

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**JONAYLTON MOURA DE SOUSA**

**CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR APLICADO AO SISTEMA DE  
PILOTO AUTOMÁTICO DE MÍSSEIS**

**RIO DE JANEIRO  
2024**

JONAYLTON MOURA DE SOUSA

CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR APLICADO AO SISTEMA DE  
PILOTO AUTOMÁTICO DE MÍSSEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador(es): Alberto Mota Simões, Dr. ISAE  
Elias Dias Rossi Lopes, D.Sc.

Rio de Janeiro

2024

©2024

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Sousa, Jonaylton Moura de.

Controle Preditivo Não Linear Aplicado ao Sistema de Piloto Automático de Mísseis / Jonaylton Moura de Sousa. – Rio de Janeiro, 2024.

128 f.

Orientador(es): Alberto Mota Simões e Elias Dias Rossi Lopes.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Elétrica, 2024.

1. mpc. 2. não linear. 3. míssil. 4. 3-dof. 5. piloto automático. 6. matlab. 7. casadi. i. Mota Simões, Alberto (orient.) ii. Dias Rossi Lopes, Elias (orient.) iii.

Título

**JONAYLTON MOURA DE SOUSA**

**Controle Preditivo Não Linear Aplicado ao Sistema de  
Piloto Automático de Mísseis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador(es): Alberto Mota Simões e Elias Dias Rossi Lopes.

Aprovada em 01 de março de 2024, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. **Alberto Mota Simões** - Dr. ISAE do IME - Presidente

---

Prof. **Elias Dias Rossi Lopes** - D.Sc. do IME

---

Prof. **Paulo César Pellanda** - Dr. ENSAE do IME

---

Prof. **Helon Vicente Hultmann Ayala** - D.Sc. da PUC

Rio de Janeiro  
2024

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, Florencio e Elenilza,  
que me ensinaram o valor do trabalho duro e da dedicação.*

*E à minha esposa Marianna,  
por estar ao meu lado em cada passo deste caminho,  
oferecendo encorajamento e paciência.*

*Sem vocês, nada disso seria possível.*

*“Quando vocês saírem para a guerra  
contra os seus inimigos e virem cavalos e carros,  
um exército maior do que o seu, não tenham medo deles;  
pois o Senhor, o seu Deus, que os tirou do Egito, estará com vocês.”  
(Bíblia Sagrada, Deuteronômio 20:1)*

## RESUMO

Esta dissertação aborda o desenvolvimento e a aplicação do Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC), em sistemas de piloto automático de mísseis. A modelagem matemática detalhada de mísseis axissimétricos controlados por aletas é apresentada, incluindo simplificações práticas que mantêm a precisão necessária para o controle efetivo em todo o envelope de voo. Com base nessa modelagem, um controlador MPC Não Linear é desenvolvido e testado por meio de simulações. Seu desempenho é comparado com outro controlador, o qual utiliza um método de controle robusto avançado em que as não linearidades da planta são modeladas como incertezas e descritas por Restrições Quadráticas Integrais (IQC). Dessa forma, evidencia-se a viabilidade e a eficácia do MPC em aplicações complexas e não lineares como o controle de piloto automático de mísseis. Ressalta-se a simplicidade, a intuitividade e a precisão do MPC, especialmente quando aplicado a sistemas com modelagem matemática bem definida. O desempenho do controlador MPC mostra-se superior em comparação ao controlador IQC em simulações nominais, apresentando estabilidade robusta a variações paramétricas e capacidade de implementação em tempo real, dadas as rápidas soluções de otimização alcançadas. Contribuições significativas incluem a formulação de uma equação aproximada para a pressão dinâmica em fluidos compressíveis, para diferentes valores do número de Mach e de altitude, e a proposição de um controlador MPC com dois modelos internos, um para predição e outro para atualização de estados. Limitações identificadas abrem caminho para pesquisas futuras, sugerindo a inclusão de técnicas de controle robusto no MPC, a aplicação de dados aerodinâmicos de mísseis, que sejam mais realistas, e a consideração da dinâmica completa de 6 Graus de Liberdade (6-DOF). Este trabalho não apenas avança o conhecimento no campo do controle MPC Nominal, mas também estabelece uma base sólida para pesquisas futuras na área de sistemas de controle MPC Não Linear e Robusto.

**Palavras-chave:** mpc; não linear; míssil; 3-dof; piloto automático; matlab; casadi;

# ABSTRACT

This dissertation addresses the development and application of Model-Based Predictive Control (MPC) in missile autopilot systems. Detailed mathematical modeling of axisymmetric missiles controlled by fins is presented, including practical simplifications that maintain the necessary accuracy for effective control across the flight envelope. Based on this modeling, a Nonlinear MPC controller is developed and tested through simulations. Its performance is compared with another controller, which utilizes an advanced robust control method where the plant's nonlinearities are modeled as uncertainties and described by Integral Quadratic Constraints (IQC). Thus, the viability and effectiveness of MPC in complex and nonlinear applications such as missile autopilot control are demonstrated. The simplicity, intuitiveness, and accuracy of MPC are emphasized, especially when applied to systems with well-defined mathematical modeling. The performance of the MPC controller proves to be superior in comparison to the IQC controller in nominal simulations, showing robust stability to parametric variations and the capability for real-time implementation, given the rapid optimization solutions achieved. Significant contributions include the formulation of an approximate equation for dynamic pressure in compressible fluids, for different Mach numbers and altitudes, and the proposition of an MPC controller with two internal models, one for prediction and another for state updating. Identified limitations pave the way for future research, suggesting the inclusion of robust control techniques in MPC, the application of more realistic missile aerodynamic data, and the consideration of full 6 Degrees of Freedom (6-DOF) dynamics. This work not only advances knowledge in the field of Nominal MPC control but also establishes a solid foundation for future research in the area of Nonlinear and Robust MPC control systems.

**Keywords:** mpc; nonlinear; missile; 3-dof; autopilot; matlab; casadi;



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráfico exemplificando os principais conceitos utilizados na técnica MPC.	42
Figura 2 – Diferença entre a saída predita pelo modelo simplificado e pelo modelo completo. . . . .	42
Figura 3 – Classificação de Mísseis, adaptada de (1). . . . .	56
Figura 4 – Partes componentes de um míssil típico, adaptada de (1). . . . .	57
Figura 5 – Sistemas de coordenadas do referencial estacionário e do referencial centrado no míssil, adaptada de (1). . . . .	59
Figura 6 – Ângulos de Euler, adaptada de (1). . . . .	60
Figura 7 – Representação dos 6 graus de liberdade do míssil (componentes dos vetores de velocidade total do míssil ( $\vec{V}_M$ ) e velocidade angular ( $\vec{\omega}$ ), adaptada de (1). . . . .	61
Figura 8 – Ângulos de ataque e de derrapagem, adaptada de (1). . . . .	62
Figura 9 – Convenção 1 para os ângulo de deflexão das aletas, adaptada de (1). . . . .	64
Figura 10 – Convenção 2 para os ângulo de deflexão das aletas, adaptada de (1). . . . .	65
Figura 11 – Forças aerodinâmicas no referencial do vento, adaptada de (1). . . . .	67
Figura 12 – Representação dos coeficientes aerodinâmicos de força, adaptada de (1). . . . .	68
Figura 13 – Pressão Dinâmica em função do Número de Mach ( $h = 6096\text{m}$ ). . . . .	71
Figura 14 – Vetor de propulsão, adaptada de (1). . . . .	73
Figura 15 – Decomposição do vetor de aceleração gravitacional, adaptada de (1). . . . .	74
Figura 16 – Diagrama de blocos do sistema de controle de mísseis. . . . .	85
Figura 17 – Dinâmica isolada da planta. . . . .	88
Figura 18 – Valores de equilíbrio do ângulo de ataque para diferentes valores de $a_Z^{com}$ e $M_0$ ( $h_0 = 6.096\text{ m}$ ). . . . .	89
Figura 19 – Valores de equilíbrio da velocidade angular de arfagem para diferentes valores de $a_Z^{com}$ e $M_0$ ( $h_0 = 6.096\text{ m}$ ). . . . .	90
Figura 20 – Valores de equilíbrio do ângulo de deflexão da aleta de arfagem para diferentes valores de $a_Z^{com}$ e $M_0$ ( $h_0 = 6.096\text{ m}$ ). . . . .	90
Figura 21 – Superfície de equilíbrio em $\mathbb{R}^3$ e trajetória dos estados, para $h_0 = 6.096\text{ m}$ .	91
Figura 22 – Função Custo $V_N$ em função de $[u_0^*, u_1^*]$ , para $P = 10^{-3}$ e modelo de predição não linear. . . . .	93
Figura 23 – Função Custo $V_N$ em função de $[u_0^*, u_1^*]$ , para $P = 10^{-5}$ e modelo de predição não linear. . . . .	94
Figura 24 – Função Custo $V_N$ em função de $[u_0^*, u_1^*]$ , para $P = 10^{-5}$ e modelo de predição linear. . . . .	94
Figura 25 – Interconexão padrão para síntese IQC, adaptada de (2). . . . .	96
Figura 26 – Interconexão padrão para o problema de síntese LPV, adaptada de (2). . . . .	97

Figura 27 – Síntese LPV transformada em um problema de síntese IQC, adaptada de (2). . . . .	98
Figura 28 – Interconexão padrão para o problema de sensibilidade mista, adaptada de (2). . . . .	98
Figura 29 – Interconexão padrão para o problema de sensibilidade mista, adaptada de (2). . . . .	99
Figura 30 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_Z$ ) para o sistema nominal. . . . .	103
Figura 31 – Sinal de comando de deflexão da aleta de arfagem ( $\delta^{com}$ ) para o sistema nominal. . . . .	103
Figura 32 – Ângulo de ataque ( $\alpha$ ) para o sistema nominal. . . . .	104
Figura 33 – Número de Mach ( $M$ ) para o sistema nominal. . . . .	104
Figura 34 – Taxa de deflexão da aleta de arfagem ( $\dot{\delta}$ ) para o sistema nominal. . . . .	105
Figura 35 – Tempo de processamento a cada iteração do problema de otimização para uma simulação típica. . . . .	105
Figura 36 – Histograma do tempo de processamento a cada iteração do problema de otimização para uma simulação típica. . . . .	106
Figura 37 – Aceleração comandada vs aceleração medida, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador $K_{IQC}$ . . . . .	107
Figura 38 – Taxa de deflexão da aleta, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador $K_{IQC}$ . . . . .	107
Figura 39 – Ângulo de deflexão da aleta, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador $K_{IQC}$ . . . . .	108
Figura 40 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_Z$ ) para 16 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador MPC nominal. . . . .	109
Figura 41 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_Z$ ) para 16 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador $K_{IQC}$ . . . . .	110
Figura 42 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_Z$ ) para 1024 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador $K_{IQC}$ . . . . .	110
Figura 43 – Diagrama de blocos em malha fechada do controlador MPC <i>Offset-Free</i> proposto. . . . .	115
Figura 44 – Diagrama de blocos em malha fechada do controlador MPC + MHE. . . . .	116

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores padrões das constantes para cálculo da velocidade do som (referentes ao ar seco) . . . . .	63
Tabela 2 – Valores padrões das constantes para cálculo da densidade do ar seco . .	69
Tabela 3 – Coeficientes polinomiais aerodinâmicos para a Equação 3.62 . . . . .	82
Tabela 4 – Características físicas do míssil . . . . .	82
Tabela 5 – Restrições do OCP para o modelo teórico de míssil . . . . .	87
Tabela 6 – Restrições adicionais para o modelo teórico de míssil, não consideradas no OCP . . . . .	88
Tabela 7 – Número de Operações Aritméticas na Equação de $x^+$ . . . . .	95
Tabela 8 – Especificações do controlador MPC projetado . . . . .	95
Tabela 9 – Especificações do computador utilizado nas simulações . . . . .	102
Tabela 10 – Especificações dos softwares utilizados nas simulações . . . . .	102
Tabela 11 – Resumo dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos . . . . .	122
Tabela 12 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 1 . . . . .	123
Tabela 13 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 2 . . . . .	124
Tabela 14 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 3 . . . . .	125
Tabela 15 – Resumo dos artigos sobre controle de mísseis utilizando MPC . . . . .	127
Tabela 16 – Especificações do OCP e do MPC para os artigos sobre controle de mísseis utilizando MPC . . . . .	128

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BTT	<i>Bank-to-Turn</i>
CG	Centro de Gravidade
DOF	Graus de Liberdade
EKF	Filtro de Kalman Estendido
iMAG	Controle Preditivo Integrado de Piloto Automático e Guiamento
IQC	Restrição Quadrática Integral
LFT	Transformação Linear Fracionária
LMI	Desigualdade Matricial Linear
LMPC	MPC Linear
LOS	Linha de Visada
LPV	Linear a Parâmetro Variante
LQR	Regulador Linear Quadrático
LTI	Sistema Linear Invariante no Tempo
MHE	Estimação de Horizonte Móvel
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo
NMPC	MPC Não Linear
OCP	Problema de Controle Ótimo
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
RMPC	MPC Robusto
SDC	Coefficiente Dependente do Estado
SDRE	Equação de Riccati Dependente do Estado
SQP	Programação Quadrática Sequencial
STT	<i>Skid-to-Turn</i>
TVC	Controle de Vetor de Propulsão
UKF	Filtro de Kalman Não-linear

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo de ataque
$\beta$	Ângulo de derrapagem
$\gamma$	Ângulo de trajetória de voo
$\delta, \delta_e$	Ângulo de deflexão das aletas de arfagem
$\delta_a$	Ângulo de deflexão das aletas de rolagem
$\delta_r$	Ângulo de deflexão das aletas de guinada
$\dot{\delta}, \dot{\delta}_e$	Taxa de variação do ângulo de deflexão das aletas de arfagem
$\dot{\delta}_a$	Taxa de variação do ângulo de deflexão das aletas de rolagem
$\dot{\delta}_r$	Taxa de variação do ângulo de deflexão das aletas de guinada
$\delta^{com}, \delta_e^{com}$	Comando de deflexão das aletas de arfagem
$\delta_a^{com}$	Comando de deflexão das aletas de rolagem
$\delta_r^{com}$	Comando de deflexão das aletas de guinada
$\zeta$	Coefficiente de amortecimento
$\theta$	Ângulo de arfagem
$\kappa(\cdot)$	Lei de controle do MPC
$\lambda$	Ângulo de visada
$\mu$	Análise $\mu$ para análise de estabilidade e desempenho
$\rho$	Densidade do ar
$\phi$	Ângulo de rolagem
$\psi$	Ângulo de guinada
$\omega$	Velocidade angular
$\omega_n$	Frequência natural
$A, B, C$	Matrizes do modelo linear
$a_z$	Aceleração normal

$\mathcal{C}$	Matriz de controlabilidade
$C_X, C_Y, C_Z$	Coefficientes aerodinâmicos de força nos eixos $X_b, Y_b$ e $Z_b$ , respectivamente
$C_l, C_m, C_n$	Coefficientes aerodinâmicos de momento em torno dos eixos $X_b, Y_b$ e $Z_b$ , respectivamente
$C_{xy}$	Derivada parcial do coeficiente aerodinâmico $C_x$ em relação à variável $y$
$D$	Diâmetro da seção reta transversal do míssil
$e_k$	Erro de acompanhamento de referência
$F$	Força
$f(\cdot)$	Função dinâmica do sistema em tempo discreto
$f_c(\cdot)$	Função dinâmica do sistema em tempo contínuo
$g$	Aceleração devida à gravidade
$H$	Momento angular
$\mathcal{H}_2$	Norma $\mathcal{H}_2$
$\mathcal{H}_\infty$	Norma $\mathcal{H}_\infty$
$h$	Altitude em relação ao nível do mar
$h(\cdot)$	Função de saída do sistema
$I$	Tensor de inércia
$I_x, I_y, I_z$	Momentos de inércia para rotação em torno dos eixos $X_b, Y_b$ e $Z_b$ , respectivamente
$I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$	Produtos de inércia cruzados, entre os eixos $X_b, Y_b$ e $Z_b$ , respectivamente
$K$	Ganho ótimo do controlador LQR
$L$	Gradiente térmico vertical
$\mathcal{L}_2$	Norma $\mathcal{L}_2$
$\ell(\cdot)$	Função custo amostral (ou de estágio)
$M$	Número de Mach, ou momento, conforme contexto
$m$	Massa, ou número de sinais de controle, conforme o contexto

