fio de mola, e  $r_{fio} = \frac{d}{2}$  é o raio do fio. Para usar a equação constitutiva para uma SMA, expressa na forma de taxas, deve-se reescrever a Equação (18) na forma de taxas como se segue,

$$\dot{F}_{SMA} = \frac{4\pi}{D} \int_0^{r_{fio}} \dot{\tau} r^2 dr \quad (19)$$

Assumindo a hipótese clássica de que uma seção plana permanece plana após a deformação, o que implica em uma distribuição linear das deformações cisalhantes,  $\gamma$ , escreve-se que:

$$\gamma = \frac{r}{r_{fio}} \gamma_{\text{máx}} \quad (20)$$

Percebe-se a partir da Equação (20) que  $\gamma = 0$  quando  $r = 0$  (ponto central), enquanto a deformação cisalhante máxima do fio de mola,  $\gamma_{\text{máx}}$ , ocorre para  $r = r_{fio}$  (região superficial do fio). Em termos do deslocamento longitudinal,  $u$ , da mola, a sua deformação cisalhante máxima,  $\gamma_{\text{máx}}$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{2r_{fio}}{\pi ND^2} u \quad (21)$$

Substituindo (21) em (20), obtém-se:

$$\gamma = \frac{2r}{\pi ND^2} u \quad (22)$$

A hipótese assumida de que  $\gamma$  varia de modo linear em toda área de seção transversal do fio de mola é razoavelmente aplicável a molas helicoidais de materiais que operam no regime elástico (AGUIAR, 2011), possibilitando  $\tau$  variar linearmente conforme indica Figura 11.

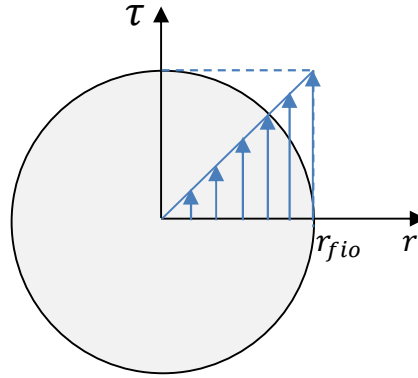


Figura 11 – Variação linear de  $\tau$  na seção transversal do fio de mola helicoidal.

Uma vez que os comportamentos termomecânicos das *SMA*s são qualitativamente semelhantes considerando tensões normais ou cisalhantes, e assumindo condições isotérmicas ( $\dot{T} = 0$ ), a equação constitutiva (4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{\tau} = G\dot{\gamma} - \alpha\dot{\beta} \quad (23)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento.

Substituindo (23) em (19), resulta a seguinte equação da força de restituição exercida pela mola de *SMA*,  $\dot{F}_{SMA}$ , na forma integral:

$$\dot{F}_{SMA} = \frac{4\pi}{D} \int_0^{r_{fio}} (G\dot{\gamma} - \alpha\dot{\beta}) r^2 dr \quad (24)$$

Ao substituir (22) em (24), e assumindo que a transformação de fase ocorre de forma homogênea na seção transversal, obtém-se a relação força-deslocamento para uma mola de *SMA* na forma de taxas,

$$\dot{F}_{SMA} = \frac{Gd^4}{8ND^3} \dot{u} + \frac{\pi d^3}{6D} \alpha \dot{\beta} \quad (25)$$

### 3.5 Equações de Movimento

As equações que governam a dinâmica do modelo de sistema não suave com suporte descontínuo apresentado na seção 3.1 podem ser reescritas a seguir para cada um dos modos de operação do sistema, conhecida a expressão da força de restituição não linear,  $\dot{F}_{SMA}$ , exercida pela mola helicoidal de *SMA*, na forma de taxas, obtida na Equação (25).

Para o modo de operação sem contato lateral ( $x < g$ ),

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0 \quad (26)$$

Para o modo de operação com contato lateral ( $x \geq g$ ),

$$\begin{cases} M\ddot{x} + (c + c_s)\dot{x} + (k_1 + k_2)x + F_{SMA} - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0 \\ \dot{F}_{SMA} = \frac{Gd^4}{8ND^3}\dot{u} + \frac{\pi d^3}{6D}\alpha\dot{\beta} \\ \beta = \beta(\tau, T) \end{cases} \quad (27)$$

### 3.6 Variáveis de Estado

Para cada um dos 2 modos de operação, cada uma das equações de movimento (26) e (27) corresponde a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 2ª ordem na variável  $x$ . Cada EDO pode ser reescrita em um sistema de EDO de 1ª ordem em  $x$ , o que resulta em 4 EDOs de 1ª ordem, das quais 2 por modo de operação.

Isolando  $\ddot{x}$  das Equações (26) e (27), resultam as seguintes equações de estado para o sistema dinâmico submetido às seguintes condições de operação:

Para o modo de operação sem contato lateral ( $x < g$ ),

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{1}{M}[-c\dot{x} - (k_1 + k_2)x + m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi)] \end{cases} \quad (28)$$



Para o modo de operação com contato lateral ( $x \geq g$ ),

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{1}{M} [-(c + c_s)\dot{x} - (k_1 + k_2)x - F_{SMA} + m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi)] \\ \dot{F}_{SMA} = \frac{Gd^4}{8ND^3}\dot{u} + \frac{\pi d^3}{6D}\alpha\dot{\beta} \\ \beta = \beta(\tau, T) \end{cases} \quad (29)$$

Em que  $u$  é obtido por método numérico, descrito na próxima seção, associado à função indicatriz,  $h_\alpha$ , para atender as relações cinemáticas impostas na Equação (1).

### 3.6.1 Procedimento Numérico

As equações de movimento são resolvidas a partir da técnica de partição do operador associado a um processo iterativo. Desta forma, o problema é dividido em 2 partes: dinâmica e constitutiva. A parte dinâmica considera o método de *Runge-Kutta* de 4ª ordem (*RK4*), assumindo  $F_{SMA}$  conhecido. Depois, os deslocamentos servem de entrada para a parte constitutiva que utiliza as leis de evolução de transformação de fase. Um teste de convergência é feito comparando os valores de  $F_{SMA}$  e/ou  $\beta$ .

Considerando um Problema de Valor Inicial (PVI) como segue:

$$\dot{X} = f(X, t), X(t_0) = X_0 \quad (30)$$

E fazendo uma discretização no tempo,  $t$ , em um conjunto de pontos ( $t_n$ ), que são separados por um intervalo,  $\Delta t$ , de tempo, de tal forma que  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . O método *RK4* considera erros associados a 4ª potência do passo de integração, sendo empregado conforme mostrado a seguir:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (31)$$

Onde:

$$k_1 = f(X_n, t_n) \quad (32)$$

$$k_2 = f\left(X_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (33)$$

$$k_3 = f\left(X_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (34)$$

$$k_4 = f(X_n + k_3, t_n + \Delta t) \quad (35)$$

SAVI *et al.* (2007) enfatizaram que a abordagem de FILIPPOV (1968) possibilita abordar sistemas não suaves aplicando um sistema suavizado. Trata-se de um procedimento adequado de chaveamento de transição entre os modos de operação sem e com contato lateral, para modelar matematicamente e simular numericamente com eficiência o comportamento de um sistema com suporte descontínuo e não suave.

As funções indicatrizes  $h_\alpha$  e  $h_\beta$  mencionadas na seção 3.2 para chaveamento entre os modos de operação sem e com contato do sistema dinâmico com o suporte, baseado no modelo de suporte descontínuo apresentado por SAVI *et al.* (2007), foram implementadas numericamente para estabelecer aos resultados apresentados no capítulo 4 a comparação do caso elástico com o caso contendo *SMA* na mola helicoidal. Para isso as seguintes equações foram utilizadas:

3.6.1.1) Para contato do sistema com o suporte no caso elástico, em que  $k_s$  é a rigidez do suporte elástico (sem *SMA*),

$$\begin{cases} h_\alpha(x, v_x) = h_\alpha(x, \dot{x}) = u = x - g \\ h_\beta(x, v_x) = h_\beta(x, \dot{x}) = -c_s \dot{x} - k_s u = -c_s \dot{x} - k_s (x - g) \end{cases} \quad (36)$$

3.6.1.2) Para contato do sistema com o suporte submetido à transformação de fase na mola helicoidal de *SMA* quando comprimida,

$$\begin{cases} h_\alpha(x, v_x) = h_\alpha(x, \dot{x}) = u = x - g \\ h_\beta(x, v_x) = h_\beta(x, \dot{x}) = -c_s \dot{x} - F_{SMA} \end{cases} \quad (37)$$

E as condições baseadas no referido chaveamento apresentado por SAVI *et al.* (2007) e implementadas numericamente são as seguintes:

3.6.1.3) Se  $h_\alpha \leq 0$  ou  $h_\beta \geq 0$ , não ocorre contato do sistema com o suporte; e

3.6.1.4) Se  $h_\alpha > 0$  ou  $h_\beta < 0$ , ocorre contato do sistema com o suporte.

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta resultados de simulações numéricas estabelecendo a comparação entre os sistemas com suporte de mola helicoidal linear (caso elástico) e o suporte com mola helicoidal não linear de *SMA* (comportamento pseudoelástico). A Tabela 1 apresenta os parâmetros do sistema. A massa  $M$  foi adotada da massa do rotor de SILVA *et al.* (2013). As molas do oscilador são lineares de rigidezes constantes,  $k_1$  e  $k_2$ , cujos valores são baseados nos valores utilizados por SILVA *et al.* (2013), enquanto os valores das constantes de amortecimentos viscosos  $c$  e  $c_s$  baseiam-se no trabalho de SANTOS & SAVI (2009).

Considera-se um rotor cilíndrico maciço de alumínio puro com comprimento de 0,36 m e densidade de 2700 kg/m<sup>3</sup> (INMAN, 2018), o que corresponde a um rotor de raio  $R = 0,07$  m. Com isso, adota-se  $\rho = 0,055$  m (SILVA *et al.*, 2013) para o raio da massa desbalanceada do rotor. Baseando-se nos parâmetros geométricos ( $D$ ,  $d$  e  $N$ ) de uma mola equivalente relacionada ao elemento de *SMA* utilizado por SILVA *et al.* (2013), especifica-se uma mola helicoidal contendo  $N = 4$  espiras ativas; com diâmetro do fio  $d = 0,001$  m; e diâmetro médio  $D = 0,016024$  m. Desta forma, tem-se uma rigidez  $k_s = 508,8$  N/m na fase austenítica (SILVA, 2011) correspondente à rigidez do suporte no caso elástico (sem *SMA*).

A Tabela 2 contém as propriedades das *SMA*s segundo o modelo constitutivo unidimensional de BRINSON (1993) com módulos de elasticidade ao cisalhamento autêntico  $G_A = 67$  GPa e martensítico  $G_M = 26,3$  GPa; deformação cisalhante residual  $\gamma_r = 0,067$ ; e tensões de cisalhamento críticas associadas ao início  $\tau_s^{\text{CRIT}} = 100$  MPa e término  $\tau_f^{\text{CRIT}} = 170$  MPa de transformações diretas de fase martensítica.

Despreza-se o desvio geométrico e a excentricidade de centro de giro do rotor.

Tabela 1 – Parâmetros mecânicos e geométricos do sistema.

$M$ (kg)	$k_1$ (N/m)	$k_2$ (N/m)	$k_s$ (N/m)	$c$ (Ns/m)	$c_s$ (Ns/m)
15	1,96	1,96	508,8	0,3	0,95
$d$ (m)	$D$ (m)	$N$	$R$ (m)	$\rho$ (m)	$g$ (m)
0,001	0,016024	4	0,07	0,055	0,002

Tabela 2 – Propriedades das *SMA*s segundo modelo constitutivo de BRINSON (1993).

$G_A$ (GPa)	$G_M$ (GPa)	$\gamma_r$	$\theta$ (MPa/K)	$\tau_s^{\text{CRIT}}$ (MPa)	$\tau_f^{\text{CRIT}}$ (MPa)
67	26,3	0,067	0,55	100	170
$C_A$ (MPa/K)	$C_M$ (MPa/K)	$M_s$ (K)	$M_f$ (K)	$A_s$ (K)	$A_f$ (K)
13,8	8	291,4	282,0	307,5	322,0

## 4.1 Vibrações livres

Esta seção compara os resultados do sistema submetido à vibração livre, avaliando as transformações de fase da mola helicoidal ligada ao suporte para avaliar o efeito dissipativo de energia por ciclo de histerese. Desta forma, anula-se a massa desbalanceada ( $m = 0$ ), eliminando-se o forçamento externo (SILVA, 2011 e SILVA *et al.*, 2013). O movimento é estabelecido por meio de uma condição inicial, representada por uma posição inicial,  $x_0$ , não nula e velocidade inicial nula ( $v_{0x} = \dot{x}_0 = 0$ ).

A Figura 12 mostra simulações para  $x_0 = 0,001$  m e  $T = 343$  K, onde não ocorre transformação de fase ( $\beta = 0$ ) na mola de SMA porque não há contato do sistema com o suporte. Note que a posição inicial do sistema é inferior à folga,  $g$ , entre  $M$  e o suporte, e, portanto,  $F_{SMA} = 0$ . A diminuição de amplitude vibracional do sistema ocorre devido à ação do dissipador linear.