$N$	Horizonte de predição
$N_c$	Horizonte de controle
$n$	Número de estados
$\mathcal{O}$	Matriz de observabilidade
$P$	Matriz de ponderação terminal, na função custo do OCP, ou pressão estática, conforme contexto
$\mathcal{P}_N$	Problema de controle ótimo de horizonte finito
$P_\infty$	Solução não negativa definida da Equação Algébrica de Riccati
$\mathcal{P}_\infty$	Problema de controle ótimo de horizonte infinito
$p$	Taxa de variação do ângulo de rolagem, ou momento linear, ou vetor de parâmetros incertos, ou números de saídas medidas, conforme contexto
$Q$	Matriz de ponderação dos estados, na função custo do OCP, ou pressão dinâmica, conforme contexto
$q$	Taxa de variação do ângulo de arfagem, ou número de parâmetros, conforme contexto
$R$	Matriz de ponderação do sinal de controle, na função custo do OCP, ou constante de gás ideal, conforme contexto
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^m$	Espaço das entradas
$\mathbb{R}^n$	Espaço dos estados
$\mathbb{R}^p$	Espaço das saídas
$\mathbb{R}^q$	Espaço dos parâmetros
$r$	Taxa de variação do ângulo de guinada
$S$	Área da seção transversal do míssil
$T$	Força de propulsão, ou temperatura do ar, conforme contexto
$T_0$	Temperatura do ar ao nível do mar
$T_s$	Período de amostragem
$\mathbb{U}$	Conjunto de restrições de controle

$\mathbf{u}$	Sequência de sinais de controle
$u$	Componente do vetor de velocidade linear do míssil na direção $X_b$ , ou vetor do sinal de controle, conforme contexto
$u_r$	Vetor do sinal de controle de referência
$V_M$	Velocidade total do míssil
$V_N(\cdot)$	Função custo de horizonte finito
$V_f(\cdot)$	Função custo terminal
$V_s$	Velocidade do som
$V_\infty(\cdot)$	Função custo de horizonte infinito
$v$	Componente do vetor de velocidade linear do míssil na direção $Y_b$
$w$	Componente do vetor de velocidade linear do míssil na direção $Z_b$
$\mathbb{X}$	Conjunto de restrições de estados
$\mathbb{X}_f$	Conjunto de restrições de estado terminal
$\mathbf{x}$	Sequência de estados
$x$	Vetor de estados do sistema
$x_0, x(0)$	Condição inicial do sistema
$x_r$	Vetor de estados de referência
$\mathbf{y}$	Sequência de medidas da saída
$y$	Vetor de saída do sistema
$y_r$	Vetor de saída de referência



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	18
1.2	OBJETIVOS	22
1.3	TRABALHOS RELACIONADOS EM CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO OUTRAS TÉCNICAS	22
1.4	TRABALHOS RELACIONADOS EM CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO MPC	29
1.4.1	CONTRIBUIÇÕES	35
1.5	ESTRUTURA	36
<b>2</b>	<b>CONTROLE MPC NOMINAL</b>	<b>37</b>
2.1	FUNDAMENTOS DO CONTROLE MPC NOMINAL	38
2.2	CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA	43
2.3	CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE	44
2.4	ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES	46
2.5	CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DISCRETOS	47
2.6	OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DISCRETOS	49
2.7	MPC LINEAR NOMINAL	49
2.7.1	CASO SEM RESTRIÇÕES	49
2.7.2	CASO COM RESTRIÇÕES	50
2.8	MPC NÃO LINEAR NOMINAL	51
2.9	MPC SUBÓTIMO	53
<b>3</b>	<b>CLASSIFICAÇÃO, DESCRIÇÃO E MODELAGEM DE MÍSSEIS</b>	<b>56</b>
3.1	CLASSIFICAÇÃO E PARTES COMPONENTES DE MÍSSEIS	56
3.1.1	CLASSIFICAÇÃO DE MÍSSEIS QUANTO AO SISTEMA DE GUIAMENTO	56
3.1.2	PARTES COMPONENTES DE UM MÍSSIL	57
3.2	MODELAGEM DINÂMICA	58
3.2.1	SISTEMAS DE COORDENADAS E ÂNGULOS DE EULER	58
3.2.2	GRAUS DE LIBERDADE E VETORES DE VELOCIDADE	61
3.2.3	CONVENÇÕES PARA SUPERFÍCIES DE CONTROLE	63
3.2.4	CONDIÇÕES E SIMPLIFICAÇÕES ASSUMIDAS PARA O MODELO DE MÍSSIL	66
3.2.5	FORÇAS E COEFICIENTES DE FORÇA AERODINÂMICOS	67
3.2.6	FORÇA DE PROPULSÃO	73
3.2.7	FORÇA GRAVITACIONAL	73
3.2.8	MOMENTOS E COEFICIENTES DE MOMENTO AERODINÂMICOS	74

3.2.9	MOMENTOS DEVIDO À VARIAÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE . . . . .	75
3.3	MODELO DINÂMICO 6-DOF DO MÍSSEL . . . . .	76
3.4	MODELO DINÂMICO 3-DOF DO MÍSSEL . . . . .	81
<b>4</b>	<b>CONTROLE DE MÍSSEIS . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1	SISTEMA DE CONTROLE DE MÍSSEIS . . . . .	85
4.1.1	DIAGRAMA DE BLOCOS . . . . .	85
4.1.2	DESAFIOS E REQUISITOS ESPECÍFICOS . . . . .	86
4.2	CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO MPC . . . . .	88
4.2.1	SUPERFÍCIE DE EQUILÍBRIO . . . . .	88
4.2.2	FUNÇÃO CUSTO E CONVEXIDADE . . . . .	92
4.3	CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZADO SÍNTESE IQC . . . . .	96
4.3.1	SÍNTESE IQC . . . . .	96
4.3.2	SÍNTESE LPV/LFT . . . . .	96
4.3.3	SÍNTESE $\mathcal{H}_\infty$ VIA SENSIBILIDADE MISTA . . . . .	98
4.3.4	CONTROLADOR $K_{IQC}$ . . . . .	100
4.4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS . . . . .	101
4.4.1	ESPECIFICAÇÕES DE HARDWARE E SOFTWARE . . . . .	101
4.4.2	SIMULAÇÃO 1: CONTROLADOR MPC NOMINAL E MODELO COMPLETO .	102
4.4.3	SIMULAÇÃO 2: CONTROLADORES MPC NOMINAL E $K_{IQC}$ UTILIZANDO O MODELO APROXIMADO . . . . .	105
4.4.4	SIMULAÇÃO 3: CONTROLADOR MPC NOMINAL E MODELO APROXIMADO, COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS EM $C_Z$ . . . . .	108
4.4.5	SIMULAÇÃO 4: CONTROLADOR $K_{IQC}$ E MODELO APROXIMADO, COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS EM $C_Z$ . . . . .	109
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1	CONCLUSÃO . . . . .	111
5.2	CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO . . . . .	112
5.3	LIMITAÇÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS . . . . .	113
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>117</b>
	<b>APÊNDICE A – TABELAS COMPARATIVAS DOS ARTIGOS SO-</b> <b>BRE CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO</b> <b>TÉCNICAS DE CONTROLE CLÁSSICO . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>APÊNDICE B – TABELAS COMPARATIVAS DOS ARTIGOS SO-</b> <b>BRE CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO</b> <b>MPC . . . . .</b>	<b>126</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por finalidade apresentar a motivação da pesquisa desenvolvida na área de controle de mísseis através da técnica de Controle Preditivo Baseado em Modelo, ou MPC (do inglês *Model-based Predictive Control*), além de indicar a posição e contribuição desse trabalho no contexto de desenvolvimento atual. As seções seguintes e os próximos capítulos estão estruturados de maneira a dar ao leitor uma visão fundamentada e fluida do conhecimento necessário para entendimento da técnica e os resultados promissores para implementação prática em sistemas de mísseis atuais.

## 1.1 Motivação

Nos últimos anos, o campo da engenharia de controle tem testemunhado avanços significativos, particularmente no chamado Controle MPC, conforme destacado nos artigos de revisão bibliográfica de Mayne *et al.* (3), Qin e Badgwell (4), Lee (5) e, mais recentemente, Schwenzer *et al.* (6). Esta técnica tem suas raízes na Teoria de Controle Ótimo. O conceito básico do MPC, segundo a descrição adotada em Rawlings *et al.* (7), é a utilização de modelos dinâmicos que permitam a predição do comportamento futuro do sistema e, por meio de técnicas de otimização, produzir a melhor decisão, ou seja, o sinal de controle a ser aplicado ao sistema no instante atual. Este processo é denominado Problema de Regulação. Para o controlador MPC alcançar um desempenho satisfatório, é necessário conhecer, mesmo que de forma aproximada, o estado atual do sistema. No entanto, a medição direta desse estado nem sempre é possível. Nesse contexto, uma das aplicações secundárias do controlador MPC é a Estimção de Horizonte Móvel, ou MHE (do inglês *Moving Horizon Estimation*). Essa técnica utiliza medições anteriores da saída do sistema para estimar os estados da planta ou os seus parâmetros no instante atual. Este processo é denominado Problema de Estimção. O MHE se destaca por sua capacidade de integrar informações passadas na solução do problema de otimização no instante atual, oferecendo uma solução satisfatória mesmo quando a observação direta dos estados do sistema não é possível.

Inicialmente, em meados dos anos 70, o MPC foi aplicado em sistemas mais simples e com dinâmicas lineares. Essa técnica é conhecida, portanto, como MPC Linear, ou LMPC (do inglês *Linear-MPC*). Porém, a partir da década de 90, com o desenvolvimento teórico e tecnológico, foi possível aplicar o MPC para sistemas mais complexos, com dinâmicas não lineares e especificações de desempenho restritivas. Surgiu então o controle MPC Não Linear, ou NMPC (do inglês *Nonlinear-MPC*) (8). A distinção entre linear e não linear reside somente na caracterização do modelo dinâmico de predição (i.e. equações diferenciais

que descrevem o comportamento do sistema) e não no sistema em malha fechada, pois mesmo no caso do MPC Linear, devido às restrições, o sistema em malha fechada se torna não linear.

Conforme apresentado por Qin e Badgwell, 2003 (4), o MPC tem mostrado sua eficácia em uma variedade de aplicações (os autores citam mais de 4.500 soluções validadas e comercializadas à época da publicação da pesquisa), entre as quais, é possível destacar: a sua utilização na Indústria Automotiva (veículos autônomos, assistentes de direção e estacionamento, etc), em Processos Industriais (principalmente na indústria química), Aeroespacial e Defesa (controle de trajetória e orientação de aeronaves, satélites e mísseis), Sistemas de Geração e Distribuição de Energia (controle de sistemas de potência sob restrições operacionais ou contingências, visando economia e eficiência energética). Todas essas aplicações têm em comum certas características que justificam o emprego da técnica MPC em lugar das técnicas de controle clássico. Algumas dessas características são listadas a seguir:

- **Previsão e Antecipação de Comportamento Futuro:** O MPC é projetado para prever o comportamento futuro de um sistema baseado em modelos matemáticos. Isso é crucial em aplicações onde antecipar as condições futuras e ajustar as ações de controle proativamente podem melhorar significativamente o desempenho e a robustez;
- **Tratamento de Restrições:** Muitos sistemas operam sob restrições rigorosas, como limites de velocidade em veículos autônomos, capacidades de carga e/ou restrições de temperatura e pressão em processos industriais. O MPC pode lidar efetivamente com múltiplas restrições ao mesmo tempo, otimizando o desempenho dentro desses limites;
- **Adaptabilidade a Variações e Incertezas:** Sistemas como veículos autônomos, processos industriais e redes de energia estão frequentemente sujeitos a incertezas e variações no ambiente ou nas condições operacionais. O MPC é capaz de se adaptar a essas mudanças, ajustando os controles em tempo real para manter o desempenho ideal;
- **Desempenho Ótimo:** O MPC não se limita apenas a controlar um sistema para atingir um determinado objetivo, ele busca encontrar a melhor solução possível, muitas vezes equilibrando objetivos conflitantes, como eficiência energética e alta disponibilidade, por exemplo;
- **Melhoria Contínua com Realimentação de Saída:** O MPC pode utilizar uma abordagem com realimentação de saída, onde os dados coletados são usados para refinar continuamente o modelo do sistema. Isso permite uma melhoria constante do controle ao longo do tempo, tornando-o mais preciso, confiável e adaptável às mudanças do ambiente.

A aplicação do MPC em Sistemas Aeroespaciais e de Defesa, em particular no controle de mísseis, é uma área de pesquisa em constante evolução e de vital importância para o desenvolvimento tecnológico e militar do Brasil. O desafio no controle de mísseis reside na complexidade desses sistemas e na necessidade de respostas rápidas e precisas. A eficácia de um míssil depende em grande parte da precisão e robustez do seu sistema de controle. Enquanto os controladores clássicos, como os PID, são eficientes em sistemas com dinâmicas simples (Linear e Invariante no Tempo), eles se mostram limitados em situações com interações complexas entre variáveis do processo (não linearidades e restrições) ou incertezas e perturbações significativas. Aqui, estratégias mais avançadas, como o MPC, oferecem uma solução mais robusta e adaptável. O MPC combina estratégias de controle sofisticadas com modelos matemáticos, permitindo ajustar proativamente o comportamento do sistema em resposta a mudanças no ambiente ou no próprio sistema.

Como mencionado anteriormente, nem sempre é possível medir os estados do sistema diretamente e, ao se fazer a estimação dos estados, pode-se introduzir erros de estimação. Outras fontes de erro são provenientes do fato de se utilizar modelos matemáticos aproximados do comportamento real da planta, portanto, é possível que existam diferenças entre a planta e o modelo, advindas de aproximações matemáticas, dinâmicas desconhecidas ou parâmetros incertos. A estes denomina-se genericamente de incertezas. Por último, pode-se citar também o fato de que sensores estão sujeitos à ruídos de medição, e a planta pode estar sujeita à perturbações externas não conhecidas, estas fontes de erro são as chamadas perturbações. No problema de controle do míssil, fontes de erro típicas a serem consideradas incluem: incertezas nos coeficientes aerodinâmicos, massa e momento de inércia, perturbações devidas ao vento, incertezas dinâmicas não modeladas (e.g. modos flexíveis não contemplados no modelo), não linearidades do atuador e do sensor, e ruído de medição (9). Um controlador que seja capaz de atender especificações de desempenho na presença de incertezas e perturbações e que garanta estabilidade é chamado de controlador robusto. No contexto do controle MPC, refere-se a esses controladores como MPC Robusto, ou RMPC (do inglês *Robust-MPC*).

Diversas técnicas de controle MPC Robusto foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas. Neste trabalho não são abordadas todas elas, mas é possível citar as principais, quais sejam: *min-max* MPC, *tube-based* MPC, *LMI-based* MPC e *Offset-Free* MPC (7, 10).

Cada uma dessas técnicas tem características distintas que as tornam adequadas para diferentes tipos de aplicações:

- *Min-max* MPC: Esta abordagem, primeiramente proposta por Campo e Morari (11), foca em otimizar o pior cenário possível dentro de um conjunto definido de incertezas. Ao considerar o pior caso, o *min-max* MPC garante a estabilidade e o desempenho

do sistema, mesmo sob condições adversas. Essa técnica é muito conservadora e garante estabilidade e desempenho para o pior caso, que geralmente é o caso menos provável em uma aplicação prática. Para o caso típico ou nominal, o desempenho do *min-max* MPC costuma ser insatisfatório, conforme cita Allgöwer *et al.* (8).

- *Tube-based* MPC: O *tube-based* MPC, primeiramente proposto por Langson *et al.* (12), em essência estima um “tubo” de trajetórias prováveis em torno da trajetória nominal planejada. O objetivo dessa técnica é garantir que, a despeito das incertezas e perturbações, o sistema permaneça dentro de limites dados pelas restrições (limites físicos ou limites desejados pelo projetista), seguindo uma trajetória que esteja sempre dentro do tubo estimado.
- *LMI-based* MPC: O MPC baseado em desigualdades matriciais lineares, ou LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*), utiliza LMIs na formulação do problema de otimização. Esta técnica foi primeiramente proposta por Kothare *et al.* (13). Esta abordagem é particularmente útil para sistemas com múltiplas restrições e onde as relações entre as variáveis do sistema podem ser expressas em termos de LMIs.
- *Offset-Free* MPC: Trata-se de um conjunto de técnicas para lidar com desvios que podem ocorrer devido a modelagens imprecisas (incertezas) ou perturbações externas que causem erros não-nulos em regime permanente, na saída do sistema. O *Offset-Free* MPC utiliza em sua formulação um modelo de perturbação, e introduz estados fictícios adicionais com o objetivo de garantir que as incertezas de modelagem ou perturbações externas na planta não resultem em desvios permanentes da saída. Nesta técnica, como não há uma abordagem única para lidar com o problema de robustez, muitas das técnicas citadas anteriormente podem ser adaptadas ou integradas em uma única estrutura denominada genericamente de *Offset-Free* MPC, desde que se consiga eliminar erros não-nulos em regime permanente. O principal desafio dessa técnica consiste em estabelecer um “bom” modelo de perturbação. Entende-se por “bom” o modelo que consiga captar tanto as incertezas de modelo quanto perturbações externas e/ou ruídos de medição, e o controlador projetado seja capaz de eliminar o erro em regime permanente. Uma primeira proposta de um controlador MPC deste tipo foi dada por Muske e Rawlings (14), para sistemas lineares e por Rawlings *et al.* (15), para sistemas não lineares.

Essas variantes do RMPC são aplicadas de acordo com as características específicas do sistema, o desempenho desejado e os tipos de incertezas e perturbações que são esperadas. Ao escolher a técnica apropriada, os projetistas podem garantir que o sistema não apenas atenda às especificações de desempenho, mas também seja capaz de lidar com as variações inerentes ao ambiente operacional, garantindo assim uma operação segura e eficiente.

## 1.2 Objetivos

Esta pesquisa visa apresentar as características do MPC aplicado a sistemas não lineares, e comparar o desempenho desta técnica com outra abordagem de controle, especificamente uma técnica de controle robusto, na qual as não linearidades são modeladas como incertezas definidas por Restrições Quadráticas Integrais, ou IQCs (do inglês *Integral Quadratic Constraints*), contribuindo com a base de conhecimento sobre a teoria do MPC e proporcionando uma fundamentação sólida para trabalhos futuros.

Em particular, busca-se aplicar a técnica MPC Não Linear no controle do piloto automático de mísseis e demonstrar que esta técnica é não apenas viável computacionalmente, mas também superior a técnica IQC, em termos de desempenho, robustez e adaptabilidade às restrições. Portanto, diferentes simulações são realizadas para comparação da lei de controle do MPC com a lei de controle de um controlador IQC, desenvolvido pelos autores Simões e Cavalcanti em (16, 2).

## 1.3 Trabalhos Relacionados em Controle de Mísseis Utilizando Outras Técnicas

Nesta seção, são apresentados brevemente alguns dos trabalhos relacionados ao controle de mísseis, nos quais o controlador é calculado antecipadamente, de maneira *off-line*, ao contrário do MPC, onde o problema de otimização deve ser resolvido *on-line* a cada intervalo de amostragem. Todos esses trabalhos aplicam técnicas desenvolvidas para sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI), como a síntese  $\mu$ ,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  (ou combinações destas), e as adaptam para o caso não linear.

Há diversas maneiras de se adaptar equações dinâmicas não lineares para uma forma linear ou *quasi*-linear. Algumas consistem em linearizar em torno de um único ponto de operação, como empregado em (17). Outras modelam a não linearidade como uma incerteza no modelo e separam o sistema em uma parte linear (linearizada em diversos pontos de operação) e outra parte incerta interconectada, utilizando a representação por Transformação Linear Fracionária, ou LFT (do inglês *Linear Fractional Transformation*), conforme visto em (9, 18). Há também aquelas que parametrizam a equação dinâmica em uma forma de representação em espaço de estados com matrizes com Coeficientes Dependentes dos Estados, ou SDC (do inglês *State-Dependent Coefficients*), tal qual utilizado em (19, 20). Há as que utilizam formas politópicas definidas por vértices, em que cada vértice corresponde há uma representação linear em espaço de estados, e projetam o controlador utilizando LMIs, como em (21). E, por último, há aquelas que empregam, além da técnica LFT para modelar a incerteza, a representação *quasi*-Linear a Parâmetros Variantes, ou *quasi*-LPV (do inglês *Linear Parameter Varying*), para modelar a dinâmica

não linear, como visto em (22, 23, 24, 25). Na representação *quasi*-LPV a variável de escalonamento é uma variável de estado endógena do sistema. De acordo com Shamma e Cloutier (22), formalmente, um sistema LPV é definido como um sistema linear cuja dinâmica depende de uma variável exógena, cujos valores são desconhecidos a priori, mas podem ser medidos durante a operação do sistema, porém, no caso do controle de mísseis, utiliza-se como parâmetro de escalonamento uma variável endógena, a saber, o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e, muitas vezes também, o número de Mach ( $M$ ). Portanto, em virtude de se utilizar uma variável endógena no lugar de uma variável exógena, adota-se a denominação *quasi*-LPV. Neste caso, algumas condições sobre o parâmetro de escalonamento precisam ser satisfeitas, para que seja garantida a estabilidade e desempenho robusto do sistema em malha fechada. Por exemplo, Shamma e Cloutier (22) destacam que a variação temporal do parâmetro, i.e. a derivada da variável de escalonamento em relação ao tempo, deve ser “suficientemente lenta”. Independentemente da forma de representação utilizada, todos os trabalhos a seguir realizam inicialmente uma adaptação do modelo não linear para apresentar uma “aparência” linear, para então aplicar técnicas conhecidas de controle linear, com algumas modificações.

A única exceção, em que o projeto do controlador é feito utilizando uma técnica de controle adaptativo não linear, e, portanto, não é feita uma linearização da planta, é descrita por Kim e Song (26) e Kim *et al.* (27). Essa técnica complexa, chamada de controle adaptativo *backstepping*, exige a introdução de coeficientes virtuais de controle e mudanças de variáveis de estado. Apesar dos resultados obtidos, é uma solução *ad hoc* e pouco prática.

Reichert e Yost, 1990 (18), exploram a técnica de controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  e a análise  $\mu$  em um cenário teórico de piloto automático de míssil, focando na dinâmica longitudinal. Eles usam um modelo simplificado baseado nas variáveis de estado  $\alpha$  (ângulo de ataque) e  $q$  (velocidade angular de arfagem), com  $q$  e  $\eta_z$  (aceleração normal) como variáveis de saída. Os parâmetros físicos do míssil são análogos aos desta dissertação. O objetivo do controlador projetado é seguir comandos de aceleração com um erro de estado estacionário abaixo de 0,5% e uma resposta ao degrau com uma constante de tempo menor que 0,2 s. O controlador precisa garantir robustez para diferentes ângulos de ataque, evitando a saturação dos atuadores e instabilidades de alta frequência devido a modos de excitação não modelados. As equações de estado não lineares do míssil são linearizadas em torno dos pontos de equilíbrio ( $M_y = 0$ ) para criar equações lineares de espaço de estado. O controlador desenvolvido com a síntese  $\mu$  mostrou-se superior em desempenho e foi testado em simulação com a planta não linear respondendo a um degrau de 25g.

Reichert, 1992 (9), analisa o uso de múltiplos controladores lineares invariantes no tempo (LTI), criados com técnicas  $\mathcal{H}_\infty/\mu$ , em sistemas de dinâmicas não lineares. O estudo propõe um método para lidar com variações entre diferentes pontos operacionais, resolvendo



duas equações de Riccati. É destacado que, apesar da estabilidade garantida para a planta linearizada em malha fechada pelo controlador LTI, não há garantias semelhantes quando aplicado à planta real não linear, nem para o controlador LTI escalonado dinamicamente com a planta não linear. Este desafio, comum em abordagens de escalonamento de ganho, é usualmente superado por meio de extensivas simulações sob diversas condições de voo. Os coeficientes aerodinâmicos apresentados no artigo são hipotéticos e não consideram o termo de amortecimento da velocidade angular de arfagem ( $q$ ) para o coeficiente aerodinâmico do momento ( $C_{mq}$ ), que é incluído nesta dissertação. O estudo define a faixa operacional para  $2 \leq M \leq 4$ ,  $-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$ , e uma altitude inicial de 20.000 ft (6096 m). O projeto do controlador assume velocidade constante do míssil ( $V_m$ ), mas a simulação utiliza uma equação dinâmica de  $V_m$  para definir o perfil de velocidade ao longo da trajetória para o escalonamento dos coeficientes aerodinâmicos. O controlador desenvolvido visa seguir comandos de aceleração com uma constante de tempo de 0,35 s e um erro em estado estacionário abaixo de 5%. No modelo, os estados incluem  $\alpha$ ,  $q$  e  $\delta$  (ângulo de deflexão da aleta de arfagem), a entrada é  $\delta_c$  (comando de deflexão da aleta de arfagem) e a saída é  $A_t$  (aceleração normal). A dinâmica do atuador é modelada por um sistema de primeira ordem. Os resultados indicam que o controlador oferece estabilidade em malha fechada e atende aos requisitos de desempenho temporal estabelecidos, embora não avalie a robustez do projeto frente a incertezas no modelo.

Shamma e Cloutier, 1993 (22), apresentam um novo projeto de controlador por escalonamento de ganhos para um piloto automático da dinâmica longitudinal de um míssil que não envolve linearizações em torno de pontos de operação. Os autores informam que um piloto automático derivado da linearização sobre uma única condição de voo é incapaz de alcançar um desempenho adequado em todas as condições operacionais previstas. Para contornar esse problema, a dinâmica é trazida para uma forma *quasi*-LPV. A variável endógena utilizada para escalonamento é o ângulo de ataque ( $\alpha$ ). Uma vez na forma *quasi*-LPV, um controlador robusto usando a síntese  $\mu$  é projetado para alcançar o controle do ângulo de ataque por meio de deflexões das aletas de cauda. O projeto final é uma estrutura de malhas interna e externa, com o controle do ângulo de ataque sendo realizado pela malha interna e o controle de aceleração normal pela malha externa. O objetivo geral de desempenho é rastrear os comandos de aceleração com um erro de estado estacionário de menos de 0,5% e uma constante de tempo de 0,2 s para resposta ao degrau. O desempenho do controlador nominal é avaliado para diferentes entradas de referência e satisfazem aos requisitos de desempenho desejados. Os autores também avaliam a robustez do controlador projetado quanto à incertezas paramétricas e o desempenho não é satisfatório, ou seja, o projeto não apresenta desempenho robusto.

Nichols *et al.*, 1993 (17), apresentam uma nova técnica para o desenvolvimento de controladores dinâmicos lineares com escalonamento de ganhos, aplicada ao projeto de piloto automático para a dinâmica longitudinal do míssil. Os controladores lineares são

projetados para diferentes condições operacionais usando métodos  $\mathcal{H}_\infty$ . A abordagem de escalonamento de ganhos adotada elimina os chamados termos de acoplamento ocultos, comuns em controladores de escalonamento de ganhos. Os objetivos de desempenho do controlador incluem: (a) garantir estabilidade robusta na faixa operacional de  $-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$  e  $1.5 \leq M \leq 3$ , assegurando que o sistema em malha fechada cumpra as especificações mesmo com variações de  $\pm 25\%$  nos coeficientes de  $\alpha$  e deflexão da aleta ( $\delta$ ); (b) seguir com precisão um comando de aceleração normal em degrau, com uma constante de tempo abaixo de 0,35 s, um sobressinal máximo de 10% e um erro de estado estacionário menor que 1%; (c) manter uma atenuação de 30 dB a 300 rad/s na função de transferência em malha aberta do sistema linearizado, evitando a excitação de dinâmicas estruturais não modeladas; (d) limitar a taxa máxima de deflexão da aleta de cauda para um comando em degrau de 1g a menos de 25 °/s. As simulações demonstram que o desempenho do controlador projetado supera o controlador de escalonamento de ganhos tradicional, que não leva em conta os termos de acoplamento.

Wu e Balas, 1995 (21), desenvolvem um piloto automático para a dinâmica longitudinal de mísseis usando um controlador LPV com escalonamento de ganhos. Eles partem do princípio de que os parâmetros de escalonamento estão disponíveis para medição em tempo real. Sua abordagem unifica os controladores por escalonamento de ganhos, com o ajuste dos ganhos realizado inteiramente pelo controlador dependente de parâmetros. Os objetivos de desempenho do sistema em malha fechada incluem: (a) assegurar estabilidade robusta para uma faixa operacional de  $-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$  e  $2 \leq M \leq 4$ , mantendo a estabilidade mesmo com variações de  $\pm 25\%$  nos coeficientes de  $\alpha$  e de  $\pm 10\%$  nos coeficientes do ângulo de deflexão da aleta nas equações de  $C_m$  e  $C_n$ ; (b) realizar o acompanhamento de comandos de aceleração em degrau com uma constante de tempo inferior a 0,35 s, um sobressinal máximo de 10% e um erro em estado estacionário menor que 1%; e (c) limitar a taxa máxima de variação do ângulo da aleta a 20 °/s para um comando de aceleração de 1g. O controlador projetado garante estabilidade quadrática e um desempenho limitado da norma  $\mathcal{L}_2$  induzida.

Mracek e Cloutier, 1997 (19), projetam um piloto automático para dinâmica longitudinal de mísseis, com retroalimentação completa da saída, utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado, ou SDRE (do inglês *State-Dependent Riccati Equation*). A metodologia de projeto SDRE escolhida para este artigo é denominada SDRE  $\mathcal{H}_2$ . A estrutura de projeto SDRE  $\mathcal{H}_2$  é a mesma que a do  $\mathcal{H}_2$  linear, exceto que as duas equações de Riccati são dependentes do estado. Portanto, o projeto SDRE  $\mathcal{H}_2$  representa uma extensão não linear do projeto  $\mathcal{H}_2$  linear. Nesse projeto, os coeficientes das matrizes da equação dinâmica são parametrizados em função dos estados e são chamadas Coeficientes Dependentes do Estado (SDC), dessa forma o sistema passa a ter uma estrutura quasi-Linear sem a necessidade de fazer linearização por derivadas parciais. O modelo do míssil utilizado é semelhante ao dos artigos anteriores dos mesmos autores, porém é incluído um

coeficiente de amortecimento no coeficiente aerodinâmico de momento ( $C_{mq}$ ). O modelo de míssil assume massa constante, ou seja, após a queima do combustível, sem rolagem, sem guinada e sem derrapagem lateral. Em geral mísseis utilizam apenas 3 sensores longitudinais, e é o caso do artigo, em que o míssil possui sensores para medir a aceleração axial, aceleração normal e a velocidade angular de arfagem  $q$  (*pitch rate*). As simulações foram feitas utilizando o algoritmo de integração de Runge-Kutta de 4ª ordem com tempo de amostragem de 1 ms. Foram introduzidos ruídos de processo de diferentes magnitudes nas variáveis de estado. Não foram feitas especificações de projeto, mas o desempenho apresentado para diferentes condições de voo se mostraram bastante satisfatórias. Não foi feita análise de robustez à incertezas no modelo.