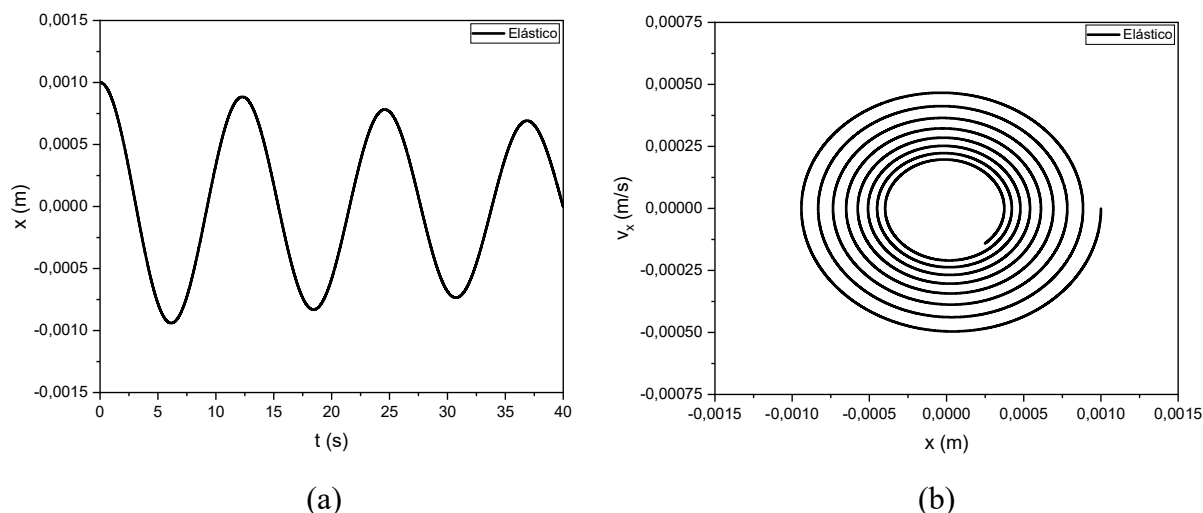


Figura 12 – Vibração livre do sistema sem contato para  $x_0 = 0,001$  m.

Para investigar o contato do sistema com o suporte (SILVA *et al.*, 2013), avalia-se a posição inicial,  $x_0$ , superior à folga  $g = 0,002$  m. Com isso, as órbitas dos espaços de fase mostram claramente as situações sem contato e com contato, com um achatamento. A Figura 13 mostra os resultados para  $x_0 = 0,004$  m e  $T = 343$  K onde não houve transformação de fase ( $\beta = 0$ ) na mola de SMA, conforme Figura 13 (a), embora tenha ocorrido contato do sistema com o suporte, conforme Figura 13 (b), o que indica que a mola de SMA respondeu elasticamente. A Figura 13 (c) indica a redução de amplitude de vibração que ocorre devido à ação do dissipador linear. A Figura 13 (d) mostra o espaço de fase, claramente dividido em 2

partes que representam as respostas sem e com contato. Note também que o deslocamento vibracional máximo é superior ao caso sem contato.

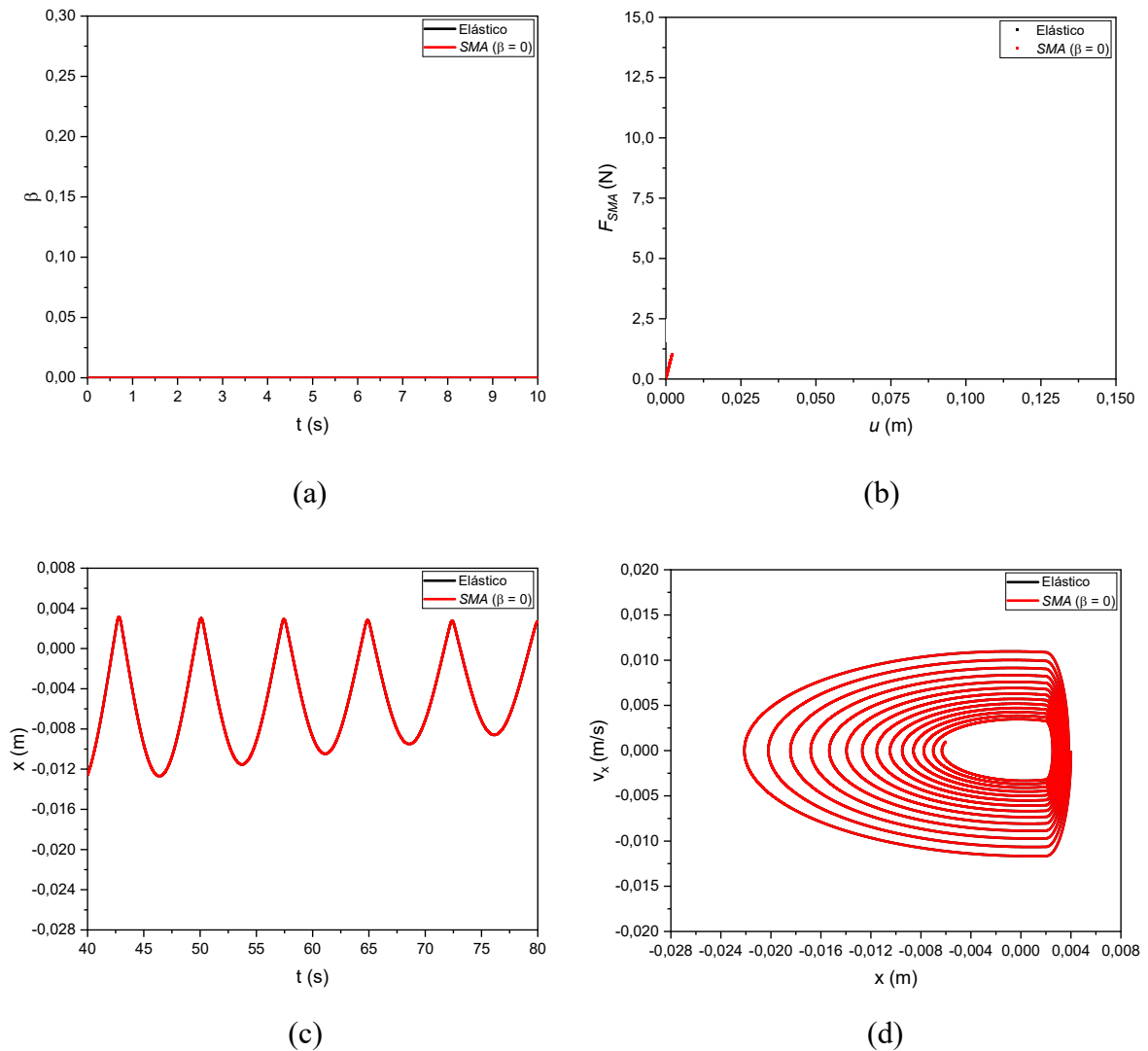
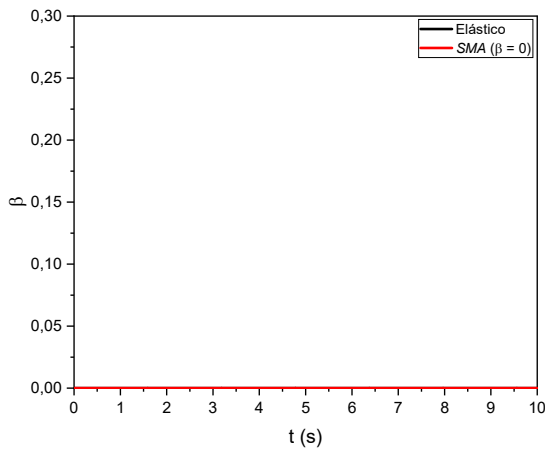
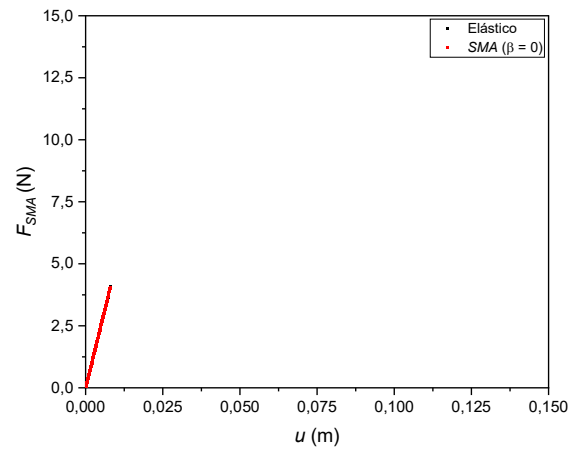


Figura 13 – Vibração livre do sistema com contato para  $x_0 = 0,004$  m.

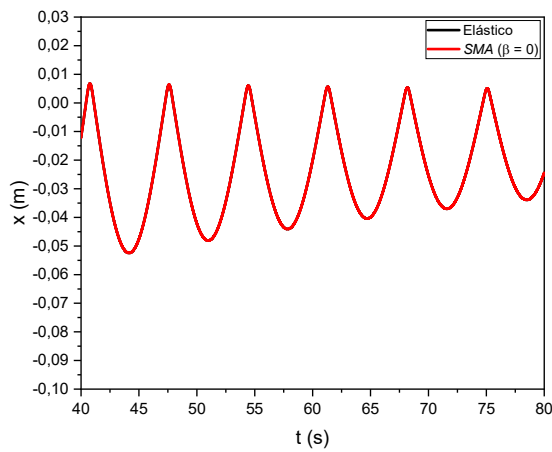
Aumentando a condição inicial, para  $x_0 = 0,01$  m e a  $T = 343$  K o contato do sistema com o suporte é mais intenso que nos resultados anteriores (Figura 14). Contudo, essa condição não induz transformação de fase na mola de SMA conforme indicado na Figura 14 (a). Tendo em vista o nível de energia maior introduzido pela condição inicial, percebe-se um aumento do deslocamento máximo do sistema conforme sinal de deslocamento vibracional com o tempo da Figura 14 (c) e espaço de fase da Figura 14 (d) em relação aos resultados anteriores.



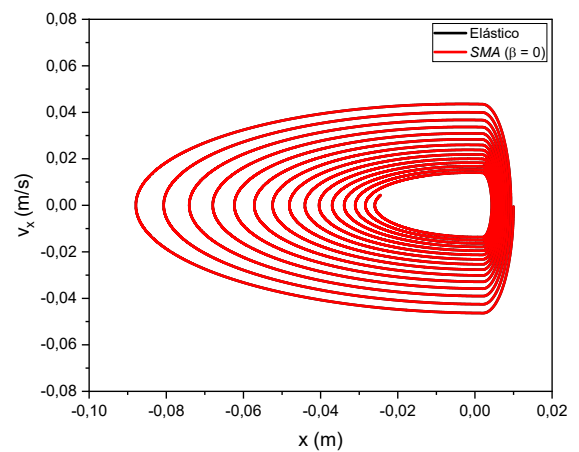
(a)



(b)



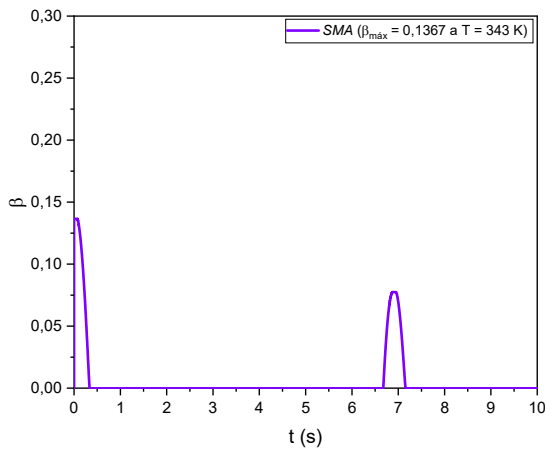
(c)



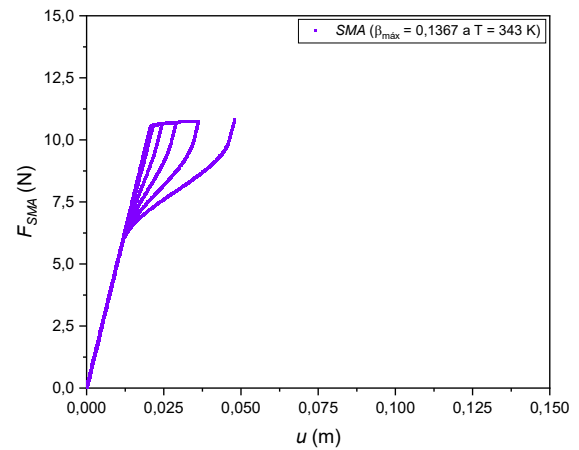
(d)

Figura 14 – Vibração livre do sistema com contato para  $x_0 = 0,01$  m.