Mracek e Cloutier, 1997 (20), assim como no artigo anterior, também projetam um piloto automático para a dinâmica longitudinal de um míssil com realimentação de saída usando a Equação de Riccati Dependente de Estado (SDRE) conhecida como SDRE  $\mathcal{H}_2$ . O modelo de míssil utilizado é o mesmo do artigo anterior, a diferença está em que as equações dos coeficientes são descritas no referencial do vento, portanto, em vez de conceitos como força axial e força normal, se utiliza força de arrasto e força de sustentação. É possível fazer uma mudança de coordenadas para relacionar ambas as representações. Assume-se que a altitude e a densidade do ar são constantes ao longo da trajetória. O valor da frequência natural do modelo de 2ª ordem do atuador é de 50 rad/s em vez de 150 rad/s como empregado no artigo anterior. Os autores perceberam que somente com a medição da aceleração normal não era possível estimar os estados da planta de maneira satisfatória. O número de Mach ( $M$ ) é crítico para calcular as forças e momentos aerodinâmicos, portanto, incluíram duas medições adicionais, o número de Mach e a velocidade angular de arfagem ( $q$ ). Foram introduzidas perturbações nos estados nas seguintes magnitudes: 0,01 para a aceleração normal ( $a_z$ ), 0,001 para o número de Mach ( $M$ ) e 0,01 para a velocidade angular de arfagem ( $q$ ). O tempo de amostragem da simulação é de 10 ms. Não foram incluídas nos modelos, no projeto e simulações qualquer restrição nos estados da planta (limites físicos de atuadores, taxa de variação máxima, etc). A robustez a variações paramétricas foi também investigada, todos os coeficientes (exceto aqueles que multiplicam o ângulo de deflexão da aleta de arfagem ( $\delta$ )) foram variados em  $\pm 25\%$ . Porém, no artigo, o autor não apresenta os resultados, apenas cita que nas simulações os resultados foram satisfatórios.

Kim e Song, 1998 (26), aplicam uma técnica de controle adaptativo *backstepping* para sistemas não lineares, no projeto de um controlador de aceleração normal, para um modelo de míssil controlado aerodinamicamente por aletas de cauda. O modelo do míssil é não linear, com parâmetros desconhecidos e incertezas. Apenas a dinâmica longitudinal é considerada (3-DOF). O modelo do míssil adotado assume que  $M$  é constante e considera como estados da planta apenas as variáveis  $\alpha$  e  $q$ . O autor adota que o sinal de controle  $\delta$  é aplicado diretamente ao atuador, ou seja, o atuador tem dinâmica instantânea. Os valores dos coeficientes aerodinâmicos são os mesmos adotados nessa dissertação. A estrutura da

incerteza adotada é complexa e sem sentido prático. O autor descarta a variável  $\delta$  sem dar maiores detalhes do motivo dessa escolha de projeto, alegando apenas que ela não tem influência na aceleração normal, o que não condiz com a teoria de dinâmica de mísseis. O autor realiza mudança de variáveis, insere desigualdades triangulares para estabelecer propriedades de estabilidade e estima um coeficiente de controle virtual, o que torna o projeto do controlador muito complexo e a solução muito específica para o caso estudado. O projeto não considera restrições nas variáveis de estado, controle e saída. A variável controlada é o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e não a aceleração normal ( $a_n$ ) como seria esperado de um sistema de piloto automático. Simulações são realizadas para o caso nominal e para variações de  $\pm 20\%$  e  $\pm 50\%$  nos termos incertos (5 termos ao total). Estes termos não possuem significado físico prático, apenas significado matemático e tem relação indireta com os coeficientes aerodinâmicos e com as variáveis de estado. Para o caso nominal o desempenho é satisfatório e para os casos em que há incerteza paramétrica o desempenho é degradado porém a entrada de referência adotada (um onda quadrada) não permite ver a degradação da resposta por um longo período de tempo. Nenhuma técnica de controle MPC Robusto foi adotada, apenas verificou-se como o controlador projetado se comporta quando há incertezas, ou seja, foi avaliada apenas a robustez inerente da técnica.

No trabalho de Pellanda *et al.*, 2002 (23), o projeto do sistema de controle automático da dinâmica longitudinal de mísseis é reexaminado por meio de uma abordagem inovadora e moderna em que o modelo dinâmico do míssil é descrito através de uma representação LPV/LFT. O processo de síntese do controlador aproveita as funcionalidades avançadas do LPV, incorporando um conjunto de critérios  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Diferentes variáveis de Lyapunov e parâmetros de escalonamento são aplicados especificamente para cada requisito ou canal. Esta metodologia oferece uma maior flexibilidade, permitindo um equilíbrio entre desempenho e robustez, mantendo as vantagens práticas dos métodos LPV tradicionais. O objetivo é controlar o míssil para seguir comandos de aceleração normal, por meio da deflexão das aletas. As variáveis de saída monitoradas incluem a aceleração normal ( $\eta$ ) e a velocidade angular de arfagem ( $q$ ). A dinâmica do míssil é expressa pelo par  $[\alpha, M]$ , onde  $M$  é tratado como uma entrada externa e considerado como uma incerteza no modelo. Supõe-se que somente o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) é mensurável e usado para escalonamento. O objetivo é assegurar uma estabilidade robusta em toda a faixa operacional descrita por  $-30^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$  e  $2 \leq M \leq 4$ , além de seguir comandos de aceleração em degrau com uma constante de tempo inferior a 0,35 s, um sobressinal máximo de 10%, erro em regime permanente inferior a 1%, e suficiente atenuação em altas frequências para a diminuição de ruídos, efeitos dos modos flexíveis e dinâmicas de alta frequência não modeladas. Para prevenir a saturação do atuador, a taxa máxima de variação do ângulo da aleta de cauda é limitada a 25 °/s. Entre os controladores testados, apenas um cumpriu todos os requisitos para o modelo não linear com número de Mach variável.

Simões *et al.*, 2004 (24), exploram o uso de técnicas de controle LPV no projeto de

pilotos automáticos para um modelo não linear de míssil ar-ar. Eles incorporam condições realistas, como limitações na taxa de variação dos parâmetros, o que permite o desenvolvimento de controladores menos conservadores, conforme evidenciado pelos resultados de simulações não lineares em malha fechada. A dinâmica da planta é parametrizada por alfa ( $\alpha$ ) e Mach ( $M$ ), com  $M$  sendo uma variável exógena. As especificações de desempenho incluem: (a)  $-30^\circ \leq \alpha \leq 30$  e  $2 \leq M \leq 4$ ; (b) resposta ao degrau com constante de tempo menor que 0,35 s; (c) sobressinal menor que 10%; (d) erro em estado estacionário menor que 1%; (e) atenuação em alta frequência para não excitar modos de vibração e dinâmicas não modeladas; e (f)  $\dot{\delta} \leq 25^\circ/\text{s}$  para comandos em degrau de 1g. Experimentos indicaram que para atender essas especificações, os limites na taxa de variação dos parâmetros devem ser os seguintes: (a)  $-180^\circ/\text{s} \leq \dot{\alpha} \leq 180^\circ/\text{s}$  e  $-1 < \dot{M} < 0$ .

Pellanda *et al.*, 2004 (25), revisam o projeto de piloto automático para dinâmica longitudinal de mísseis, empregando uma abordagem avançada no campo do controle LPV. Este trabalho aprofunda o estudo teórico do artigo anterior, analisando um modelo de míssil não linear com dependência complexa e altamente não linear nas variáveis de escalonamento. Os métodos LPV convencionais, como as técnicas baseadas em LFT ou abordagens politópicas, mostram-se desafiadores ou excessivamente conservadores para esta aplicação. O foco principal é desenvolver pilotos automáticos com escalonamento de ganhos que ofereçam um desempenho de ganho  $\mathcal{L}_2$  em malha fechada, minimizando o conservadorismo. Para isso, é proposta uma técnica geral LPV/Gradeamento, utilizando funções de Lyapunov que são contínuas, diferenciáveis, dependentes dos parâmetros e quadráticas em relação ao estado. Um procedimento iterativo e computacionalmente eficiente é introduzido para formar dependências funcionais nas variáveis de Lyapunov, ricas o suficiente para assegurar um desempenho especificado sob uma ampla variedade de condições de voo. Pilotos automáticos com escalonamento de ganhos são sintetizados usando esta nova abordagem, e seus resultados são comparados com diferentes estratégias de síntese LPV.

Kim *et al.*, 2004 (27), melhoram alguns dos pontos fracos do seu trabalho anterior (26). Os autores consideram agora como variáveis de estado  $\alpha$ ,  $q$  e  $\delta$  e introduzem uma dinâmica de primeira ordem para o atuador, além disso consideram que os coeficientes aerodinâmicos dependem do número de Mach ( $M$ ) e que a velocidade do míssil varia ao longo da trajetória. Apenas a dinâmica longitudinal é considerada. Os parâmetros do míssil são diferentes dos adotados nessa dissertação e no artigo anterior dos mesmos autores. Outros pontos fracos do artigo anterior permanecem: (a) A estrutura da incerteza adotada é complexa e sem sentido prático; (b) os autores continuam a descartar a variável  $\delta$ , alegando que ela não tem influência na aceleração normal; (c) realizam mudança de variáveis; (d) inserem desigualdades triangulares para estabelecer propriedades de estabilidade; (e) estimam um coeficiente de controle virtual; (f) não consideram restrições nas variáveis de estado, controle e saída; (g) a variável controlada é o ângulo de ataque

( $\alpha$ ) e não a aceleração normal ( $a_n$ ). A robustez inerente do controlador projetado foi avaliada para variações nos parâmetros em  $\pm 20\%$  e uma simulação foi executada para verificar o desempenho do mesmo piloto automático para um modelo de dinâmica 6-DOF (longitudinal + latero-direcional).

A Tabela 11, do Apêndice A, apresenta de forma resumida os métodos utilizados em cada artigo para linearização do sistema não linear original, os métodos de análise e síntese utilizados para projeto e avaliação do controlador, qual dinâmica foi utilizada, a faixa de operação do míssil, na qual as equações são válidas e em que o controlador foi testado, além das especificações de desempenho no domínio do tempo, para a resposta ao degrau. As Tabelas 12-14 complementam a Tabela 11 com as especificações adicionais de desempenho desejadas pelos projetistas.

## 1.4 Trabalhos Relacionados em Controle de Mísseis Utilizando MPC

Após extensa revisão bibliográfica e visando apresentar um panorama histórico do desenvolvimento de controladores de piloto automático de mísseis utilizando a técnica de controle MPC, é apresentado, a seguir, um resumo dos trabalhos desenvolvidos por diversos autores sobre o tema. A escolha desses trabalhos se deu por critérios como total de citações por outros autores e contribuições relevantes para a área.

Mísseis são sistemas complexos, com dinâmica não linear e com muitas restrições de estado, entrada e saída, além de exigirem tempos de processamento muito curtos, portanto, aplicações de MPC para piloto automático eram raras até bem pouco tempo atrás, devido à dificuldade prática de implementação em sistemas reais, apesar das claras vantagens teóricas, conforme relatam Bachtiar *et al.* (28). Porém com o surgimento de computadores com poder computacional cada vez maior e algoritmos de otimização mais eficientes, cada vez mais trabalhos têm sido feitos nessa área e essa dissertação pretende ser um marco na linha do tempo do desenvolvimento de controladores MPC Não Linear para pilotos automáticos de mísseis, bem como referência para consultas futuras por parte de outros autores e praticantes que queiram se aprofundar no assunto.

Lu, 1994 (29), apresenta um nova técnica de projeto de controladores MPC de realimentação não lineares para acompanhamento de trajetória. A função objetivo a ser minimizada corresponde ao erro de acompanhamento de trajetória, medido pela diferença entre a aceleração normal de saída e a aceleração comandada. A técnica é aplicada ao controle de piloto automático de um modelo não linear de míssil restringindo a análise apenas a dinâmica longitudinal (3-DOF). O modelo do míssil adotado considera que o número de Mach  $M$  é constante e apenas as variáveis  $\alpha$  (ângulo de ataque),  $q$  (velocidade angular de arfagem) e  $\delta$  (ângulo de deflexão da aleta de arfagem) são variáveis de estado. A entrada é o comando de deflexão da aleta de arfagem. A dinâmica do atuador é aproximada

por um modelo de atraso de primeira ordem. Neste trabalho o autor não considera restrições nas variáveis de estado, controle e saída e o controlador é projetado em tempo contínuo. As variáveis controladas são  $\alpha$  e  $q$  e o autor cita que é possível modificar o controlador para controlar a aceleração normal ( $a_n$ ) porém não é um caminho viável com a técnica proposta no artigo, pois com  $a_n$  como variável controlada, a dinâmica interna do míssil é instável. As simulações consideraram também plantas com coeficientes aerodinâmicos  $C_m$  e  $C_n$  com variações de  $\pm 25\%$  (esses coeficientes são polinômios em função de  $\alpha$ ,  $M$ ,  $q$  e  $\delta$  e as variações se aplicam a todo o coeficiente e não aos coeficientes internos que multiplicam as variáveis independentes). Os resultados são satisfatórios porém muito limitados pois considerações simplificadoras acabam não correspondendo ao sistema real de um míssil.

Mehra *et al.*, 1998 (30), desenvolve um controlador MPC para um míssil da Marinha dos EUA e é demonstrada a viabilidade de implementação desse controlador. São considerados no problema de otimização os limites de deflexão máxima das superfícies de controle, limite de máxima taxa de deflexão das superfícies de controle e limites de aceleração linear. É utilizada a dinâmica completa longitudinal + latero-direcional (6-DOF) de um modelo de míssil cruciforme axissimétrico STT (*Skid-to-Turn*). Nas equações dinâmicas, o autor considera a variável  $V$  (velocidade total do míssil) no lugar de  $u$  (componente da velocidade do míssil na direção  $x_b$  no referencial do corpo do míssil) o que é diferente das formulações clássicas e pode ser considerado uma aproximação grosseira. O autor considera que não há propulsão (*post-burnout*), ou seja, após a queima do combustível o míssil está sujeito apenas às forças aerodinâmicas e da gravidade. O autor considera que a velocidade do míssil é constante e adota uma definição de  $\beta$  (ângulo de derrapagem) diferente da definição usual (Euler) de  $\beta$  utilizadas em livros textos de aerodinâmica. Os coeficientes aerodinâmicos são dados na forma de tabelas (dados experimentais obtidos em túnel de vento) e são então interpolados para fazer as simulações em diferentes pontos de operação. Os resultados das simulações para o MPC nominal (modelo e planta idênticos) são muito satisfatórios e demonstram a viabilidade da técnica. Os resultados para o modelo com incertezas nos coeficientes mostram que a robustez inerente do controlador tem um desempenho insatisfatório (sobressinal superior a 10% para maioria dos casos). Nenhuma técnica de MPC Robusto foi utilizada. O tempo médio de resolução do problema de otimização foi, em 10% dos casos, superior ao período de amostragem, o que demonstra que em uma aplicação de tempo real o piloto automático não conseguiria calcular o sinal de controle a ser aplicado em 10% dos casos o que é considerado crítico para a aplicação que se propõe.

Chen *et al.*, 2003 (31), apresenta uma nova lei de controle não linear MPC para sistemas não lineares multivariáveis. É mostrado que a dinâmica de malha fechada é dependente explicitamente de parâmetros de projetos (tempo de predição e ordem do controlador). A principal característica dessa lei de controle é que uma forma analítica explícita é dada, otimização *on-line* não é necessária, estabilidade do sistema em malha

fechada é garantida, todo o procedimento de projeto é transparente para o projetista e o controlador resultante é fácil de implementar. O controlador é projetado em tempo contínuo. A predição dos estados e da saída é feita via expansão em série de Taylor das equações dinâmicas do sistema. Algumas considerações são assumidas com relação ao sistema não linear: (a) a dinâmica zero é estável. (b) todos os estados estão disponível para medição. (c) a saída  $y(t)$  e o sinal de referência  $w(t)$  são suficientemente o mesmo número de vezes continuamente diferenciáveis em relação a  $t$ . A lei de controle é calculada de forma analítica *off-line*, portanto, a implementação do controlador em tempo real é factível e nenhuma otimização *on-line* precisa ser feita. Considera-se apenas a dinâmica longitudinal do míssil (3-DOF), com os parâmetros iguais aos adotados nessa dissertação. A dinâmica do atuador é aproximada por um atraso de primeira ordem. Considera-se uma restrição no atuador de máximo ângulo de deflexão de  $\pm 30^\circ$ . A variável controlada é o ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e as especificações de desempenho são dadas em termos de características da resposta ao degrau no domínio do tempo: para todos os comandos de ângulo de ataque  $|w(t)| \leq 20^\circ$  o sobressinal deve ser menor que 3% e o tempo de acomodação de 5% menor que 0,2 s.

Hu e Chen, 2007 (32), apresentam uma aplicação do controle MPC no projeto de piloto automático de míssil não linear com dinâmica rápida. Este trabalho apresenta uma abordagem para solução de 3 questões geralmente encontradas no projeto de controlador para essa aplicação, quais sejam: (a) a escolha do índice de desempenho (ou função objetivo), em particular do termo de ponderação terminal (que multiplica o estado final no horizonte de predição); (b) a perda do mínimo global em um problema de otimização não convexo; e (c) a limitação do tempo de computação imposta pela necessidade de amostragem rápida. O artigo apresenta um algoritmo MPC para controle da dinâmica latero-direcional de um modelo de míssil. Os autores têm a preocupação de tratar do problema da alta taxa de amostragem e mostram que o algoritmo de otimização em uma aplicação em tempo real deve ser capaz de solucionar o problema em um tempo menor que o período de amostragem, portanto, introduzem o conceito de solução sub-ótima para a aplicação em tempo real desse tipo de técnica. Os autores também se preocupam com a estimativa inicial da solução do problema de controle ótimo (a sequência de sinais de controle). É muito comum que estimativas iniciais ruins levem a instabilidade ou degradação do desempenho em problemas de otimização não lineares. O modelo de míssil adotado é um míssil ar-ar do tipo BTT (*Bank-to-Turn*), que têm configuração mais parecida com aeronaves de asa fixa. As variáveis envolvidas na dinâmica latero-direcional são: ângulo de derrapagem ( $\beta$ ), velocidade angular de rolagem ( $p$ ), velocidade angular de guinada ( $r$ ), ângulo de rolagem ( $\phi$ ), ângulo efetivo de deflexão das aletas de rolagem ( $\delta_a$ ) e ângulo efetivo de deflexão as aletas de guinada ( $\delta_r$ ). Os autores não consideram restrições de taxa máxima de deflexão das aletas, dinâmica do atuador, perturbações ou incertezas no modelo. Dado o sistema não linear original  $\dot{x} = f(x, u)$ , a dinâmica latero-direcional é representada por uma equação



linearizada em espaço de estados da seguinte forma:  $\dot{x} = \mathbf{A}(x, u)x + \mathbf{B}(x, u)u = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial u}u$ . Define-se um envoltório convexo delimitado por um conjunto de vértices dados por pares  $[\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot)]$ , em que  $\mathbf{A}(\cdot)$  e  $\mathbf{B}(\cdot)$  correspondem às matrizes da dinâmica linear em espaço de estado, descritas anteriormente. Os autores transformam o modelo em tempo contínuo para tempo discreto. Uma importante contribuição do artigo é a elaboração de um método para determinação da matriz  $R$  de ponderação terminal na função objetivo a partir da região de estabilidade em vez da região terminal. Os autores explicam que as simulações são feitas utilizando o modelo não linear completo, e que o modelo aproximado é utilizado apenas para predição do controlador MPC, informam que sistemas de piloto automático de mísseis tem uma frequência típica de 80 Hz e que, portanto, isso implica em um período de amostragem de 12,5 ms. Os autores consideram que o controlador precisa solucionar o problema de otimização em um tempo de 500 ms, e explicam que fizeram essa escolha devido ao fato de que em aplicações em tempo real, são utilizados computadores mais rápidos, dedicados e com códigos otimizados, porém não fazem essa demonstração de forma clara (seria necessário que o computador real do piloto automático executasse a mesma tarefa de otimização 40x mais rápido que o computador utilizado na simulação, o que não parece ser factível). É possível inferir, a partir da análise de trabalhos semelhantes, que muito provavelmente na época da publicação deste trabalho não houvesse computadores rápidos o suficiente, mesmo os de aplicação militar, que fossem capazes de resolver o problema de otimização, do piloto automático, na frequência desejada de 80 Hz.

Bachtiar *et al.*, 2014 (28), propõem um esquema MPC para piloto automático da dinâmica longitudinal de míssil utilizando um modelo de previsão não linear que seja capaz de levar o míssil para próximo dos limites operacionais. Os autores citam que apesar das vantagens teóricas do controle MPC, aplicações do MPC em pilotos automáticos de mísseis são raras. Isso se deve principalmente ao fato de que o MPC demanda alto custo computacional o que pode ser problemático para aplicações em áreas onde a planta possui dinâmica muito rápida e não linear, que é o caso dos mísseis. Os autores citam também que ao utilizar um modelo de previsão não linear na técnica MPC resulta em um problema de otimização não convexo. Os primeiros métodos para MPC utilizando modelos de predição não lineares utilizaram a técnica de múltiplos disparos (*multiple shooting*), proposta por Bock e Plitt em (33) e colocação (*collocation*), proposta por Biegler em (34). Para atingir tempo computacional necessário para aplicações em mísseis, o autor utiliza um algoritmo envolvendo Programação Quadrática Sequencial, ou SQP (do inglês *Sequential Quadratic Programming*). Para garantir estabilidade é utilizada uma restrição terminal elipsoidal. Para fins de comparação, o desempenho de acompanhamento de trajetória e o custo computacional da técnica proposta são comparados com outras técnicas que utilizam modelo de predição linear e outros tipos de restrição terminal. O modelo de míssil adotado é semelhante ao utilizado nessa dissertação, trata-se de um modelo de míssil ar-ar axissimétrico STT. A análise se restringe apenas à dinâmica longitudinal. O

autor assume que a velocidade do míssil é constante com número de Mach  $M = 2,5$ . A dinâmica do atuador é de segunda ordem. Os autores consideram restrições nos estados, na entrada e na saída. Para comparação, utiliza-se também um modelo de predição linear em que as equações dinâmicas são linearizadas em cada ponto de operação. Quanto à região terminal os autores consideram 3 tipos de restrições terminais, uma do tipo elipsoidal, uma politópica e por último um caso sem restrição terminal. É considerado também que o período de amostragem típico para esse tipo de aplicação é de  $T_s = 10$  ms. Quanto à comparação entre o desempenho dos MPCs com modelo de predição não linear e linear, o não linear apresentou desempenho superior, enquanto o linear apresentou resposta mais oscilatória. Quanto ao tempo médio de processamento a cada intervalo de amostragem, o MPC Linear sem restrição terminal apresentou tempo médio de 5,4 ms enquanto que o MPC Não Linear apresentou um tempo médio de 17,5 ms, portanto, nesse caso o MPC Não Linear não seria viável para aplicação em tempo real já que extrapola o período de amostragem de 10 ms.

Bachtiar *et al.*, 2017 (35), apresentam um controlador MPC para controle integrado de mísseis, em que as malhas de guiamento e do piloto automático são unificadas. O controlador MPC utiliza um modelo de predição não linear da dinâmica completa de engajamento de míssil e alvo, assim como considera restrições de estado e de entrada, estendendo resultados de trabalhos anteriores. É apresentado também uma técnica de otimização multiobjetivos, em que se procura maximizar o desempenho (medido pela distância de erro entre míssil e alvo) e minimizar o custo computacional (medido pelo tamanho do horizonte de predição) a partir de combinações de dois parâmetros, o período de amostragem  $h$  e o horizonte de predição  $N$ . O controlador MPC desenvolvido é comparado com o controlador de navegação proporcional tradicionalmente utilizado em aplicações de piloto automático de mísseis. O modelo de míssil adotado é um míssil STT cruciforme axissimétrico, controlado por aletas de cauda e com estabilização de rolagem. Apenas a dinâmica longitudinal é considerada. A velocidade é constante ao longo da trajetória com número de Mach  $M = 2,5$ . O atuador é modelado por um sistema de segunda ordem. A entrada é a taxa de deflexão da aleta de cauda, em vez do comando de deflexão de aleta, que é usualmente utilizado. O controlador é denominado de iMAG (do inglês *integrated Model Predictive Autopilot and Guidance*). Os autores salientam que algumas aplicações podem utilizar um modelo de predição linearizado ou simplificado do modelo original da planta, que é o caso adotado nessa dissertação, em que para predição, um modelo aproximado é utilizado para reduzir o custo computacional do Problema de Controle Ótimo, ou OCP (do inglês *Optimal Control Problem*). Os autores consideram que os estados estão disponíveis para medição, ainda que com ruídos. Nesse artigo o OCP é solucionado utilizando um algoritmo SQP. O tamanho do OCP é proporcional ao número de variáveis de otimização, que por sua vez é proporcional ao tamanho do horizonte de predição  $N$ . O algoritmo de otimização utilizado para solucionar o OCP é o método de pontos interiores. Os autores

comentam que para implementar o controlador em tempo real pode-se lançar mão de técnicas para reduzir o custo computacional, tais como: utilizar linguagem compilada, processamento paralelo ou elevar a frequência de *clock* do processador. Para as simulações foram escolhidos os seguintes parâmetros:  $h = 25$  ms e  $N = 12$ . Para essa configuração, o tempo máximo de processamento do OCP é de aproximadamente 10 ms, portanto, o sistema de controle é capaz de solucionar o OCP dentro do período de amostragem com ampla margem. O desempenho do iMAG é muito superior ao do piloto automático com navegação proporcional, mesmo na presença de ruídos dos sensores, atingindo o alvo com precisão de  $\pm 3$  m o que é suficiente para causar grandes danos ao alvo. Não foi analisada a robustez do controlador MPC projetado quanto à incertezas no modelo.

Mais recentemente, Park *et al.*, 2020 (36), utilizaram o controle MPC para guiamento e controle integrados de mísseis contra um alvo manobrável. São desenvolvidas as equações de movimento para a fase terminal, levando em consideração tanto as dinâmicas de curto período quanto as dinâmicas do atuador do míssil. O problema de otimização convexa é resolvido considerando restrições de desigualdade que consistem em limites de aceleração e ângulo de visada. Os autores observam que tradicionalmente o sistema de guiamento e do piloto automático são projetados separadamente. Ao realizar a integração entre os dois sistemas se remove o atraso entre a aceleração comandada e aceleração atingida. O artigo propõe além da integração dos sistemas, um algoritmo de predição da trajetória do alvo, utilizando como medida o ângulo de visada, que precisa ser estimado e está sujeito à ruídos. Para isso, um Filtro de Kalman Estendido, ou EKF (do inglês *Extended Kalman Filter*) discreto é utilizado, e um ajuste polinomial é aplicado para a predição da trajetória futura. O controlador MPC proposto considera restrições de estados e de saída. O problema de controle ótimo é solucionado utilizando o método primal-dual de pontos interiores. Uma simulação é realizada a fim de avaliar o desempenho do controlador proposto e a viabilidade da técnica e simulações de Monte-Carlo são realizadas para avaliar a robustez do método proposto quanto à diferentes estados iniciais, porém não há avaliação de robustez quanto à incertezas paramétricas. O modelo de míssil adotado corresponde à dinâmica longitudinal de um míssil STT. Assume-se velocidade constante ao longo da trajetória. A gravidade é desprezada no modelo. Considera-se a dinâmica do atuador como um sistema de atraso de primeira ordem. Os autores utilizam um ajuste polinomial de 2ª ordem para predição da posição futura do alvo, com base em um algoritmo de mínimos quadrados e utilizando medições passadas para ajuste da curva. O tempo de engajamento é de 3s e o tempo de amostragem é de 50 ms, portanto o horizonte de predição é de  $N = 60$ . A velocidade do míssil é de  $V_M = 380$  m/s. A distância de erro final utilizando o algoritmo proposto é de 0,0668 m enquanto que o MPC sem predição da trajetória do alvo tem uma distância de erro de 5,1782 m. Simulações com diferentes períodos de amostragem e de tamanho do horizonte de predição são realizadas a fim de avaliar o tempo médio de solução do OCP. Apenas algumas simulações foram solucionadas dentro do período de amostragem.

O período de amostragem viável para implementação em tempo real, foi igual ou superior a 50 ms. Deve-se considerar que esse período de amostragem limita em muito a aplicação do MPC proposto no controle do piloto automático de mísseis, e que melhorias precisam ser feitas para atingir um período de amostragem inferior a 20ms, ou 50 Hz, que é o valor mínimo típico de frequência para esse tipo de aplicação. As simulações de Monte-Carlo são realizadas para diferentes condições iniciais e todas elas têm desempenho satisfatório em termos de exigência para a distância de erro, porém os autores não consideram incertezas no modelo.

As Tabelas 15 e 16, do Apêndice B, resumem os principais dados relevantes para comparação das técnicas e dos resultados de cada artigo. Como não há uma padronização de simbologia e notação entre os artigos, foi adotado nessas tabelas a simbologia e notação padrões desta dissertação. Em termos de formulação do problema, as principais diferenças entre os artigos são: número de estados, função custo, restrições, tamanho do horizonte de predição e a forma de solução (se é calculada *off-line* ou *on-line*). Todos os artigos avaliaram o desempenho nominal do controlador e apenas alguns avaliaram a estabilidade robusta do projeto (i.e. se o sistema em malha fechada permanece estável na presença de incertezas). Nenhum dos artigos adotou técnicas de controle MPC Robusto. Todos os artigos avaliados consideraram a velocidade do míssil como constante durante a trajetória. Cabe mencionar que para a aplicação em tempo real do controlador MPC é condição essencial que o OCP seja solucionado em um tempo menor que o período de amostragem, portanto, não basta que a técnica seja teoricamente viável. Além disso, especificamente para aplicações de piloto automático, devido à dinâmica não linear e rápida do míssil, tipicamente a frequência do controlador deve estar entre 50 a 100 Hz, ou seja, o período de amostragem deve ser de 10 a 20 ms. Uma curiosidade a ser acrescentada é a de que todos os trabalhos anteriores, exceto o de Mehra *et al.* (30), utilizaram um horizonte de controle igual ao de predição e nessa dissertação será demonstrado que é possível adotar um horizonte de controle menor que o de predição e assim reduzir o tempo de solução do OCP, mantendo a viabilidade do problema.