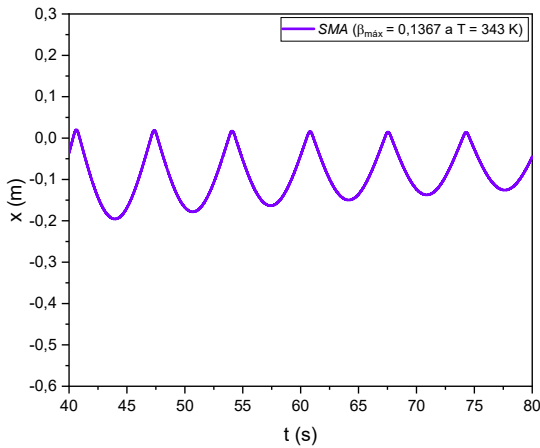
Considere agora uma condição inicial que provoca a transformação de fase na mola do suporte, assumindo que  $x_0 = 0,05$  m e  $T = 343$  K. Nessas condições, o suporte passa a apresentar transformações de fase, proporcionando uma dissipação de energia adicional ao sistema, induzido pelo comportamento histerético, conforme Figura 15.



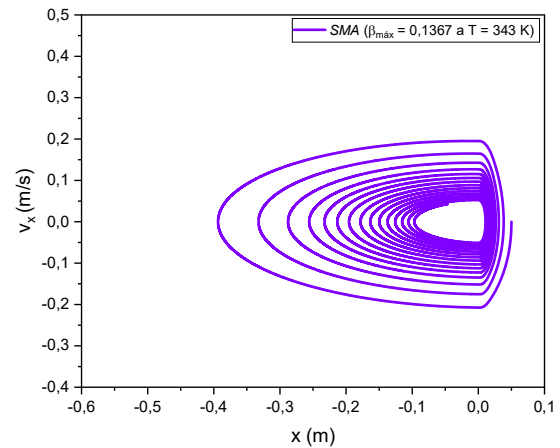
(a)



(b)



(c)

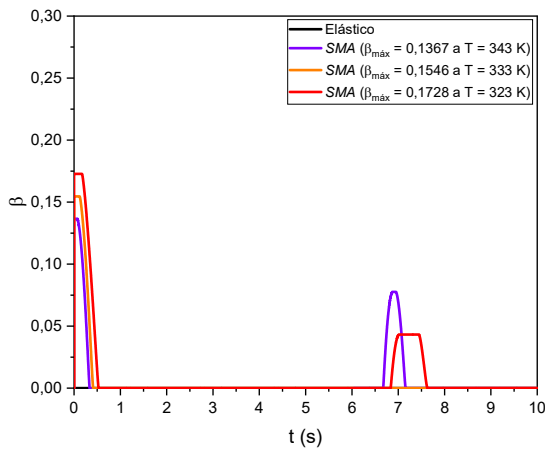


(d)

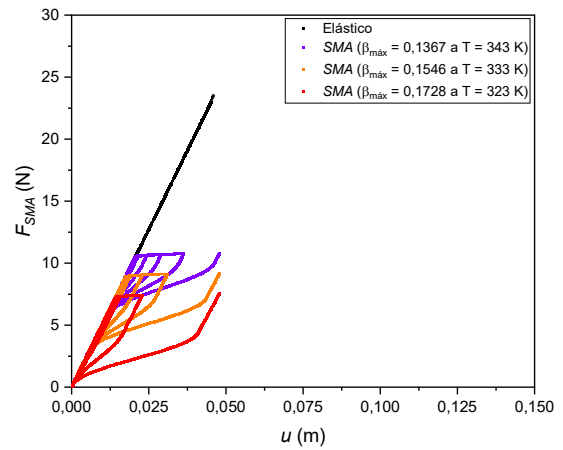
Figura 15 – Vibração livre do sistema com contato para  $x_0 = 0,05$  m que induz transformações de fase no suporte.

A adaptabilidade do sistema pode ser verificada considerando diferentes temperaturas do suporte. Para isso, considere 3 casos: 343 K, 333 K e 323 K. A Figura 16 mostra os resultados das simulações comparados com um suporte elástico. Note que, na medida em que se diminui de 10 K as temperaturas, os laços de histerese são deslocados para baixo, aumentando a energia dissipada. A Figura 16 (a) mostra as frações volumétricas de martensita, com valores máximos de 0,1367 a 343 K; 0,1546 a 333 K; e 0,1728 a 323 K. O aumento da transformação de fase pode ser verificado nas curvas força-deslocamento da Figura 16 (b). O efeito da dissipação na dinâmica do sistema pode ser verificado no sinal de deslocamento vibracional com o tempo, Figura 16 (c), e no espaço de fase, Figura 16 (d).

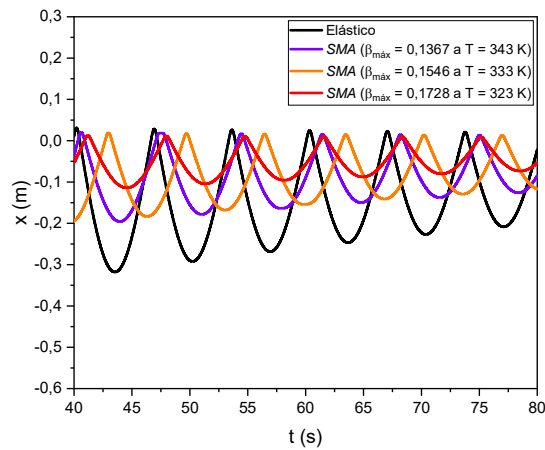




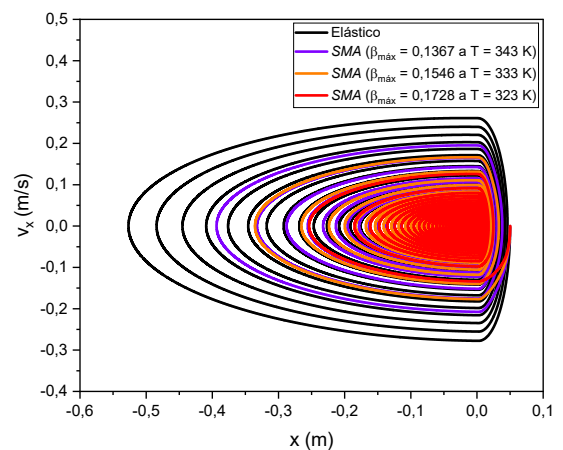
(a)



(b)



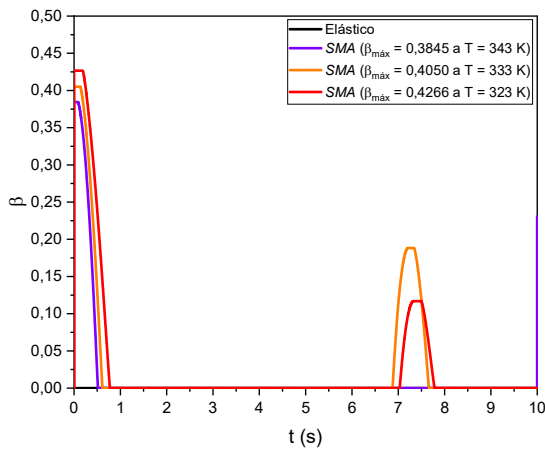
(c)



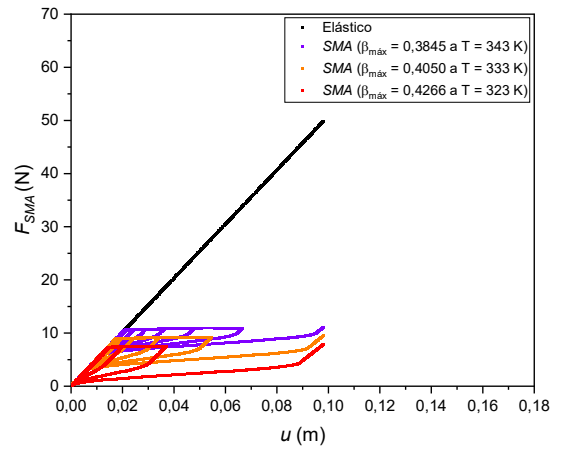
(d)

Figura 16 – Vibração livre do sistema com contato para  $x_0 = 0,05$  m e diferentes temperaturas.

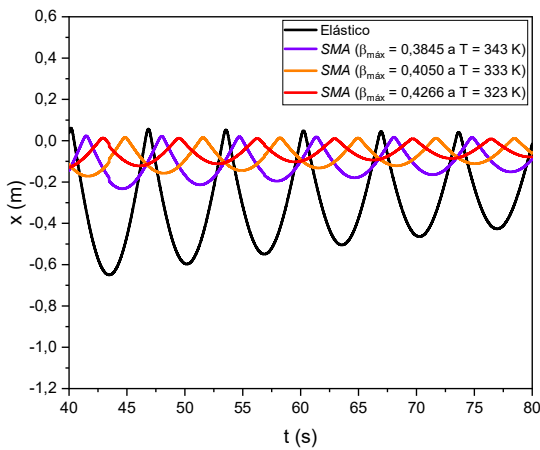
O aumento ainda maior da condição inicial, no caso para  $x_0 = 0,10$  m, provoca situações ainda mais acentuadas desse comportamento, como pode ser verificado na Figura 17. Observe que agora, os valores máximos das frações volumétricas  $\beta$  são 0,3845 a 343 K; 0,4050 a 333 K; e 0,4260 a 323 K.



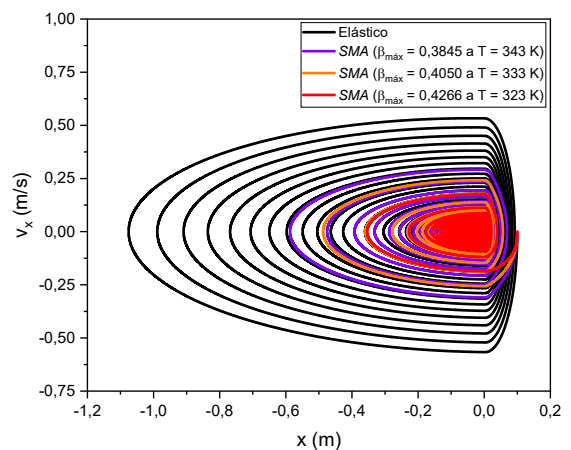
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 17 – Vibração livre do sistema com contato para  $x_0 = 0,10$  m.

Cabe destacar que os laços de histerese são abertos devido às condições iniciais em deslocamento. Isso ocorre pois, em cada ciclo de histerese, dissipa-se energia e o sistema não retorna ao ponto inicial.

## 4.2 Vibrações Forçadas

Esta seção considera os resultados do sistema excitado harmonicamente a partir de uma massa,  $m$ , desbalanceada do rotor do sistema. Os próximos resultados consideram uma frequência angular de forçamento externo de 24,5 rad/s.

A Figura 18 indica que para massa desbalanceada  $m = 0,0015$  kg e temperatura  $T = 343$  K não ocorre contato da massa  $M$  com o suporte, o que não aciona a mola helicoidal de SMA. Esse caso é um típico comportamento elástico com movimento harmônico.

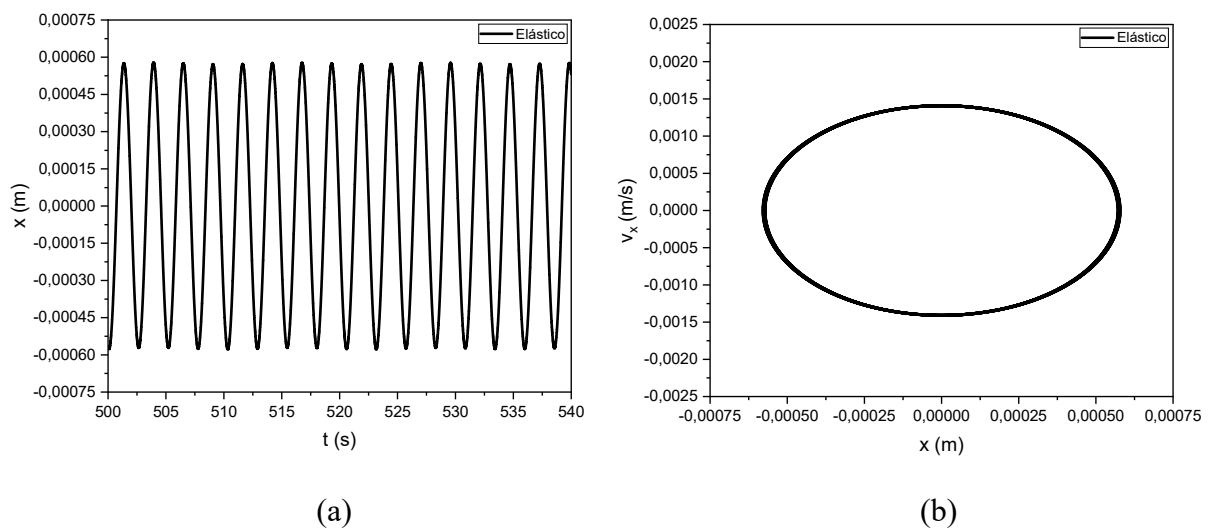
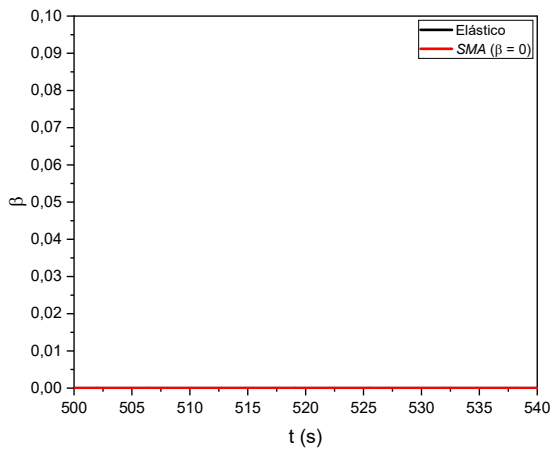
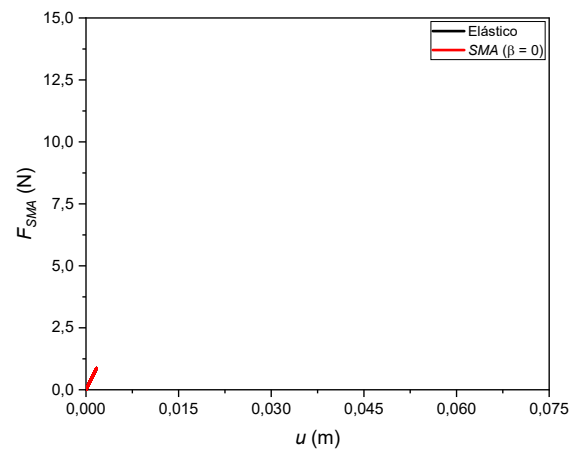


Figura 18 – Vibração forçada do sistema sem contato para  $m = 0,0015$  kg.