### 1.4.1 Contribuições

Esta dissertação traz contribuições significativas na área de controle de sistemas não lineares, focando no controle de mísseis por meio da técnica MPC, destacando-se:

- Proposição de uma nova fórmula para cálculo da Pressão Dinâmica ( $Q$ ) para fluidos compressíveis, que oferece uma representação mais realista em comparação com os trabalhos citados nas Seções 1.3 e 1.4. Isso permite uma modelagem *quasi-LPV* realista, com sua eficácia comprovada através de simulações e análises gráficas.
- Introdução de uma metodologia MPC com dois modelos internos, combinando um

modelo simplificado para predição e um modelo completo para atualização de estados, visando otimizar o controle em curtos horizontes de tempo e com altas taxas de amostragem. Esta abordagem, ainda não documentada, formalmente, na literatura, propicia uma implementação eficiente para o controle de mísseis.

- Desenvolvimento de um controlador MPC de fácil implementação, que permite ajuste das matrizes de ponderação e horizontes de predição e controle, de maneira simplificada, sem necessidade de otimização prévia. As simulações demonstram sua capacidade de implementação em tempo real, adequando-se a sistemas de piloto automático de mísseis, com um tempo de resposta compatível com os requisitos de amostragem típicos dessa aplicação.

## 1.5 Estrutura

A dissertação está estruturada para fornecer uma compreensão abrangente do MPC e sua aplicação no controle de mísseis. Cada capítulo foi cuidadosamente planejado para construir sobre os conceitos anteriores, culminando na demonstração da eficácia desta técnica. Portanto, ela está organizada da seguinte forma:

O Capítulo 2 discute os fundamentos do Controle MPC Nominal, com uma ênfase específica nas suas formas Linear e Não Linear. Neste capítulo são apresentadas as condições de convergência e estabilidade que devem ser satisfeitas para garantir a controlabilidade do sistema, além disso, é apresentado o conceito de MPC Subótimo. O Capítulo 3 apresenta um sistema de classificações de mísseis quanto ao tipo de guiamento, descreve as partes componentes e as equações matemáticas que governam a sua dinâmica, além disso, apresenta o modelo em espaço de estados da dinâmica não linear de um míssil axissimétrico controlado por aletas. É apresentada tanto a dinâmica completa (6-DOF), quanto a dinâmica longitudinal (3-DOF) e suas simplificações. No Capítulo 4, é aplicado o MPC Nominal Não Linear no controle do míssil teórico apresentado no Capítulo 3. Ainda no Capítulo 4, são analisadas as dificuldades do problema de controle do piloto automático e os requisitos específicos de desempenho, além disso, o desempenho do controlador MPC projetado nesta dissertação é comparado com o desempenho de um controlador projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2), através de simulações. Por fim, o Capítulo 5 resume as conclusões, as contribuições desta dissertação para o campo, limitações da pesquisa atual e apresenta sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CONTROLE MPC NOMINAL

Como apresentado no Capítulo 1 e em (7), o MPC é, resumidamente, uma forma de controle na qual a ação de controle é obtida resolvendo-se *on-line*, a cada instante de amostragem, um OCP de horizonte finito no qual o estado inicial é o estado atual da planta. A otimização resulta em uma sequência finita de controle ( $\mathbf{u}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ ), e apenas o primeiro elemento desta sequência ( $u_0^*$ ) é aplicado à planta. O MPC difere, portanto, do controle convencional no qual a lei de controle é pré-calculada *off-line*. Como essa técnica de controle é altamente modelo-dependente, implica que no caso de não haver incertezas entre o modelo e planta e de todas as variáveis de estado estarem disponíveis para medição (ou serem observáveis pela medição da saída), refere-se ao MPC como MPC Nominal.

O MPC Nominal assume que não há distinção entre o modelo interno do controlador e a planta real. Portanto, trata-se de um problema de otimização em malha aberta em que a evolução dos estados internos do modelo acompanham a evolução dos estados reais da planta. Esse caso é particularmente importante, apesar de raramente ocorrer na prática, porque importantes propriedades de estabilidade e desempenho podem ser facilmente estabelecidas. Não é utilizada a realimentação (*feedback*) pois não há necessidade, já que o modelo segue perfeitamente o comportamento da planta.

Neste capítulo, é apresentada a fundamentação teórica sobre a técnica MPC Nominal e sua aplicação para sistemas lineares e não lineares, bem como estabelecidas algumas propriedades que devem ser satisfeitas pelo sistema a ser controlado para que haja garantia de estabilidade nominal (i.e. estabilidade na ausência de incertezas). É mostrado que, se o OCP que define o MPC pode ser solucionado para o instante inicial ( $k_0$ ), então ele pode ser solucionado para todo instante  $k > k_0$  (essa propriedade é denominada viabilidade recursiva). Mostra-se também que, caso o OCP tenha solução viável para  $k_0$ , a função custo pode sempre ser reduzida a cada instante  $k > k_0$ , o que prova a estabilidade exponencial ou assintótica do ponto de equilíbrio ( $x_r, u_r$ ). No algoritmo proposto neste capítulo, a redução na função custo, que é a base da prova de estabilidade, se baseia na consideração de que o próximo estado da planta é exatamente igual ao predito pelo modelo completo. Ainda que se utilize, no OCP, um modelo simplificado (aproximação do modelo completo) para predição, ao se atualizar, o estado atual ( $x$ ) do sistema, para o próximo estado ( $x^+$ ), utilizando como sinal de controle a solução atual do OCP ( $u = u_0^*$ ), faz-se uso do modelo completo ( $f(x, u)$ ), portanto, a partir do estado inicial  $x = x_0$  conhecido, o próximo estado ( $x_{mpc}^+ = f_{mpc}(x_0, u_0^*)$ ) é exatamente igual ao estado da planta ( $x^+ = f(x_0, u_0^*)$ ), pois  $f_{mpc}(\cdot) = f(\cdot)$ .

## 2.1 Fundamentos do Controle MPC Nominal

A maioria dos sistemas físicos pode ser descrita por um sistema de equações diferenciais não lineares em tempo contínuo conforme a Equação 2.1:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_c(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  correspondem respectivamente aos vetores de estados, controles e saídas. Assume-se que a função  $f_c(\cdot)$  é contínua e satisfaz  $f_c(0, 0, t) = 0, \forall t$ . Na Equação 2.1, utiliza-se explicitamente a dependência da variável  $t$  para mostrar que se trata de equações diferenciais em tempo contínuo. Como se está interessado em utilizar métodos numéricos em computadores digitais, transforma-se o modelo em tempo contínuo para tempo discreto com taxa de amostragem  $T_s$ , cuja representação em equações de diferenças é dada pela Equação 2.2.

$$\begin{aligned} x^+ &= f(x, u) \\ y &= h(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que se utiliza a notação  $x^+$  para representar o estado do sistema no instante  $k + 1$ , i.e.  $x^+ = x_{k+1} = x(k + 1) = x(t + kT_s)$ . Para facilitar a leitura e tornar a notação mais enxuta, a partir de agora, somente é utilizada a notação com subíndice  $k$ , quando for necessária no contexto em que a equação estiver inserida. Nas equações em que o subíndice estiver omitido, o leitor deve considerar as seguintes equivalências:  $x = x_k$ ,  $x^+ = x_{k+1}$ ,  $u = u_k$  e  $y = y_k$ .

Ainda para simplificar a exposição e tornar a notação mais enxuta ao longo desta dissertação, optou-se pelo uso do símbolo  $=$  em detrimento do tradicional  $:=$  ou  $\triangleq$ , comumente empregado para indicar que o termo à esquerda é definido pelo termo à direita. Essa escolha não modifica o significado matemático das expressões introduzidas. Ao invés disso, serve unicamente para facilitar a leitura. Esta convenção é consistentemente aplicada, no texto que se segue, sempre que novas definições ou conceitos forem apresentados, e sua adoção é claramente indicada nas seções relevantes do texto.

Define-se agora, a sequência de sinais de controle para o horizonte de predição  $N$ :

$$\mathbf{u} = \{u_k\}_{k=0, \dots, N-1} = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\} \quad (2.3)$$

A notação em negrito significa que  $\mathbf{u}$  é uma sequência. Importante observar que  $\mathbf{u}$  possui  $N$  elementos. Cada sinal de controle, corresponde a um estado seguinte, portanto,

a sequência de estados, definida pela Equação 2.4, possui  $N + 1$  elementos.

$$\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=0,\dots,N} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \quad (2.4)$$

O objetivo do controlador MPC é fazer com que a saída medida acompanhe uma trajetória de referência, ou seja, que a saída se aproxime assintoticamente de um sinal de referência ( $y_r$ ), à medida que o tempo passa. O sinal de referência não precisa ser constante. A cada instante, o controlador MPC recebe um sinal de referência e calcula uma lei de controle para o instante atual, com base no modelo de predição e nas restrições do OCP. Portanto, em resumo, o objetivo do controlador MPC, a cada instante de amostragem, pode ser expresso por:

- 1 – Encontrar  $\mathbf{u}$  tal que  $y_k \rightarrow y_r, k \rightarrow \infty$ ,
- 2 – Aplica-se  $u_0^*$  no instante atual e no próximo instante repete-se o processo.

Se o erro de acompanhamento de referência for definido pela Equação 2.5, então o objetivo é fazer com que  $e_k \rightarrow 0$  à medida que  $k \rightarrow \infty$ .

$$e_k = y_k - y_r \quad (2.5)$$

Caso o sinal de referência seja “alcançável”, ou seja, caso  $y_r$  pertença à  $\text{Im}(h(\cdot))$  implica que existe  $(x_r, u_r)$ , tal que  $y_r = h(x_r, u_r)$ . Caso  $(x_r, u_r)$  seja um ponto de equilíbrio (não necessariamente estável), implica que existe  $(x_r, u_r)$  tal que  $x_r = f(x_r, u_r)$ . A partir dessas definições, é possível apresentar o próximo ingrediente do MPC, chamado de função custo. Para cada amostra o custo amostral (ou custo de estágio) é dado por:

$$\ell(x_k, u_k) = \|x_k - x_r\|_Q^2 + \|u_k - u_r\|_R^2 \quad (2.6)$$

em que  $Q = Q^T$  e  $R = R^T$  são matrizes definidas positivas ( $Q, R \succ 0$ ), e se utiliza a notação  $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$  para representar a norma quadrática do vetor  $x$  ponderada pela matriz  $Q$ . Para um horizonte de predição infinito ( $N = \infty$ ), a função custo de horizonte infinito é definida por:

$$V_\infty(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell(x_k, u_k) \quad (2.7)$$

Devido à restrição de solucionar o problema de controle em tempo finito, geralmente se utiliza um horizonte de predição  $N$  finito. Portanto, define-se abaixo a função custo de horizonte finito em que se introduz uma parcela  $V_f(\cdot)$ , chamada de função custo terminal, para aproximar a solução semi-infinita:



$$V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_k, u_k) + V_f(x_N) \quad (2.8)$$

A função custo terminal  $V_f(\cdot)$  é definida por:

$$V_f(x_N) = \|x_N - x_r\|_P^2 \quad (2.9)$$

em que  $P = P^T$  também é uma matriz definida positiva ( $P \succ 0$ ).

A grande vantagem do MPC é a capacidade de lidar diretamente com restrições na descrição do problema de otimização. As restrições de estado e de controle devem ser satisfeitas para todo  $k$  e são definidas por conjuntos ou regiões conforme definições a seguir:

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{X}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \\ x_N &\in \mathbb{X}_f \\ u &\in \mathbb{U}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \{x \in \mathbb{R}^n | g_x(x) \leq 0\} \\ \mathbb{X}_f &= \{x_N \in \mathbb{R}^n | g_{x_f}(x_N) \leq 0\} \\ \mathbb{U} &= \{u \in \mathbb{R}^m | g_u(u) \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

As funções vetoriais  $g_i(\cdot)$  devem ser convexas, contínuas e duplamente diferenciáveis. Geralmente adota-se restrições de desigualdade dadas por uma transformação linear do tipo  $Ex \leq 0$  em que  $E$  é uma matriz  $z \times n$ , em que  $z$  é o número de restrições e  $n$  é o número de estados. No entanto, desde que as condições acima sejam satisfeitas, pode-se adotar a restrição na forma de função vetorial  $g_i(\cdot) \leq 0$ . Assume-se que o conjunto  $\mathbb{X}$  é fechado,  $\mathbb{U}$  é compacto, que ambos contêm a origem em seus interiores e  $\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}$ .

Portanto, a partir das definições anteriores, é possível definir o problema de otimização completo do controlador MPC, dado pela Equação 2.12:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_0) &= \min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mathbf{u}) \\ &s.a. \\ x^+ &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \\ x(0) &= x_0 \\ x &\in \mathbb{X}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \\ x_N &\in \mathbb{X}_f \\ u &\in \mathbb{U}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Define-se a seguir o conjunto de estados ( $\mathbb{X}_{0,N}$ ) para o qual o problema  $\mathcal{P}_N$  tenha solução, ou seja, o conjunto de estados que podem ser levados a  $\mathbb{X}_f$  em  $N$  passos e que satisfazem as restrições de estado e de controle:

$$\mathbb{X}_{0,N} = \{x_0 \in \mathbb{X} : \text{problema } \mathcal{P}_N \text{ possui solução, } \mathbf{u} \neq \emptyset\} \quad (2.13)$$

Claramente  $\mathbb{X}_{0,N} \subset \mathbb{X}$ . Para um dado  $x$ , a solução de  $\mathcal{P}_N$  existe se:

- $V_N: \mathbf{u} \mapsto V_N(x, \mathbf{u})$  é contínua.
- $\mathbb{U}$  é compacto.
- $x \in \mathbb{X}_{0,N}$ .

Conforme Mayne (37), essas condições são satisfeitas se as seguintes condições forem verdadeiras:

**A1:**  $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$  e  $V_f(\cdot)$  forem contínuas.

**A2:**  $f(0, 0) = 0$ ,  $\ell(0, 0) = 0$  e  $V_f(0) = 0$ .

**A3:**  $\mathbb{U}$  é compacto e contém a origem em seu interior.

**A4:**  $\mathbb{X}$  é fechado e contém a origem em seu interior.

Na sequência do trabalho, as condições anteriores são assumidas como verdadeiras.

A solução de  $\mathcal{P}_N$  é a trajetória ótima dos sinais de controle que minimizam a função custo  $V_N(\cdot)$ :

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \{V_N(x, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \mathbf{x} \in \mathbb{X}\} = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\} \quad (2.14)$$

A lei de controle implícita do MPC corresponde ao primeiro elemento dessa sequência:

$$u = \kappa(x) = u_0^* \quad (2.15)$$

Apenas o sinal  $u_0^*$  é aplicado no instante  $k$ , e então o problema de otimização é solucionado novamente a cada intervalo de amostragem, de maneira *on-line*. A Figura 1 apresenta graficamente os conceitos definidos acima. Nesta figura, a saída  $y_{k+1}$ , da planta, é exatamente igual à prevista pelo modelo pois o modelo é exato (não há incertezas).

É possível modificar o problema de otimização adotando uma função  $f'(\cdot)$ , para predição dos estados futuros, que seja uma aproximação de  $f(\cdot)$ , mas que possua menos

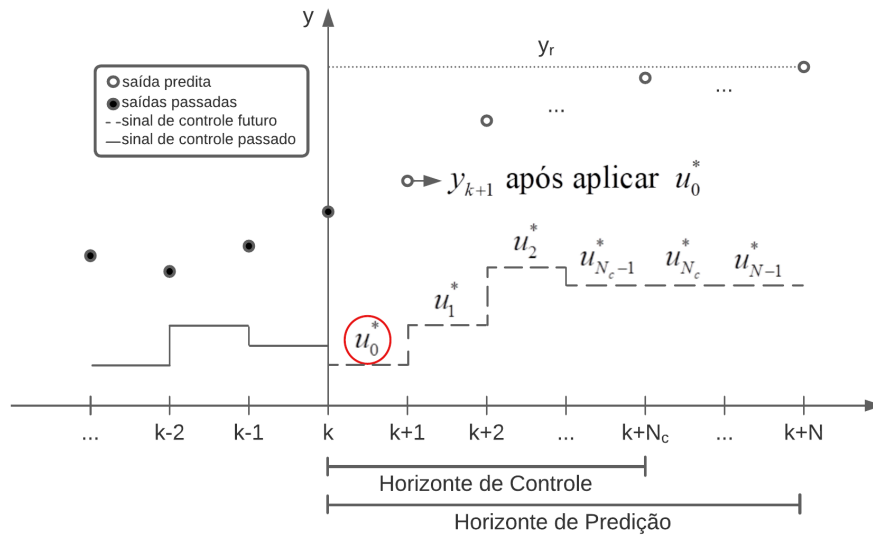


Figura 1 – Gráfico exemplificando os principais conceitos utilizados na técnica MPC.

variáveis de decisão e seja mais simples de calcular, reduzindo assim o tempo de solução do OCP. Assumindo que  $f'(\cdot)$  seja uma aproximação “razoável” de  $f(\cdot)$  tal que a diferença entre elas no horizonte de previsão  $N$  não seja muito significativa, e adotando a função  $f(\cdot)$  para atualizar o estado ( $x^+ = f(x, u_0^*)$ ), reduz-se o erro de aproximação para o erro de 1 amostra apenas, e a lei de controle  $\kappa'(x)$ , calculada utilizando  $f'(\cdot)$  para previsão, é aproximadamente igual à lei de controle  $\kappa(x)$  que seria calculada utilizando  $f(\cdot)$  para previsão, com a vantagem de ser calculada muito mais rapidamente. A Figura 2 apresenta as características dessa abordagem. Nesta figura o erro entre  $y_{k+1}$  previsto por  $f'(\cdot)$  e  $y_{k+1}$  real após aplicar  $u_0^*$  ao modelo completo ( $f(\cdot)$ ) está propositalmente exagerado para facilitar a visualização. Na prática, essa diferença é imperceptível se  $f'(\cdot)$  for adequadamente formulada.

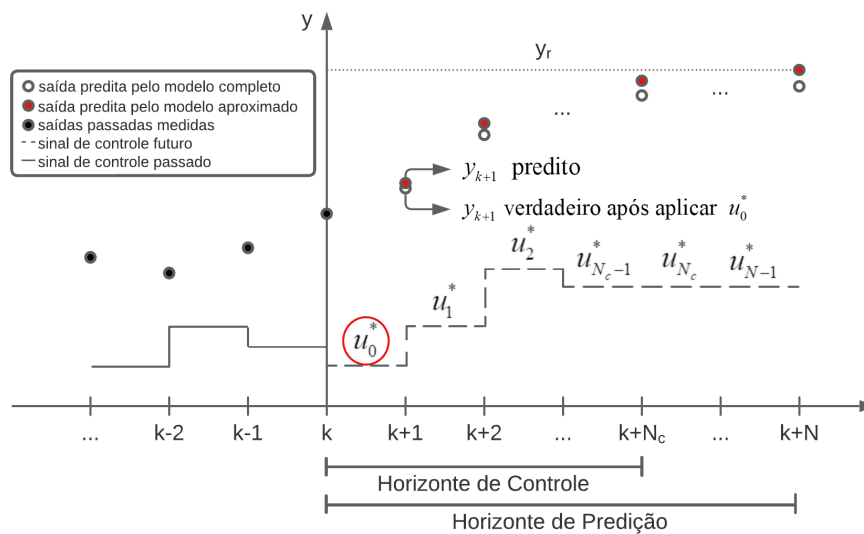


Figura 2 – Diferença entre a saída prevista pelo modelo simplificado e pelo modelo completo.

## 2.2 Condições de Convergência

Esta seção apresenta de forma concisa as principais condições que precisam ser satisfeitas para garantia de convergência do sistema controlado pelo MPC. A princípio, considera-se como ponto de equilíbrio a origem, ou seja  $(x, u) = (0, 0)$  tal que  $x^+ = f(0, 0) = 0$ , mas as demonstrações podem ser modificados para o caso em que o ponto de equilíbrio seja  $(x, u) = (x_r, u_r)$ , tal que  $x^+ = f(x_r, u_r) = x_r$ .

Primeiramente, considera-se o problema de horizonte infinito para estabelecer algumas definições e propriedades de convergência. Portanto, considere o problema de horizonte infinito dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_\infty(x_0) &= \min_{\mathbf{u}} V_\infty(x, \mathbf{u}) \\
 &s.a. \\
 x^+ &= f(x, u) \\
 y &= h(x, u) \\
 x(0) &= x_0 \\
 x &\in \mathbb{X}, \forall k \in \{0, \dots, \infty\} \\
 u &\in \mathbb{U}, \forall k \in \{0, \dots, \infty\}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Define-se a seguir o conjunto de estados iniciais  $(\mathbb{X}_{0,\infty})$  para o qual o problema  $\mathcal{P}_\infty$  tenha solução:

$$\mathbb{X}_{0,\infty} = \{x_0 \in \mathbb{X} : \text{problema } \mathcal{P}_\infty \text{ possui solução e } V_\infty(x, \mathbf{u}) < +\infty\} \tag{2.17}$$

Claramente,  $\mathbb{X}_{0,\infty} \subset \mathbb{X}$ , pois  $x_0$  também precisa satisfazer as restrições de estado. Para que a função custo  $V_\infty(\cdot)$  seja finita, o seguinte limite deve ser verdadeiro:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell(x_k, u_k) = 0 \tag{2.18}$$

E como  $\ell(x_k, u_k) > 0$  para todo  $(x_k, u_k) \neq 0$ , implica que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} u_k &= 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto, a sequência de controle gerada pela solução do problema de otimização de horizonte infinito leva o sistema para a origem. Para que essa solução exista, o sistema deve ser estabilizável.

Na prática, nem sempre é possível solucionar o problema de horizonte infinito em tempo finito. Por isso a necessidade de transformar o problema em um problema de horizonte finito. Assumindo que no instante  $k = 0$  seja determinada a ação de controle  $u_0^*$  solucionando o problema de horizonte finito  $\mathcal{P}_N$ , se  $\mathcal{P}_N$  converge para  $\mathcal{P}_\infty$  à medida que  $N \rightarrow \infty$ , o efeito de aumentar  $N$  na solução de  $u_0^*$  deve diminuir à medida que  $N \rightarrow \infty$ . Calculando-se o limite da Equação 2.8 para  $N \rightarrow \infty$  e igualando-se à Equação 2.7, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x, \mathbf{u}) &= V_\infty(x, \mathbf{u}) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_k, u_k) + V_f(x_N) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \ell(x_k, u_k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \ell(x_k, u_k) + \lim_{N \rightarrow \infty} V_f(x_N) &= \sum_{k=0}^{\infty} \ell(x_k, u_k) \\ \therefore V_f(x_N) &= 0 \Leftrightarrow x_N = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por questões de simplicidade computacional, geralmente se quer que  $N$  seja pequeno. O esquema de controle MPC garante a convergência da mesma forma que o problema de horizonte infinito se for imposto que a região terminal seja a origem, ou seja,  $\mathbb{X}_f = \{0\}$  para algum  $N < +\infty$ , isso significa que, se o sistema atingir a região terminal em  $N$  passos, ele irá permanecer em  $\mathbb{X}_f$  enquanto  $u_0^* = 0$ , pois  $f(0, 0) = 0$ . Para isso, é necessário que o sistema seja controlável, o que é mostrado mais adiante.

Inviabilidade do problema  $\mathcal{P}_N$  pode ocorrer, por exemplo, se o sistema não for estabilizável. Também pode ocorrer que as restrições do problema não permitam que a ação de controle seja capaz de levar o sistema para a origem em  $N$  passos, ou seja, que o sistema não seja controlável. Em geral, estabilidade e viabilidade recursiva de  $\mathcal{P}_N$  não são garantidas pela lei de controle do MPC a menos que algumas condições sobre a função custo amostral  $\ell(\cdot)$ , sobre a função custo terminal  $V_f(\cdot)$ , sobre a região terminal  $\mathbb{X}_f$  e sobre a lei de controle na região terminal  $\kappa_f(\cdot)$ , sejam satisfeitas. Na próxima seção são estabelecidas as definições e condições de estabilidade para sistemas discretos.

## 2.3 Condições de Estabilidade

Apesar da convergência assintótica, i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ , ser uma propriedade desejável, geralmente não é suficiente na prática, em outras palavras, convergência não implica em estabilidade. O que se deseja é que o sistema permaneça em uma região próxima do ponto de equilíbrio mesmo quando levemente perturbado, o que é chamado formalmente de estabilidade de Lyapunov. As definições e teoremas estabelecidos a seguir foram retirados

de Borrelli *et al.*, 2017 (38). As demonstrações e provas desses teoremas também podem ser consultadas na mesma referência.

Dado o sistema autônomo  $x^+ = f(x)$ , com  $f(0) = 0$ , define-se estabilidade como:

**Definição 2.1 (Estabilidade de Lyapunov).** *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de  $x^+ = f(x)$  é:*

– **estável** se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_k\| < \epsilon, \forall k \geq 0 \quad (2.21)$$

– **instável** se não for estável

– **assintoticamente estável** em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  se for estável e:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \forall x_0 \in \Omega \quad (2.22)$$

– **globalmente assintoticamente estável** se for assintoticamente estável e  $\Omega = \mathbb{R}^n$

– **exponencialmente estável** se for estável e existirem constantes  $\alpha > 0$  e  $\gamma \in (0, 1)$  tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_k\| \leq \alpha \|x_0\| \gamma^k, \forall k \geq 0 \quad (2.23)$$

Dada a definição acima, o termo “estabilidade” é utilizado no restante do texto exclusivamente para se referir à estabilidade de Lyapunov, conforme estabelecido na Definição 2.1. Para provar a estabilidade do ponto de equilíbrio para um dado sistema se utiliza a chamada *Função de Lyapunov*, i.e., uma função que satisfaça as condições do seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** [Borrelli *et al.*, 2017 (38)] *Considere o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema autônomo  $x^+ = f(x)$ . Dado que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto fechado e limitado que contenha a origem. Assuma que exista uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua na origem, finita para todo  $x \in \Omega$  e tal que:*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (2.24a)$$

$$V(x^+) - V(x) \leq -\alpha(x), \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (2.24b)$$

em que  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua positivo definida. Então  $x = 0$  é assintoticamente estável em  $\Omega$ .

**Definição 2.2.** Uma função  $V(x)$  que satisfaça as condições do Teorema 2.1 é chamada de **Função de Lyapunov**.

A função  $V(\cdot)$  pode ser vista como uma função de energia que é nula na origem e positiva fora dela (condição 2.24a). A condição 2.24b do Teorema 2.1 requer que para qualquer estado  $x_k \in \Omega$ ,  $x_k \neq 0$  a energia diminui (i.e.  $V$  deve ser sempre decrescente) à medida que  $k \rightarrow \infty$ .

O Teorema 2.1 afirma que se for possível encontrar uma função  $V(\cdot)$  que satisfaça as duas condições (2.24a – 2.24b), então os estados do sistema iniciando em qualquer estado inicial  $x_0 \in \Omega$  irão eventualmente convergir para a origem.

Um resultado similar ao do Teorema 2.1 pode ser derivado para estabilidade assintótica global, i.e.,  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.2.** [Borrelli *et al.*, 2017 (38)] Considere o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema  $x^+ = f(x)$ . Suponha que exista uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua na origem, finita para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , e tal que:

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (2.25a)$$

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (2.25b)$$

$$V(x^+) - V(x) \leq -\alpha(x), \forall x \neq 0 \quad (2.25c)$$

em que  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua positivo definida. Então  $x = 0$  é globalmente assintoticamente estável

**Definição 2.3.** Uma função  $V(x)$  que satisfaça a condição 2.25a é chamada de **radialmente ilimitada**.

**Definição 2.4.** Uma função de Lyapunov radialmente ilimitada é chamada de **função de Lyapunov Global**.

## 2.4 Estabilidade de Sistemas Lineares

Considere agora o caso do sistema linear autônomo descrito pela Equação a seguir:

$$x^+ = Ax \quad (2.26)$$

A construção de funções de Lyapunov para sistemas lineares é simples. É possível demonstrar que para sistemas lineares a estabilidade de Lyapunov está de acordo com a definição de estabilidade baseada na localização dos autovalores da matriz  $A$ :

**Teorema 2.3.** [Borrelli *et al.*, 2017 (38)] *Um sistema linear  $x^+ = Ax$  é globalmente assintoticamente estável no sentido Lyapunov se, e somente se, todos os seus autovalores estiverem estritamente dentro do círculo unitário.*

Convém mencionar que para sistemas lineares a estabilidade é sempre global. Uma função de Lyapunov simples que pode ser utilizada para sistemas lineares é a seguinte:

$$V(x) = x^T P x, P \succ 0 \quad (2.27)$$

a qual satisfaz as condições 2.25a– 2.25b do Teorema 2.2. Para testar a condição 2.25c calcula-se:

$$V(x^+) - V(x) = x^{+T} P x^+ - x^T P x = x^T A^T P A x - x^T P x = x^T (A^T P A - P) x \quad (2.28)$$

Assim, a condição 2.25c é satisfeita se for possível encontrar  $P \succ 0$  tal que:

$$A^T P A - P = -Q, Q \succ 0 \quad (2.29)$$

O seguinte Teorema mostra que existe  $P \succ 0$  que satisfaça a Equação 2.29 se, e somente se, o sistema linear 2.26 for assitoticamente estável:

**Teorema 2.4.** [Borrelli *et al.*, 2017 (38)] *Considere o sistema linear  $x^+ = Ax$ . A Equação 2.29 tem uma solução única  $P \succ 0$  para qualquer  $Q \succ 0$  se, e somente se,  $A$  tiver todos os autovalores estritamente dentro do círculo unitário.*

Nas próximas seções, é considerado o sistema linear controlado, dado pela seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

assume-se que o par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(A, C)$  é observável. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade para sistemas lineares discretos são apresentados de maneira resumida nas próximas seções, conforme adotados em Rawlings *et al.* (7).

## 2.5 Controlabilidade de Sistemas Lineares Discretos

Um sistema linear em tempo discreto  $x^+ = Ax + Bu$  é controlável se existir um horizonte finito  $N \geq n$  e uma sequência de sinais de controle dada por:



$$\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\} \quad (2.31)$$

que possa transferir o sistema de qualquer estado  $x$  para qualquer estado  $x_r$  em que:

$$x_r = A^N x + \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

É possível demonstrar que:

$$\text{Im} \left( \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \right) = \text{Im} \left( \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) \quad (2.33)$$

em que  $\text{Im}(A)$  representa o espaço coluna da matriz  $A$ , genérica, de dimensões  $n \times m$ .

Em outras palavras, para um sistema linear sem restrições, se não for possível alcançar o estado  $x_r$  em  $n$  passos, não será possível alcançá-lo em  $N > n$  passos. A questão da controlabilidade de um sistema linear invariante no tempo é, portanto, uma questão da existência de solução para um sistema de equações lineares, dado por:

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = x_r - A^n x \quad (2.34)$$

A matriz que aparece nesta equação é denominada matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra linear, sabe-se que a solução da Equação 2.34 existe se, e somente se, as linhas da matriz de controlabilidade  $n \times nm$  forem linearmente independentes. Portanto, o sistema  $(A, B)$  é controlável se, e somente se:

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (2.36)$$

Portanto, para um sistema linear em tempo discreto, controlável e sem restrições, é possível alcançar qualquer estado  $x_r$  desejado em  $N$  passos,  $N \geq n$ .