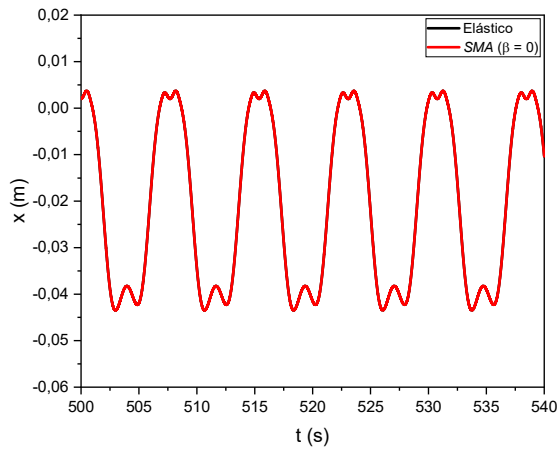
A partir de agora passa-se a aumentar o desbalanceamento do sistema, considerando valores maiores da massa desbalanceada  $m$ . Para  $m = 0,015$  kg e  $T = 343$  K, a resposta do sistema indica uma resposta elástica da mola do suporte, sem transformação de fase, Figura 19. A Figura 19 (a) mostra que  $\beta = 0$ , enquanto a Figura 19 (b) mostra uma resposta elástica. O deslocamento em função do tempo, Figura 19 (c), e o espaço de estado, Figura 19 (d), indicam o efeito do contato na dinâmica do sistema mostrando um comportamento mais complexo que o caso harmônico anterior.



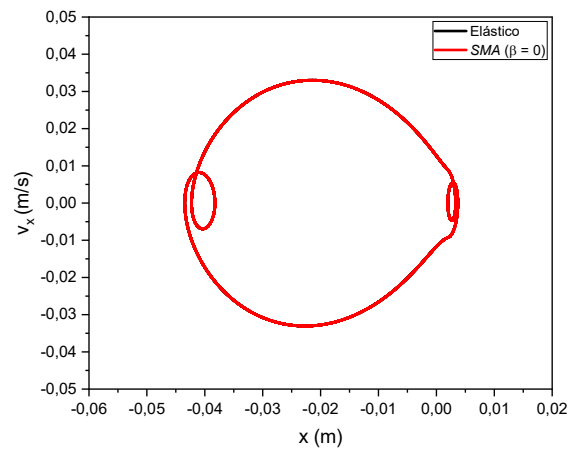
(a)



(b)



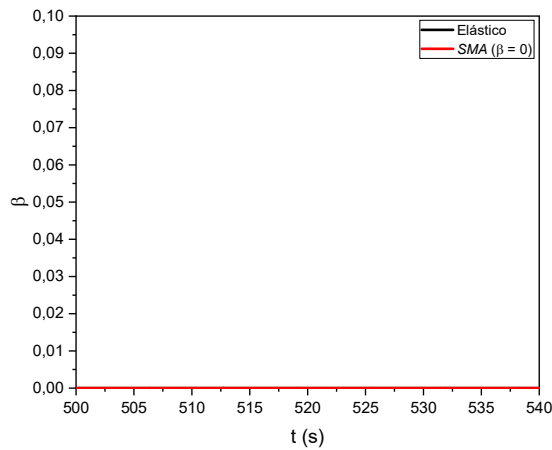
(c)



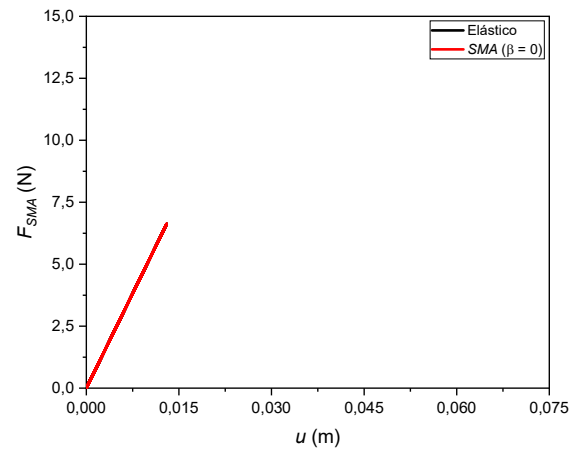
(d)

Figura 19 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,015$  kg.

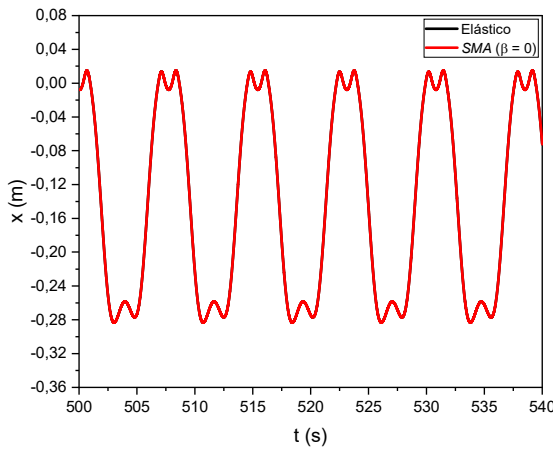
Aumentando para  $m = 0,085$  kg e a  $T = 343$  K, verifica-se um contato mais intenso do sistema com o suporte. Contudo, essa compressão maior sofrida pela mola não foi suficiente para induzir transformação de fase nela conforme  $\beta = 0$  indicado na Figura 20 (a).



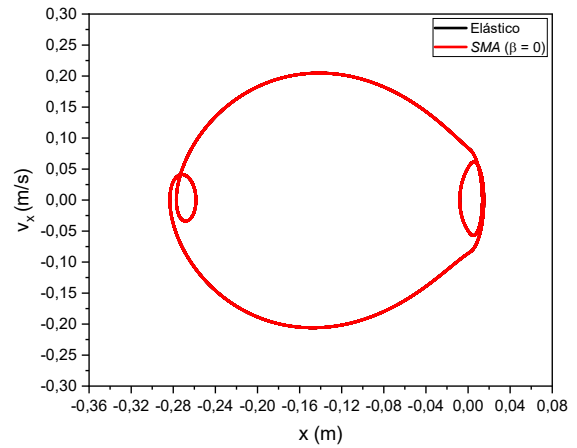
(a)



(b)



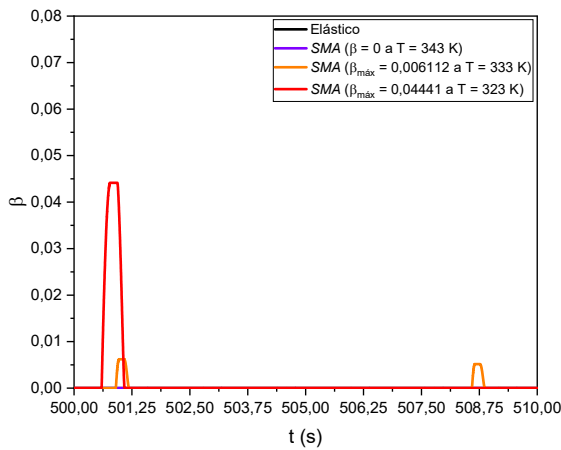
(c)



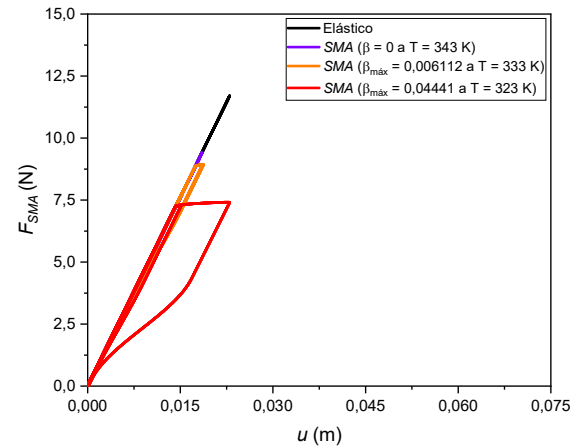
(d)

Figura 20 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,085$  kg.

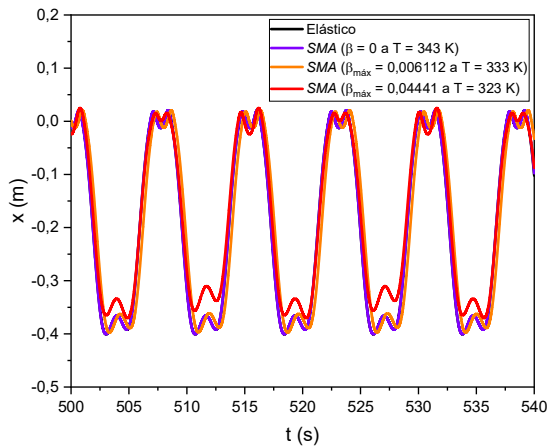
Para  $m = 0,120$  kg e  $T = 343$  K os resultados da Figura 21 mostram que o contato do sistema com o suporte não induz transformação de fase na mola de *SMA* ( $\beta = 0$ ), o que acarreta uma resposta linear da mola. Por isso, os resultados com *SMA* a 343 K coincidem com os do caso elástico. Uma diminuição gradativa da temperatura para 333 K e 323 K acarreta um aumento das transformações de fase. Note que, para  $T = 333$  K é induzida transformação de fase com valor máximo de 0,006112 e um laço de histerese pequeno; para  $T = 323$  K, a transformação de fase aumenta ainda mais com uma fração volumétrica máxima de 0,04441, acompanhado de aumento do tamanho do laço de histerese.



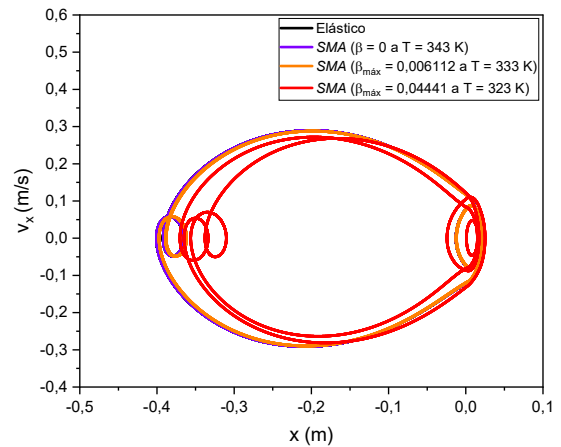
(a)



(b)



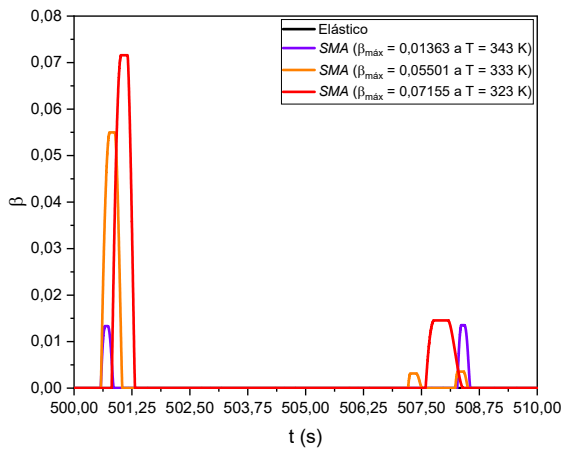
(c)



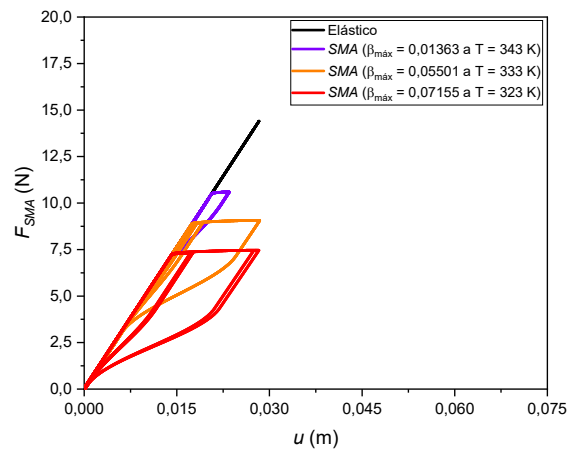
(d)

Figura 21 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,120$  kg.

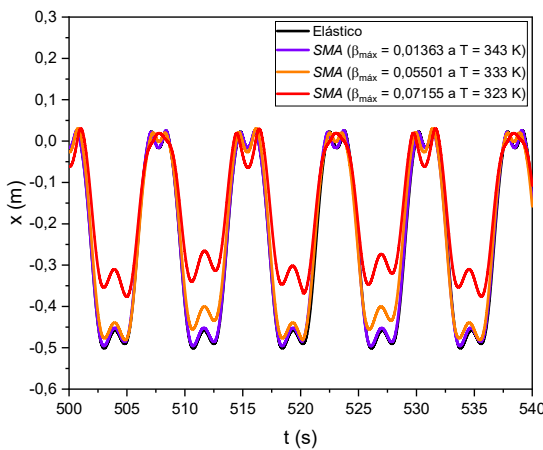
A Figura 22 (a) mostra que para  $m = 0,150$  kg o contato do sistema com o suporte contendo mola de SMA induz transformações de fase, cujos valores máximos dos indicadores são maiores que os da Figura 21 (a) para 323 K, 333 K e 343 K. A Figura 22 (b) indica, então, laços de histerese maiores que os apresentados na Figura 21 (b). Conseqüentemente, as amplitudes de vibração do sistema relativas ao caso elástico para  $m = 0,150$  kg diminuiram mais do que para  $m = 0,120$  kg, ao comparar o deslocamento vibracional da Figura 22 (c) e o espaço de estado da Figura 22 (d) com o sinal vibracional de deslocamento da Figura 21 (c) e o espaço de fase da Figura 21 (d).



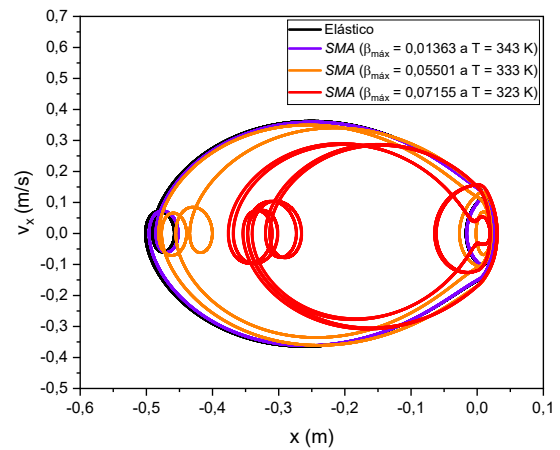
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 22 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,150$  kg.

Um contato maior da massa  $M$  com o suporte ocorre quando obtidos os resultados ao aumentar a massa desbalanceada do rotor para  $m = 0,185$  kg conforme a Figura 23. Isso equivale a afirmar que a mola helicoidal de SMA foi mais comprimida que nos resultados anteriores, levando a aumentar, conforme Figura 23 (a), o valor máximo de  $\beta$  para 0,07393 a 343 K. Ao diminuir para 333 K o valor máximo de  $\beta$  é elevado para 0,07896, e reduzindo para 323 K o máximo de  $\beta$  aumenta para 0,1860. Associado ao aumento de  $\beta$ , a Figura 23 (b) indica elevação do tamanho do laço de histerese ao ser diminuída a temperatura.

Visto que a mola mais comprimida induz aumento de  $\beta$  e do tamanho do ciclo de histerese com a redução de temperatura de um ciclo para outro, isso implica em diminuição da amplitude vibracional do sistema conforme sinal de deslocamento temporal da Figura 23 (c) e espaço de fase da Figura 23 (d).

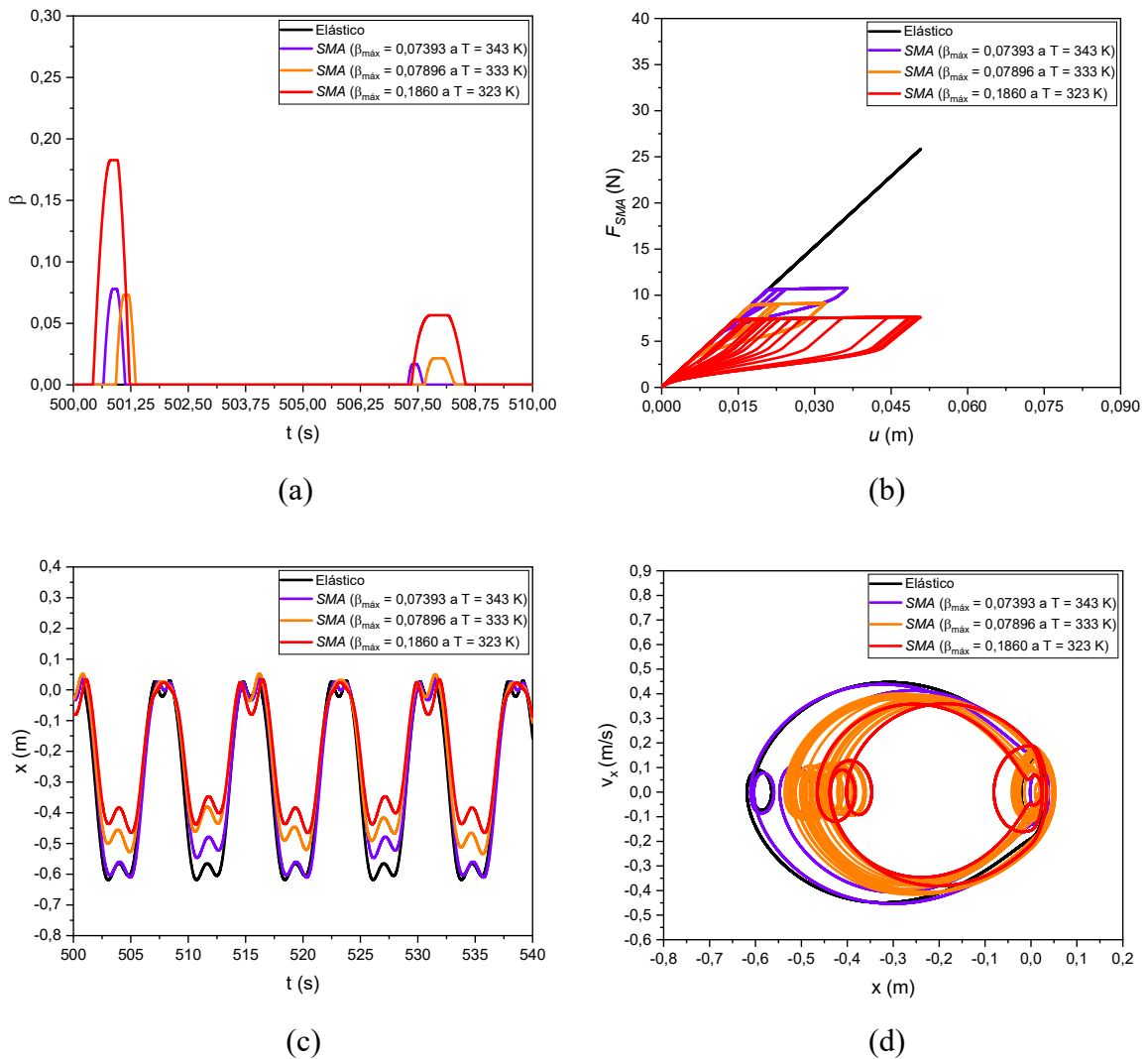
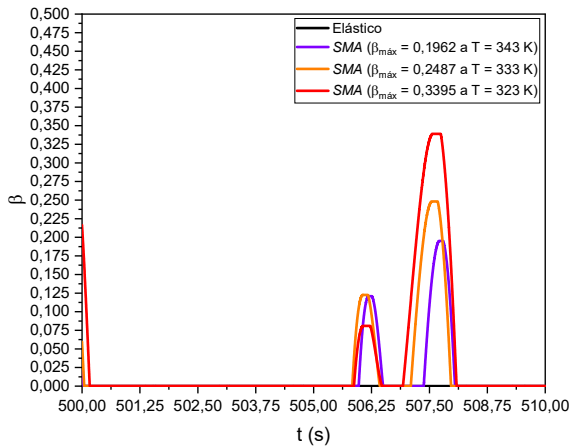


Figura 23 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,185$  kg.

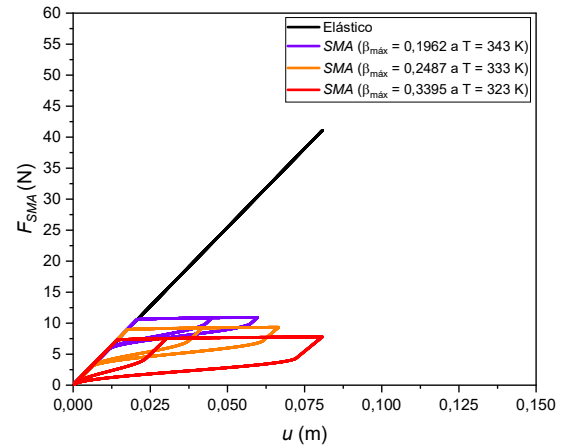
Os resultados a seguir apresentam a dinâmica do sistema com o rotor à frequência angular de forçamento externo de 23,8 rad/s. Elevando  $m$  para 0,285 kg, ainda que com  $\Omega$  inferior a 24,5 rad/s, um contato do sistema é mais intenso o que aumenta a deformação por compressão da mola de SMA, avaliado pelo aumento dos indicadores de transformação de fase,  $\beta$ , de sendo 0,1962 a 343 K, 0,2487 a 333 K e 0,3395 a 323 K, mostrados na Figura 24 (a).

O aumento de  $\beta$  com a diminuição de temperatura torna o tamanho dos laços de histerese maior de 343 K para 333 K e, por sua vez, de 333 K para 323 K, como pode ser visto na Figura 24 (b). Isso implica em menores amplitudes de vibração com redução da temperatura conforme sinal de deslocamento vibracional com o tempo da Figura 24 (c) e espaço de fase da Figura 24 (d).

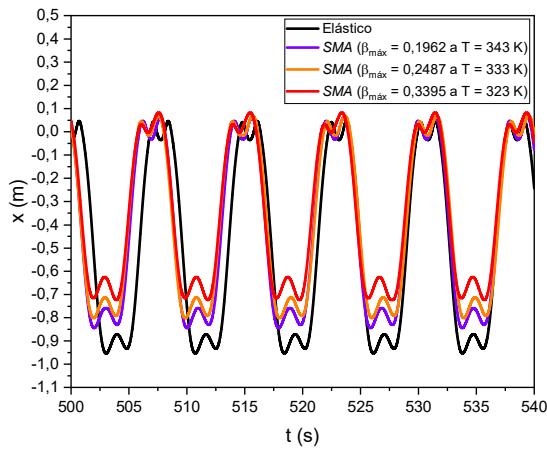




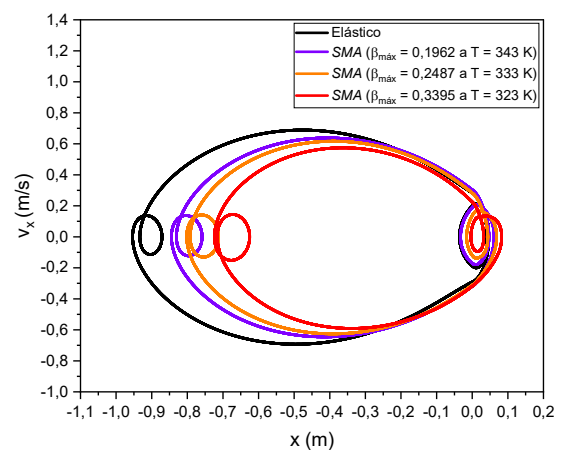
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 24 – Vibração forçada do sistema com contato para  $m = 0,285$  kg.

Ao comparar os resultados da Figura 23 com os da Figura 24, percebe-se que a redução de frequência angular de forçamento externo resultou em respostas da mola de SMA com aparências menos complexas em termos de laços de histerese com menos sublaços (ou subciclos) internos (devido a transformações de fase incompletas) e em termos de uma dinâmica do sistema aparentemente menos complexa da Figura 24 (d) em relação à Figura 23 (d).

O aumento de dissipação de energia devido à variação de temperatura implica em reduções de amplitudes vibracionais que aumentam de um ciclo a outro com temperatura menor, conforme visto nos resultados de vibrações livre e forçada que apresentam boa concordância qualitativa com os resultados de SANTOS & SAVI (2009) e SILVA *et al.* (2013).

## 5 CONCLUSÃO E OBSERVAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma análise dinâmica de um sistema que consiste de um oscilador não suave com suporte descontínuo de *SMA* excitado por um desbalanceamento rotativo. Esse sistema é governado por uma dinâmica não linear cujas fontes são de naturezas geométrica (contato do oscilador com o suporte descontínuo) e constitutiva do material (*SMA* da mola helicoidal conectada ao referido suporte). As *SMAs* promovem o efeito de dissipação de energia devido ao comportamento histerético associado às transformações de fase sólida, sendo adaptativo por possuir dependência da temperatura.

A modelagem matemática desenvolvida neste trabalho inclui relações cinemáticas com chaveamento de transição entre os modos de operação sem contato e com contato do sistema com o suporte sem perda de generalidade para modelos físicos em geral de sistemas não-suaves com suporte descontínuo. A modelagem constitutiva das *SMAs* considera o modelo de BRINSON (1993) que apresenta boa concordância com dados experimentais. A solução numérica foi obtida aplicando-se o método de integração por *RK4*.

Percebe-se que uma das complexidades envolvidas em termos das equações que governam a dinâmica do sistema diz respeito ao contato lateral que representa uma fonte de não linearidade geométrica devido à descontinuidade matemática da transição da região sem contato para a região com contato ( $x = g$  e o “achatamento” nos resultados de espaços de fase). A outra complexidade refere-se à expressão da força de restituição exercida pela mola helicoidal de *SMA*, pois está associada a uma fonte de não linearidade constitutiva.

As simulações numéricas desenvolvidas neste trabalho consideram a adaptabilidade do sistema avaliando diferentes temperaturas. Observa-se que é possível obter aproximadamente 26% de redução de amplitude vibracional em regime permanente do sistema com contato unilateral. Os resultados de  $F_{SMA}$  em função de  $u$  da mola helicoidal apresentam uma resposta linear na fase austenítica e uma dissipação associada ao laço de histerese. A área de laço de histerese (RAO, 2009) denota a energia dissipada pela mola helicoidal devido às transformações de fases (SAVI *et al.*, 2016).

Os resultados de vibrações livres mostram transformações de fase isotérmicas dependendo das condições iniciais. Por outro lado, os resultados de simulações de vibrações forçadas apresentam situações diferentes de acordo com o aumento do desbalanceamento rotativo. A contribuição deste trabalho como foi visto é a adaptabilidade do sistema com a temperatura. Essa adaptabilidade foi investigada a partir de simulações com diferentes

temperaturas. O aumento da temperatura tende a deslocar o laço de histerese para níveis mais altos de  $F_{SMA}$ , o que permite controlar o nível de dissipação desejado.

Para trabalhos futuros, sugere-se comparar os resultados numéricos apresentados neste trabalho com resultados experimentais, incluindo resultados caóticos. Além disso, propõe-se explorar o contato bilateral do oscilador. A análise de sistemas rotativos pode ser feita aumentando o número de graus de liberdade do oscilador, tipicamente considerando um sistema com 2 Graus de Liberdade (2-GdL). Desta forma, entende-se que a investigação dos comportamentos termomecânicos das *SMA*s em sistemas rotativos é um prosseguimento interessante para o trabalho.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADEODATO, A., VIGNOLI, L. L., PAIVA, A., MONTEIRO, L. L. S., PACHECO, P. M. C. L., SAVI, M. A., 2022, “A Shape Memory Alloy Constitutive Model with Polynomial Phase Transformation Kinetics”, *Shape Memory and Superelasticity*, p. 1-18.

AGUIAR, R. A. A., 2011, “Análise da redução de vibrações em sistemas mecânicos utilizando ligas com memória de forma”, *Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica*, p. 47-52.

AGUIAR, R. A. A., SAVI, M. A., PACHECO, P. M. C. L., 2013, “Experimental Investigation of Vibration Reduction using Shape Memory Alloys”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24 (2), p. 247-261.

AHLHELM, F., KAUFMANN, R., AHLHELM, D., ONG, M. F., ROTH, C., REITH, W., 2009, “Carotid artery stenting using a novel self-expanding braided, nickel-titanium stent: feasibility and safety porcine trial”, *Cardiovasc. Intervent. Radiol.*, Vol. 32, p. 1019-1027.

ALVES, M. T. S., JUNIOR., V. S., DOS SANTOS, M. C., SAVI, M. A., ENEMARK, S., SANTOS, I. F., 2018, “Vibration Variable with a Flexible Rotor suspended by Shape Memory Alloy Wires”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29 (11), p. 2309-2323.

ANDREAUS, U., CASINI, P., 2001, “Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245 (4), p. 685-699.

ARGHAVANI, J., AURICCHIO, F., NAGHDABADI, R., REALI, A., SOHRABPOUR, S., 2010, “A 3-D Phenomenological Constitutive Model for Shape Memory Alloys Under Multiaxial Loadings”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 26 (7), p. 976-991.

AURICCHIO, F., PETRINI, L., 2004, “A Three-dimensional Model Describing Stress-temperature Induced Solid Phase Transformations: Thermomechanical Coupling and Hybrid Composite Applications”, *Int. J. Numer. Meth. Engin.*, Vol. 61 (5), p. 716-737.

AURICCHIO, F., REALI, A., STEFANELLI, U., 2007, “A Three-dimensional Model Describing Stress-induced Solid Phase Transformation with Permanent Inelasticity”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 23 (2), p. 207-226.

AURICCHIO, F., SACCO, E., 1997, “A One-dimensional Model for Superelastic Shape Memory Alloys with Different Elastic Properties Between Austenite and Martensite”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 32 (6), p. 1101-1114.

BAE SYSTEMS, 2023, “Ironclad Beetles Inspire New ‘Memory’ Metal Suspension for Military Vehicles”, disponível em <[www.baesystems.com/en/article/ironclad-beetles-inspire-new-memory-metal-suspension-for-military-vehicles](http://www.baesystems.com/en/article/ironclad-beetles-inspire-new-memory-metal-suspension-for-military-vehicles)> Acessado em 01 de outubro de 2023.

BEGLEY, C. J., VIRGIN, L. N., 1998, “Impact response and the influence of friction”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211 (5), p. 801-818.

BERGAMI, L., HENRIKSEN, L. C., 2014, “Cyclic Control Optimization for a Smart Rotor”, *Proceedings of 8<sup>th</sup> Ph.D. Seminar on Wind Energy in Europe*, ETH Zurich, Switzerland.

BERNHAMMER, L. O., VAN KUIK, G. A. M., DE BREUKER, R., 2016, “Fatigue and extreme load reduction of wind turbine variable and using smart rotors”, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, Vol. 154, p. 84-95.

BIRMAN, V., 1997, “Effect of SMA dampers on nonlinear vibrations of elastic structures, in SPIE Proceedings, Smart Structures and Materials 1997”, *Mathematics and Control in Smart Structures*, Vol. 3039, p. 9.

BORGES, J. M., SILVA, A. A., DE ARAÚJO, C. J., PIMENTEL, R. L., DE AQUINO, A. S., SENKO, R., DOS REIS, R. P. B., 2018, “On the Active Control of a Rotor-Bearing System using Shape Memory Alloy Actuators: an experimental analysis”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 40 (5), p. 1-13.

BOU-SAÏD, LAHMAR, M., MOUASSA, A., BOUCHEHIT, BACHIR, 2020, “Dynamic Performances of Foil Bearing Supporting a Jeffcott Flexible Rotor System Using FEM”, *Lubricants*, Vol, 2020, p. 8-14.

BRANDÃO, A. T., 2013, “Dinâmica não-linear em máquinas rotativas na presença de contatos entre rotor e estator”, *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Tecnologia, UnB-DF, Brasil*.

BRANDÃO, A. T., DE PAULA., A. S., SAVI, M. A., THOUVEREZ, F., 2017, “Nonlinear Dynamics and Chaos of a Nonsmooth Rotor-Stator System”, *Hindawi Mathematical Problems in Engineering Volume 2017, Article ID 8478951*.

BRINSON, L. C., 1993, “One Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 4, p. 229-242.

BROCCA, M., BRINSON, L. C., BAŽANT, Z. P., 2002, “Three-dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys Based on Microplane Model”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50 (5), p. 1051-1077.

CARPENTER, B., LYONS, J., 2001, “EO-1 technology validation report: lightweight flexible solar array experiment”, *Tech. report, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt*.

CHANG-JIAN, C. W., CHEN, C. K., 2009, “Chaos of rub-impact rotor supported by bearings with nonlinear suspension”, *Tribology International*, Vol. 42, p. 426-439.

CHEMISKY, Y., HARTL, D. J., MERAGHNI, F., 2018, “Three-dimensional Constitutive Model for Structural and Functional Fatigue of Shape Memory Alloy Actuators”, *International Journal of Fatigue*, Vol. 112, p. 263-278.

CHOI, S. B., HAN, Y. M., KIM, J. H., CHEONG, C. C., 2001, “Force tracking of a flexible gripper featuring shape memory alloys actuators”, *Mechatronics*, Vol. 11, p. 677-690.

CHOY, F. K., PADOVAN, J., 1987, “Nonlinear transient analysis of rotor-casing rub events”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 113, p. 529-545.

CISSE, C., ZAKI, W., ZINEB, T. B., 2015, “A Review of Constitutive Models and Modeling Techniques for Shape Memory Alloys”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 76, p. 244-284.

CZECHOWICZ, A., 2013, “On the functional characteristics of pseudoelastic adaptive resetting of shape memory actuators in the field of automotive applications”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24 (13), p. 1539-1545.

DANKOWICZ, H., NORDMARK, A. B., 2000, “On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations”, *Physica D*, Vol. 136, p. 280-302.

DILIBAL, S., DILIBAL, H., 2002, “İtühand Robot el ve Mayin Temizleme Alanında Kullanilabilirliği, in Savunma Teknolojileri Kongresi”, *ODTU, Ankara*, p. 24-25.

DORNELAS, V. M., 2020, “Modelagem Constitutiva da Fadiga em Ligas com Memória de Forma”, *Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica*.

DORNELAS, V. M., OLIVEIRA, S. A., SAVI, M. A., 2020, “A Macroscopic Description of Shape Memory Alloy Functional Fatigue”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 170, p. 105345.

DORNELAS, V. M., OLIVEIRA, S. A., SAVI, M. A., PACHECO, P. M. C. L., DE SOUZA, L. F. G., 2021, “Fatigue on Shape Memory Alloys: Experimental Observations and Constitutive Modeling”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 213, p. 1-24.

DUERIG, T. M., PELTON, A., STÖCKEL, D., 1999, “An overview of nitinol medical applications”, *Mater. Sci. Eng.*, A 273-275, p. 149-160.

DUERIG, T. W., MELTON, K., STÖCKEL, N. D., WAYMAN, C. M., 1990, “Engineering Aspects of Shape Memory Alloys”, *Butterworth-Heinemann, London*, p. 499.

ENEMARK, S., SANTOS, I. F., SAVI, M. A., 2015, “Shape Memory Alloys Applied to Improve Rotor-Bearing System Dynamics – an experimental investigation”, *DINAME 2015 – Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*.

ENEMARK, S., SAVI, M. A., SANTOS, I. F., 2016, “Modelling, Characterisation and Uncertainties of Stabilised Pseudoelastic Shape Memory Alloy Helical Springs”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.

FALK, F., 1980, “Model Free Energy, Mechanics, and Thermodynamics of Shape Memory Alloys”, *Acta Metallurgica*, Vol. 28 (12), p. 1773-1780.

FALK, F., 1983, “One-dimensional Model of Shape Memory”, *Archives of Mechanics*, Vol. 35 (1), p. 63-84.

FILIPPOV, A. F., 1968, “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *American Mathematical Society Translations*, Vol. 42 (2), p. 199-231.

FREMOND, M., MIYAZAKI, S., 1996, “Shape Memory Alloy: A Thermomechanical Macroscopic Theory”, *New York, Springer-Verlag Wien*.

GHASEMI, M. R., SHABAKHTY, N., ENFERADI, M. H., 2019, “Vibration Control of Offshore Jacket Platforms Through Shape Memory Alloy Pounding Tuned Mass Damper (SMA-PTMD)”, *Ocean Engineering*, Vol. 197, p. 106348.

HARTL, D. J., LAGOUDAS, D. C., 2007, “Aerospace applications of shape memory alloys”, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part G J. Aerosp. Eng.* Vol. 221 (4), p. 535-552.

HINRICHS, N., OESTREICH, M., POPP, K., 1997, “Dynamics of oscillators with impact and friction”, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 8 (4), p. 535-558.

HINRICHS, N., OESTREICH, M., POPP, K., 1998, “On the modelling of friction oscillators”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216 (3), p. 435-459.



HODGSON, D. E., BROWN, J. W., 2000, “Using Nitinol Alloys”, *Shape Memory Applications Inc., San Jose*, p. 44.

HUMBEECK, J. V., 1999, “Non-medical Applications of Shape Memory Alloys”, *Mater. Sci. Eng., A*, 273-275, p. 134-148.

IKEDA, T., 2011, “The Use of Shape Memory Alloys in Aerospace Engineering, Shape Memory and Superelastic Alloys Technologies and Applications”, *Nagoya: Woodhead Publishing Limited, Chapter 11*, p. 125-140.

INMAN, D. J., 2018, “Vibrações Mecânicas”, *Elsevier Editora Ltda, 4ª edição, Cap. 1*, p. 47.

IVOŠEVIĆ, Š., RUDOLF, R., 2019, “Materials with Shape Memory Effect for Applications in Maritime”, *Scientific Journal of Polish Naval Academy, Vol. 60*.

JANI, M. J., MARTIN, L., ALEKSANDAR, S., MARK, A. G., 2014, “A Review of Shape Memory Alloy Research, Applications and Opportunities”, *Materials & Design, Vol. 56*, p. 1078-1113.

JEFFCOTT, H. H., 1919, “The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed – The effects of want of balance”, *Philosophical Magazine Series, Vol. 6*, p. 304-314.

JIANG, M., LIU S., WANG, Y., 2020, “An analysis method to determine how changes in dynamic complexity impact on rotor-bearing systems”, *Proc ImechE Part C: J Mechanical Engineering Science, Vol. 0 (0)*.

JUN, H. Y., REDINIOTIS, O. K., LAGOUDAS, D. C., 2007, “Development of a Fuel-Powered Shape Memory Alloy Actuator System: II. Fabrication and Testing”, *Smart Material Structures, Vol. 16*, p. 95-107.

KARPENKO, M., WIERCIGROCH, E. V., CARTMELL, M. P., 2002, “Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system”, *Chaos Solitons & Fractals*, p. 1231-1242.

KARPENKO, M., WIERCIGROCH, E. V., PAVLOVSKAIA, E. E., 2003, “Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor”, *Chaos Solitons & Fractals*, p. 407-416.

KARPENKO, M., WIERCIGROCH, E. V., PAVLOVSKAIA, E. E., CARTMELL, M. P., 2002, “Piecewise approximate analytical solutions for a Jeffcott rotor with a snubber ring”, *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 475-488.

KIM, Y. B., NOAH, S. T., 1990, “Bifurcation analysis for a modified Jeffcott rotor with bearing clearances”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 1 (3), p. 221-241.

KNOTEK, J., NOVOTNÝ, P., MARŠÁLEK, O., RAFFAI, P., DLUGOŠ, J., 2015, “The influence of rotor unbalance on turbocharger rotor dynamics”, *Institute of Automotive Engineering, Brno University of Technology, Technik 2, CZ 616 69 Brno, Czech Republic*, p. 8-13.

KOROISH, E., MOLINA, F. A. L., REPINALDO, J. P., 2018, “Sensitivity analysis of smart rotor under to uncertainties”, *MATEC Web of Conferences*, Vol. 211, p. 18001 *VETOMAC XIV*.

KUDVA, J. N., MATIN, C. A., SCHERER, L. B., JARDINE, A. P., MCGOWAN, A. R., LAKE, R. C., SENDECHYJ, G., SANDER, B., 1999, “Overview of the DARPA/AFRL/NASA smart wing program”, *Smart Material Structures*, Vol. 3674, p. 230-236.

LA CAVA, C. A. P. L., SILVA, E. P., MACHADO, L. G., PACHECO, P. M. C. L., SAVI, M. A., 2000, “Modeling of a shape memory preload device for bolted joints”, in *Proceedings of National Congress of Mechanical Engineering (CONEM 2000-ABCM)*, Brazil.

LEINE, R. I., 2000, “Bifurcations in discontinuous mechanical systems of Filippov-type”, *Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven*.

LEINE, R. I., VAN CAMPEN, D. H., VAN DE VRANDE, B. L., 2000, “Bifurcations in nonlinear discontinuous systems”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 23, p. 105-164.

LEINE, R. I., VAN CAMPEN, D. H., 2002a, “Discontinuous bifurcations of periodic solutions”, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 36, p. 259-273.

LEINE, R. I., VAN CAMPEN, D. H., 2002b, “Discontinuous fold bifurcation in mechanical systems”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, p. 138-146.

LI, Y., LUO, Z., LIU, J., MA, H., YANG, D., 2021, “Dynamic modeling and stability analysis of a rotor-bearing system with bolted-disk joint”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 158, p. 107778.

LI, Y., LUO, Z., SHI, B., LIU, J., 2021, “Influence of contact interface friction of bolted disk joint on motion stability of rotor-bearing system”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 91, p. 2225-2236.

LIU, Y., ZHANG, Y., ZHIHUA, W., 2019, “Stochastic dynamic analysis of the rotor-bearing system considering the randomness of the radial clearance”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 41:529.

LUO, Y., DU, Y., REN, Z., WEN, B., 2009, “Nonlinear Characteristics of Rub-impact Rotor-bearing System with Slowly Varying Mass”, *International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*.

MACHADO, L. G., SAVI, M. A., 2002, “Odontological Applications of Shape Memory Alloys”, *Revista Brasileira de Odontologia*, Vol. 59 (5), p. 302-306.

MACHADO, L. G., SAVI, M. A., 2003, “Medical Applications of Shape Memory Alloys”, *Braz. J. Med. Biol. Res.*, Vol. 36 (6), p. 683-691.

MCCORMICK, J., FUGAZZA, D., AURICCHIO, F., DESROCHES, R., 2006, “Seismic Vibration Control of Structures using Superelastic Shape Memory Alloy”, *J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. 128 (3), p. 294-301.

MIERCIGROCH, M., SIN, V. W. T., 1998, “Experimental study of a symmetrical piecewise base-excited oscillator”, *Journal of Applied Mechanics-ASME*, Vol. 65, p. 657-663.

MO, L., YONGBAO, L., QIANG, W., 2018, “Research on asymmetrical supporting rotor system with radial clearance”, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 382, p. 42055.

MOLINA, F. A. L., JUNIOR, V. S., KOROISH, E., 2015, “Smart Rotor Under Uncertain Parameters”, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*, D. A. Rade, A. M. G. Lima (Editors), ABCM, Maresias, SP, Brazil.

MOREIRA, R. V., 2017, “Análise dinâmica de um sistema rotativo considerando impacto com um mancal revestido internamente com memória de forma”, *Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, UFF-RJ, Brasil*.

MOSLEY, M., MAVROIDIS, C., PFEIFFER, C., 1999, “Design and Dynamics of a Shape Memory Alloy Wire Bundle”, in *Proceedings of the ANS, 8<sup>th</sup> Topical Meeting on Robotics and Remote Systems, Pittsburgh*.

MUSZYNSKA, A., GOLDMAN, P., 1995, “Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs”, *Chaos Solitons & Fractals*, p. 1683-1704.

NAGNUMA, T., KYO, M., UEKI, T., TAKEDA, K., ISHIBASHI, J., 1998, “A New Automatic Hydrothermal Fluid Sampler Using a Shape Memory Alloy”, *J. Oceanogr.*, Vol. 54 (3), p. 241-246.

NAKATANI, M., KAJIMOTO, H., SEKIGUCHI, D., KAWAKAMI, N., TACHI, S., 2003, “3D Form Display with Shape Memory Alloy”, in *13<sup>th</sup> International Conference on Artificial Reality and Telexistence*.

- NAN, G., ZHU, Y., ZHANG, Y., GUO, W., 2021, “Nonlinear Dynamic Analysis of Rotor-Bearing System with Cubic Nonlinearity”, *Hindawi Shock and Vibration*, Article ID 8878319.
- NIAKI, E. T., ASGHARIFARD-SHARABIANI, P., AHMADIAN, H., 2019, “Bearing geometric imperfections effects on the rub-impact behaviors of a rotor-bearing system”, in *26<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration (ICSV)*.
- NORDMARK, A. B., 1991, “Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, p. 279-297.
- OBERAIGNER, E. R., FISCHER, F. D., TANAKA, K., 2002, “On the Optimal Damping of a Vibration Shape Memory Alloy rod”, *Eng. Mater. Technol. ASME* 124, p. 97-102.
- OLIVEIRA, S. A., SAVI, M. A., KALAMKAROV, A. L., 2010, “A Three-dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, p. 1163-1175.
- OLIVEIRA, S. A., SAVI, M. A., 2013, “Os Materiais Inteligentes e Suas Aplicações”, *Revista Marítima Brasileira*, Vol. 133 (10-12), p. 39-56.
- OLIVEIRA, S. A., 2013, “Modelagem Termodinâmica de Ligas com Memória de Forma em um Contexto Tridimensional”, *Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica*.
- OLIVEIRA, S. A., SAVI, M. A., ZOUAIN, N., 2016, “A Three-dimensional Description of Shape Memory Alloy Thermomechanical Behavior Including Plasticity”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, p. 1451-1472.
- PACHECO, P. M. C. L., SAVI, M. A., 2000, “Modeling and Simulation of a Shape Memory Release Device for Aerospace Applications”, *Revista de Engenharia e Ciências Aplicadas*.

- PAIVA, A., SAVI, M. A., BRAGA, A. M. B., PACHECO, P. M. C. L., 2005, “A Constitutive Model for Shape Memory Alloys Considering Tensile-Compressive Asymmetry and Plasticity”, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 42 (11-12), p. 3439-3457.
- PANICO, M., BRINSON, L. C., 2007, “A Three-dimensional Phenomenological Model for Martensite Reorientation in Shape Memory Alloys”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 55 (11), p. 2491-2511.
- PASYNKOVA, I. A., 2006, “Bifurcations of the precessional motion of an unbalanced rotor”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 70, p. 549-559.
- PATIL, D., SONG, G., 2017, “A Review of Shape Memory Material’s Applications in the Offshore Oil and Gas Industry”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 26 (9).
- PATIL, V. R., JADHAV, P. V., 2020, “Dynamic response analysis of unbalanced rotor-bearing system with internal radial clearance”, *SN Applied Sciences* 2:1826.
- PAVLOVSKAIA, E., WIERCIGROCH, M., GREBOGI, C., 2001, “Modeling of an impact system with a drift”, *Physical Review E.*, Vol. 64, p. 56-224.
- PETERKA, F., 2000, “Dynamics of double impact oscillators”, *FACTA Universitates-Mechanics, Automatic Control and Robotics*, Vol. 2 (10), p. 1177-1190.
- PHADATARE, H. P., PRATIHER, B., 2021, “Large deflection model for rub-impact analysis in high-speed rotor-bearing system with mass unbalance”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 132, p. 103702.
- PHILLIPS, F. R., WHEELER, R. W., GELTMACHER, A. B., LAGOUDAS, D. C., 2019, “Evolution of Internal Damage During Actuation Fatigue in Shape Memory Alloys”, *International Journal of Fatigue*, Vol. 124, p. 315-327.

- PIIROINEN, P. T., VIRGIN, L. N., CHAMPNEYS, A. R., 2004, “Chaos and period-adding: experimental and numerical verification of the grazing bifurcation”, *Journal of Nonlinear Science*, Vol. 14, p. 383-404.
- PISAREV, P., KUNGURTSEVA, E. G., EVGENY, B., 2021, “Stress-deformable state research and strength estimation of a composite smart rotor blade with variable geometry”, *Conference Paper in AIP Conference Proceedings*.
- PITT, D., DUNNE, J., GARCIA, E., WHITE, E., 2001, “SAMPSON Smart Inlet Shape Memory Alloys Powered Adaptive Lip Design and Static Test”, in *19<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference*, p. 1359.
- POPOV, P., LAGOUDAS, D. C., 2007, “A 3-D Constitutive Model for Shape Memory Alloys Incorporating Pseudoelasticity and Detwinning of Self-accommodated Martensite”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 23 (10-11), p. 1679-1720.
- RAIOLA, M., DISCETTI, S., IANIRO, A., RAGNI, D., *et al.*, 2016, “Smart rotor: controlling dynamic stall by means of an actuated flap”, *AIAA Aviation*, *8<sup>th</sup> AIAA Flow Control Conference*, p. 2016-4242.
- RAO, A., RUIMI, A., SRINIVASA, A. R., 2014, “Internal Loops in Superelastic Shape Memory Alloy Wires Under Torsion-Experiments and Simulations/predictions”, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 51 (25-26), p. 4554-4571.
- RAO, S., 2009, “Vibrações Mecânicas”, *Pearson Education do Brasil*, 4<sup>a</sup> edição, Caps. 2 e 3, p. 77-79 e 117-118.
- RAYCHEM, 2001, *RAYCHEM-TYCO ELECTRONIC CORPORATION*, [www.raychem.com](http://www.raychem.com).
- REDINIOTIS, O. K., WILSON, L. N., LAGOUDAS, D. C., KHAN, M. M., 2002, “Development of a Shape Memory Alloy Actuated Biomimetic Hydrofoil”, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* Vol. 13 (1), p. 35-49.

REYNAERLS, D., PEIRS, J., BRUSSEL, H. V., 1997, “An Implantable Drug-deliver System Based on Shape Memory Alloy Micro-actuation”, *Sens. Actuators A Phys*, Vol. 61 (1-3), p. 455-462.

ROGERS, C. A., 1995, “Intelligent materials”, *Scientific American*, p. 122-127.

SAFAK, K. K., ADAMS, G. G., 2002, “Modeling and simulation of an artificial muscle and its application to biomimetic robot posture control”, *Robot. Auton. Syst.*, Vol. 41, p. 225-243.

SANTOS, B. C., SAVI, M. A., 2007, “Nonlinear Dynamics of a Nonsmooth Shape Memory Alloy Oscillator”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 40, p. 197-209.

SAVI, M. A., 2017, “Dinâmica Não-Linear e Caos”, *E-papers Serviços Editoriais Ltda*, 2ª edição revista e ampliada, p. 44-49.

SAVI, M. A., DE PAULA, A. S., DE ARAÚJO, C. J., 2016, “Shape Memory Alloys”, *Springer International Publishing Switzerland 2016 V. Lopes Junior et al. (eds.), Dynamics of Smart Systems and Structures*, p. 155-188.

SAVI, M. A., DE PAULA, A. S., LAGOUDAS, D. C., 2011, “Numerical Investigation of an Adaptive Vibration Absorber using Shape Memory Alloys”, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, Vol. 22 (1), p. 67-80.

SAVI, M. A., DIVENYI, S., FRANCA, L. F. P., WEBER, H. I., 2007, “Numerical and experimental investigations of the nonlinear dynamics and chaos in non-smooth systems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, p. 59-73.

SAVI, M. A., PACHECO, P. M. C. L., BRAGA, A. M. B., 2002b, “Chaos in a Shape Memory Two-Bar Truss”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37 (8), p. 1387-1395.

SAVI, M. A., PACHECO, P. M. C. L., GARCIA, M. S., AGUIAR, R. A. A., SOUZA, L. F. G., HORA, R. B., 2015, “Nonlinear Geometric Influence on the Mechanical Behavior of Shape Memory Alloy Helical Springs”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24 (3), p. 35012.



SAVI, M. A., PAIVA, A., 2005, “Describing Internal Subloops Due to Incomplete Phase Transformations in Shape Memory Alloys”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 74 (9), p. 637-647.

SAVI, M. A., PAIVA, A., BAÊTA-NEVES, A. P., PACHECO, P. M. C. L., 2002a, “Phenomenological Modeling and Numerical Simulation of Shape Memory Alloys: a Thermo-plastic phase Transformation Coupled Model”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 13 (5), p. 261-273.

SAVI, M. A., PAIVA, A., PACHECO, P. M. C. L., 2008, “Tensile-Compressive Asymmetry Influence on Shape Memory Alloy System Dynamics”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 36 (4), p. 828-842.

SGHIR, R., 2021, “Unbalance-induced whirl of a rotor supported by oil-film bearings”, *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 349 (2), p. 371-389.

SHEN, X., JIA, J., ZHAO, M., 2007, “Numerical Analysis of a Rub-impact Rotor-bearing System with Mass Unbalance”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 13 (12), p. 1819-1834.

SHIGLEY, J. E., 2011, “Projeto de Engenharia Mecânica”, *AMGH Editora Ltda*, 8ª edição, Caps. 3 e 10, p. 110-111 e 526-530.

SILVA, L. C., 2011, “Análise dinâmica de um sistema rotor-mancal utilizando ligas com memória de forma”, *Dissertação de Mestrado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), UFRJ-RJ, Brasil*.

SILVA, L. C., SAVI, M. A., PAIVA, A., 2013, “Nonlinear Dynamics of a Rotordynamic Nonsmooth Shape Memory Alloy System”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, p. 608-621.

SIMADER, V., HOLL, H. J., 2021, “Reduction of the unbalance excited vibrations during the resonance passage of a rotor”, *Journal of Physics: Conference Series* 1909 012059.

SINTEF, 1999, “Shape Memory Alloys in oil well applications”, <http://iku.sintef.no/Borebronn/Brosjyrer/SMA/SMA.htm>.

SIRA-RAMIREZ, H., SILVA-NAVARRO, G., BELTRAN-CARVAJAL, F., 2007, “On the GPI balancing control of an uncertain Jeffcott rotor model”, in *4<sup>th</sup> International Conference on Electrical and Electronics Engineering*.

SITNIKOVA, E., PAVLOVSKAIA, E., WIERCIGROCH, M., SAVI, M. A., 2009, “Vibration Reduction of The Impact System by a Shape Memory Alloy Restrain: Numerical Studies”, *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 45 (9), p. 837-849.

SLADE, K. N., VIRGIN, L. N., BAYLY, P. V., 1997, “Extracting information from interimpact intervals in a mechanical oscillator”, *Physical Review E.*, Vol. 56 (3), p. 3705-3708.

SOUZA, A. C., MAMIYA, E. N., ZOUAIN, N., 1998, “Three-dimensional Model for Solids Undergoing Stress-induced Phase Transformations”, *European Journal of Mechanics Solids*, Vol. 17 (5), p. 789-806.

SPEICHER, M., HODGSON, E., ROCHES, R. D., LEON, R. T., 2009, “Shape Memory Alloy Tension/Compression Device for Seismic Retrofit of Buildings”, *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 18, p. 746-753.

SRIVASTAVA, A. K., TIWARI, M., SINGH, A., 2021, “Identification of rotor-stator rub and dependence of dry whip boundary on rotor parameters”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 159, p. 107845.

TANAKA, K., 1986, “A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-dimensional Tensile Behavior”, *Res. Mechanic: International Journal of Structural Mechanics and Materials Science*, Vol. 18, p. 251-263.

THE BUSINESS RESEARCH COMPANY, 2023, “Shape Memory Alloys Global Market Report 2023”, disponível em <[www.thebusinessresearchcompany.com/report/shape-memory-alloys-global-market-report](http://www.thebusinessresearchcompany.com/report/shape-memory-alloys-global-market-report)> Acessado em 01 de outubro de 2023.

- TISEO, B., CONCILIO, A., AMEDURI, S., GIANVITO, A., 2010, “A Shape Memory Alloys Based Tuneable Dynamic Vibration Absorber for Vibration Tonal Control”, *J. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 48 (1), p. 135-153.
- TODD, M. D., VIRGIN, L. N., 1996, “Natural frequencies considerations of an impact oscillator”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194 (3), p. 452-460.
- TODD, M. D., VIRGIN, L. N., 1997, “An experimental impact oscillator”, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 8 (4), p. 699-714.
- TUISSI, A., BASSANI, P., CASATI, R., BOCCIOLONE, M., COLLINA, A., CARNEVALE, M., PREVITALI, B., 2009, “Application of Shape Memory Alloys composites in the collectors of the railway pantograph for the Italian high-speed train”, *J. Mater. Eng. Perform.* Vol. 18 (5-6), p. 612-619.
- UNGURÁN, R., PAO, L. Y., KÜHN, M., PETROVIC, V., 2019, “Smart rotor control of wind turbines under actuator limitations”, *American Control Conference (ACC)*, p. 3474-3481.
- VAIDYANATHAN, R., CHIEL, H. J., QUINN, R. D., 2000, “A hydrostatic robot for marine applications”, *Robot. Auton. Syst.*, Vol. 30, p. 103-113.
- VIRGIN, L. N., BEGLEY, C. J., 1999, “Grazing bifurcations and basins of attraction in an impact-friction oscillator”, *Physica D.*, Vol. 130, p. 43-57.
- WANG, W., XIANG, Y., YU, J., YANG, L., 2023, “Development and Prospect of Smart Materials and Structures for Aerospace Sensing Systems and Applications Sensors”, Vol. 23 (3), p. 1545.
- WIERCIGROCH, M., 2000, “Modelling of dynamical systems with motion dependent discontinuities”, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 11 (2000), p. 2429-2442.

WIERCIGROCH, M., SIN, V. W. T., LI, K., 1998, “Measurement of chaotic vibration in a symmetrically piecewise linear oscillator”, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 9 (1-2), p. 209-220.

WILLIAMS, K., CHIU, G., BERNHARD, R., 2002, “Adaptive-passive Absorbers using Shape Memory Alloys”, *Journal Sound Vibration*, Vol. 249 (5), p. 835-848.

WILLIAMS, K., CHIU, G., BERNHARD, R., 2005, “Dynamic Modelling of a Shape Memory Alloy Adaptive Tuned Vibration Absorber”, *Journal Sound Vibration*, Vol. 280, p. 211-234.

WU, X., JIAO, Y., CHEN, Z., MA, W., 2021, “Establishment of a contact stiffness matrix and its effect on the dynamic behavior of rod-fastening rotor bearing system”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 91, p. 3247-3271.

XING, H., YI-MING, W., MO, L., FAN, Z., 2021, “Influence of radial clearance on nonlinear dynamics of a two-span three-support rotor system”, *E3S Web of Conferences*, Vol. 233, p. 04012.

YANG, Z., JIA, P., SUN, X., MEI, H., 2021, “Rotor vibration unbalance compensation control of a bearing less induction motor”, *Int. Trans. Electr. Energy Syst.*, E12953.

ZHANG, L., MA, Z. Y., 2012, “Numerical analysis of a rub-impact rotor-bearing system for hydraulic generating set”, *26<sup>th</sup> IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, Vol. 15, p. 072015.

ZHANG, L., XU, H., ZHANG, S., PEI, S., 2020, “A radial clearance adjustable bearing reduces the vibration response of the rotor system during acceleration”, *Tribology International*, Vol. 144, p. 106112.

ZHANG, X. D., ROGERS, C. A., LIANG, C., 1991, “Modeling of Two-way Shape Memory Effect”, *Smart Struct. Mater.*, ASME, Vol. 24, p. 79-90.

ZHANG, Z., ZHU, L., YU, J., 1999, “Effect of film force nonlinearity on unbalance response of a Jeffcot rotor-journal bearing system”, *Journal of Shanghai University (English Edition)*, Vol. 3 (3), p. 227-233.

ZHAO, Q., YUAN, J., JIANG, H., YAO, H., WEN, B., 2021, “Vibration control of a rotor system by shear thickening fluid dampers”, *Journal of sound and vibration*, Vol. 494.

ZHU, R., WANG, G., HAN, Q., ZHAO, A., REN, J., XIA, X., 2019, “Dynamic Characteristics and Experimental Research of a Two-Span Rotor-Bearing System with Rub-Impact Fault”, *Hindawi Shock and Vibration*, Article ID 6309809.

7 APÊNDICE

A seguir um quadro-resumo das equações para o modelo de sistema dinâmico de 1-GdL com mola helicoidal de SMA conectada ao suporte descontínuo do sistema:

Tabela 3 – Quadro-resumo das equações de movimento e constitutivas do sistema.

Quadro-resumo das equações (Eqs.) de movimento e constitutivas do sistema	Eq.
1) Relações cinemáticas da mola helicoidal de SMA	
$u = \begin{cases} x - g & \text{se } x > g \\ 0 & \text{se } x \leq g \end{cases}$	(1)
2.1) Equação de movimento do sistema SEM contato ( $x < g$ ) com o suporte	
$M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0$	(26)
2.2) Equação de movimento do sistema COM contato ( $x \geq g$ ) com o suporte	
$M\ddot{x} + (c + c_s)\dot{x} + (k_1 + k_2)x + F_{SMA} - m\rho\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) = 0$	(27)
3) Equação da força de restituição, $\dot{F}_{SMA}$ , da mola helicoidal de SMA na forma de taxas	
$\dot{F}_{SMA} = \frac{Gd^4}{8ND^3}\dot{u} + \frac{\pi d^3}{6D}\alpha\dot{\beta}$	(25)
4) Equações constitutivas unidimensionais do modelo de BRINSON (1993)	
$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - \alpha\dot{\beta} - \theta\dot{T}$	(4)
$\beta = \beta_S + \beta_T$	(5)
$E = E_A + \beta(E_M - E_A)$	(6)
5) Leis de evolução do modelo constitutivo unidimensional de BRINSON (1993)	
5.1) Transformação martensítica direta ( $A \Rightarrow M +$ )	
a) Para $T > M_s$ e quando $\sigma_s^{CRIT} + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_f^{CRIT} + C_M(T - M_s)$	
$\beta_S = \frac{1 - \beta_{S_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} [\sigma - \sigma_f^{CRIT} - C_M(T - M_s)] \right\} + \frac{1 + \beta_{S_0}}{2}$	(7)
$\beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1 - \beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{S_0})$	(8)
b) Para $T \leq M_s$ e quando $\sigma_s^{CRIT} < \sigma < \sigma_f^{CRIT}$	
$\beta_S = \frac{1 - \beta_{S_0}}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{\sigma_s^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} (\sigma - \sigma_f^{CRIT}) \right] + \frac{1 + \beta_{S_0}}{2}$	(9)
$\beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1 - \beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{T_0}) + \Delta_T$	(10)
$\Delta_T = \frac{1 - \beta_{T_0}}{2} \{ \cos[A_M(T - M_f)] + 1 \} \quad \text{se } M_f < T < M_s \text{ e } T < T_0$	(11)
$\Delta_T = 0 \quad \text{outro}$	

Quadro-resumo das equações (Eqs.) de movimento e constitutivas do sistema (cont.)	Eq.
b) Para $T \leq M_s$ quando $\sigma_s^{\text{CRIT}} < \sigma < \sigma_f^{\text{CRIT}}$	
$A_M = \frac{\pi}{M_s - M_f}$	(12)
5.2) Transformação martensítica inversa ( $M+ \Rightarrow A$ )	
Para $T > A$ e $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$	
$\beta_S = \frac{\beta_{S_0}}{2} \left\{ \cos \left[ A_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\}$	(13)
$\beta_T = \frac{\beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[ A_A \left( T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\}$	(14)
$A_A = \frac{\pi}{A_f - A_s}$	(15)

Esse quadro-resumo tem a finalidade de conferir consulta às principais equações de movimento e constitutivas que governam a dinâmica do sistema não suave modelado no Capítulo 3 deste trabalho para análise da dinâmica não linear de naturezas geométrica (contato do sistema com o suporte descontínuo) e constitutiva do material (*SMA* da mola helicoidal conectada ao referido suporte) do sistema.