## 2.6 Observabilidade de Sistemas Lineares Discretos

Considere o sistema linear invariante no tempo dado por:

$$\begin{aligned}x^+ &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.37}$$

O sistema dado pela Equação 2.37 é observável se existir um  $N$  finito, tal que para um estado inicial  $x(0) = x_0$ ,  $N$  medidas da saída ( $\mathbf{y} = \{y_k\}_{k=0,\dots,N-1} = \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ ) determinam unicamente o estado inicial  $x_0$ .

De modo semelhante ao mostrado para a controlabilidade, se não for possível determinar  $x_0$  com  $n$  medidas da saída, não será possível determinar com  $N > n$  medidas.

Para  $n$  medidas da saída, o seguinte sistema de equações deve ser solucionado:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0\tag{2.38}$$

A matriz que aparece na Equação 2.38 é a chamada matriz de observabilidade  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\tag{2.39}$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, a solução da Equação 2.38 é única se, e somente se, as colunas da matriz de observabilidade  $np \times n$  forem linearmente independentes. Portanto, o par  $(A, C)$  é observável se, e somente se:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n\tag{2.40}$$

## 2.7 MPC Linear Nominal

### 2.7.1 Caso sem Restrições

Se  $(A, B)$  for controlável, a solução do problema de otimização é única. Se não houver restrições, a solução ótima é encontrada iterando a Equação Algébrica de Riccati (ARE), e a lei de controle ótimo de horizonte infinito é dada por:

$$u = \kappa(x) = Kx \quad (2.41)$$

em que:

$$K = -\left(R + B^T P_\infty B\right)^{-1} B^T P_\infty A \quad (2.42)$$

e  $P_\infty$  corresponde à solução (única), definida positiva, da Equação de Riccati:

$$P_\infty = Q + A^T P_\infty A - A^T P_\infty B \left(R + B^T P_\infty B\right)^{-1} B^T P_\infty A \quad (2.43)$$

A estabilidade da solução pode ser provada utilizando a função  $V(x) = x^T P_\infty x$  como função de Lyapunov, substituindo  $u = Kx$  na equação de  $x^+$  e verificando a desigualdade  $V(x^+) - V(x) \leq -\alpha(x)$  (Condição 2.25c do Teorema 2.2). Assim é possível provar que o sistema é estável mostrando que os autovalores do sistema em malha fechada estão todos no interior do círculo unitário.

O cálculo e implementação do controlador  $K$  para o MPC Linear sem restrições (Regulador LQR) requer apenas o cálculo *off-line* da solução da Equação 2.43 o que é uma tarefa simples e rápida de ser feita. Para o caso com restrições e para sistemas não lineares, a estabilidade do sistema em malha fechada utilizando a lei de controle do MPC necessita que outras condições mais restritivas sejam satisfeitas.

## 2.7.2 Caso com Restrições

Quando há restrições e o horizonte é finito ( $N$ ), é necessário resolver o problema de otimização utilizando uma das técnicas de otimização disponíveis (e.g. *interior-point*, *quadratic-programming*, etc). O problema de horizonte finito para o MPC Linear é apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_0) &= \min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mathbf{u}) \\ & \text{s.a.} \\ x^+ &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \\ x &\in \mathbb{X}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \\ x_N &\in \mathbb{X}_f \\ u &\in \mathbb{U}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

em que  $V_N(\cdot)$  é dada por:

$$V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_k, u_k) + V_f(x_N) \quad (2.45)$$

Para mostrar que  $V_N(\cdot)$  é uma função de Lyapunov adequada para garantir estabilidade e viabilidade do problema  $\mathcal{P}_N$ , é necessário verificar se  $V_N(\cdot)$  satisfaz as condições do Teorema 2.2, principalmente a condição 2.25c, de redução da função  $V_N(\cdot)$  a cada iteração. A estabilidade neste caso depende da escolha apropriada de  $\ell(\cdot)$ ,  $V_f(\cdot)$  e  $\mathbb{X}_f$ .

**Teorema 2.5.** [Rawlings *et al.*, 2017 (7)] *Assuma que  $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$ ,  $V_f(\cdot)$  e  $\mathbb{X}_f$  tenham as seguintes propriedades:*

- $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$  e  $V_f(\cdot)$  são funções contínuas.
- $\ell(\cdot)$  e  $V_f(\cdot)$  são funções definidas positivas.
- $f(0, 0) = 0$ ,  $\ell(0, 0) = 0$  e  $V_f(0) = 0$ .
- Os conjuntos  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{X}_f$  são fechados e  $\mathbb{U}$  é compacto, e todos contêm a origem em seus interiores.
- $\mathbb{X}_f$  é um conjunto invariante ao controle, ou seja, para todo  $x \in \mathbb{X}_f$ , existe  $u \in \mathbb{U}$  que satisfaça:

$$\begin{aligned} x^+ = f(x, u) &\in \mathbb{X}_f, \forall x \in \mathbb{X}_f \\ &e \\ V_f(x^+) - V_f(x) &\leq -\ell(x, u) \end{aligned} \quad (2.46)$$

então  $V_N(\cdot)$  é uma função de Lyapunov válida e satisfaz as condições do Teorema 2.2 e a origem do sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

As condições impostas para  $\ell(\cdot)$ ,  $V_f(\cdot)$  e  $\mathbb{X}_f$ , que garantem estabilidade, podem ser implementadas de várias maneiras, de modo que o MPC pode assumir muitas formas diferentes.

## 2.8 MPC Não Linear Nominal

Considere agora o modelo não linear:

$$\begin{aligned} x^+ &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

E o respectivo problema de otimização:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_N(x_0) &= \min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mathbf{u}) \\
&\text{s.a.} \\
x^+ &= f(x, u) \\
y &= h(x, u) \\
x(0) &= x_0 \\
x &\in \mathbb{X}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \\
x_N &\in \mathbb{X}_f \\
u &\in \mathbb{U}, \forall k \in \{0, \dots, N-1\}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Cuja solução é:

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \{V_N(x, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \mathbf{x} \in \mathbb{X}\} = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\} \tag{2.49}$$

E cuja lei de controle do MPC é:

$$u = \kappa(x) = u_0^* \tag{2.50}$$

Não é possível aplicar diretamente as propriedades de controlabilidade e observabilidade do caso linear para o caso não linear. Outras propriedades devem ser estabelecidas de forma a garantir estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio (origem) e viabilidade recursiva da solução para o problema  $\mathcal{P}_N$ , para o caso não linear. Apresenta-se a seguir essas propriedades sem maiores demonstrações, cujas provas podem ser consultadas em Mayne, 2000 (37) e Köhler *et al.*, 2020 (39).

- a) Uma função custo terminal definida positiva:  $V_f(x_N) \succ 0$
- b) Uma lei de controle terminal, contínua e duas vezes diferenciável:  $\kappa_f(x)$
- c) Uma restrição terminal invariante ao controle:  $\mathbb{X}_f = \{x \in \mathbb{X}_f, x^+ = f(x, \kappa_f(x)) \in \mathbb{X}_f\}$

Esses elementos devem satisfazer as seguintes condições:

**A5:**  $\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}_{0,N} \subset \mathbb{X}$  é compacto e  $0 \in \overset{\circ}{\mathbb{X}}_f$  (a menos que  $\mathbb{X}_f = \{0\}$ ).

**A6:**  $\kappa_f(\mathbb{X}_f) \subset \mathbb{U}$ .

**A7:**  $x^+ = f(x, \kappa_f(x)) \in \mathbb{X}_f, \forall x \in \mathbb{X}_f$

**A8:**  $V_f(x^+) - V_f(x) \leq -\ell(x, \kappa_f(x)), \forall x \in \mathbb{X}_f$

**A9:**  $\ell(x, u) = x^T Q x + u^T R u$  em que  $Q \succ 0$  e  $R \succ 0$ .

em que  $\overset{\circ}{\mathbb{X}}_f$  representa o interior de  $\mathbb{X}_f$ . As condições **A5** e **A6** garantem, respectivamente, que o sistema em malha fechada respeita as restrições de estado e de controle uma vez atingida a região terminal  $\mathbb{X}_f$ . **A7** garante que  $\mathbb{X}_f$  é invariante ao controle para o sistema em malha fechada  $x^+ = f(x, \kappa_f(x))$  (uma vez que o sistema entra em  $\mathbb{X}_f$ , o controlador  $\kappa_f(\cdot)$  garante que o estado permanece em  $\mathbb{X}_f$ ). A condição **A8** garante que  $V_f(\cdot)$  diminui ao longo da trajetória do sistema em malha fechada  $x^+ = f(x, \kappa_f(x))$  dentro de  $\mathbb{X}_f$ . Pode-se agora estabelecer o seguinte Teorema cuja prova pode ser encontrada em Mayne, 2000 (37) e Köhler, 2020 *et al.* (39):

**Teorema 2.6.** [Mayne, 2000 (37)] *Suponha que as condições **A1–A9** sejam satisfeitas. Então:*

– A função  $V_N(\cdot)$  é uma função de Lyapunov válida para o sistema em malha fechada  $x^+ = f(x, \kappa(x))$  e:

$$V_N(x^+) - V_N(x) \leq -\ell(x, \kappa(x)) \quad (2.51)$$

para todo  $x \in \mathbb{X}_{0,N}$

– O sistema:

$$x^+ = f(x, \kappa(x)) \quad (2.52)$$

é assintoticamente estável (na origem) com região de atração  $\mathbb{X}_{0,N}$

Adota-se, nesse trabalho, a seguinte forma do controle MPC, também chamada de MPC Clássico:

$$\begin{aligned} V_f(x_N) &= 0 \\ \kappa_f(x_N) &= 0 \\ \mathbb{X}_f &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

É fácil verificar que  $V_f(x_N)$ ,  $\kappa_f(\cdot)$  e  $\mathbb{X}_f$  satisfazem as condições **A5–A9**. Essa forma de MPC utiliza uma restrição terminal de igualdade  $x_N = 0$  ( $\mathbb{X}_f = \{0\}$ ) tal que o custo terminal é irrelevante ( $V_f(x_N) = 0$ ). A lei de controle local em  $\mathbb{X}_f$  dada por  $\kappa_f(x_N) = 0$  mantém o estado na origem.

## 2.9 MPC Subótimo

A grande questão na solução numérica do problema de otimização não é entre o sistema ser linear ou não linear, mas entre o OCP ser convexo ou não convexo. Em

problemas convexos, qualquer mínimo local é um mínimo global, e o cálculo do mínimo global é possível. Para sistemas lineares, com restrições convexas, o controle MPC resulta em um problema de controle ótimo convexo. Se o custo for quadrático e as restrições lineares, o problema de controle ótimo é um problema quadrático (QP) para o qual existem algoritmos eficientes para encontrar mínimos globais, conforme cita Mayne (37). No entanto, se  $f(\cdot)$  for não linear, o OCP  $\mathcal{P}_N$  é, em geral, não convexo, o que implica que apenas um mínimo local pode ser encontrado. Isso representa um problema para a estabilidade do MPC, pois a teoria de estabilidade desenvolvida nas seções anteriores requer a convergência global do OCP. Apesar disso é possível garantir a estabilidade do MPC utilizando soluções subótimas desde que se garanta que a função custo seja reduzida a cada iteração do OCP.

Conforme Allgöwer *et al.*, 2004 (8), para alcançar a estabilidade, não é necessário encontrar o mínimo global do problema de otimização em malha aberta. É suficiente conseguir uma diminuição na função custo a cada instante de amostragem. Assim, a viabilidade de  $\mathcal{P}_N$  implica estabilidade de  $x^+ = f(x, \kappa(x))$ . Se uma estratégia de otimização, que ofereça soluções viáveis a cada iteração e uma diminuição na função custo, for utilizada, a otimização pode ser interrompida, se não houver mais tempo disponível e, ainda assim, a estabilidade pode ser garantida. Nesta dissertação, esta importante propriedade foi utilizada para garantir que o controlador MPC desenvolvido possa ser implementado em tempo real, o código desenvolvido em MATLAB utiliza um método chamado *solve\_limited()* da biblioteca CasADi (consultar Andersson *et al.* (40) para maiores detalhes) que interrompe a execução do algoritmo de otimização caso uma solução viável seja encontrada e antes de ultrapassar o tempo de amostragem disponível, conforme trecho do código fonte, exibido abaixo:

Código-Fonte 2.1 – Trecho do código-fonte do controlador MPC implementado em MATLAB + CasADi

```
783 % Solve the optimization problem
784 sol = mpc.solve_limited();
```

Como menciona Bachtiar *et al.*, 2017 (35) uma vez que o número de iterações do OCP é limitado, a solução obtida pode ser apenas subótima. A utilização de soluções subótimas, obtidas com poucas iterações do OCP, que garantam estabilidade numérica em tempo real, de modo que o erro entre a solução obtida e a verdadeira solução teórica do OCP permaneça limitado, já foi comprovada por outros autores. Especificamente, o limite máximo de iterações do OCP pode ser ajustado para definir arbitrariamente a tolerância de erro para o qual a solução obtida tenha garantia de convergência. Por exemplo, foi demonstrado que o algoritmo SQP exibe convergência linear com o aumento do número de iterações. A rapidez da convergência também depende da estimativa inicial da solução

estar suficientemente próxima da solução verdadeira, o que pode ser garantido iniciando o algoritmo do OCP, com a solução no instante de amostragem anterior, como estimativa inicial no instante atual, tirando vantagem do princípio do horizonte móvel e do fato de que dois OCPs sucessivos são numericamente semelhantes. Novamente, essa importante propriedade foi utilizada no desenvolvimento do presente trabalho, conforme trecho do código fonte exibido abaixo:

Código-Fonte 2.2 – Trecho do código-fonte do controlador MPC implementado em MATLAB + CasADi

```
792 % Use the current solution to speed up the next optimization
793 mpc.set_initial(sol.value_variables());
```

Este método *set\_initial()*, faz com que as variáveis de decisão do problema de otimização, no instante atual, sejam inicializadas com a solução do instante anterior, o que é chamado de *warm-start* do OCP.

Todos os códigos fonte em MATLAB, desenvolvidos para essa dissertação, estão disponíveis para download através do link: <<https://github.com/jonaylton/mpc-missile>>.



### 3 CLASSIFICAÇÃO, DESCRIÇÃO E MODELAGEM DE MÍSSEIS

Este capítulo apresenta uma discussão detalhada sobre a classificação, descrição física e modelagem matemática de mísseis, adaptado do Livro de Siouris, “Missile Guidance and Control Systems” (1). A obra de Siouris é reconhecida por sua abrangência e profundidade técnica na área de sistemas de guiamento e controle de mísseis. Através desta adaptação, busca-se fornecer ao leitor uma compreensão mais aprofundada dos conceitos complexos que formam a base dessa dissertação. Além das contribuições de (1) também foram incluídas muitas outras equações, definições e conteúdos elaborados pelo próprio autor dessa dissertação, principalmente no que tange às equações dos coeficientes aerodinâmicos de força e momento e as simplificações usualmente adotadas para mísseis STT axissimétricos, além da seleção das variáveis para isolar a dinâmica longitudinal do míssil, que é utilizada para projeto de um controlador de piloto automático no Capítulo 4.

#### 3.1 Classificação e Partes Componentes de Mísseis

##### 3.1.1 Classificação de Mísseis Quanto ao Sistema de Guiamento

Quando se trata de sistemas de orientação e controle de mísseis, eles geralmente são classificados em quatro categorias, incluindo programados, autoguiados, teleguiados e não guiados. Cada um desses métodos de guiamento tem suas vantagens e desvantagens e são escolhidos com base no cenário de uso, no tipo de alvo, e nas capacidades tecnológicas disponíveis. A Figura 3 apresenta de forma gráfica o sistema de classificações de mísseis quanto ao tipo de guiamento. Apresenta-se abaixo uma breve explicação de cada uma das classificações:

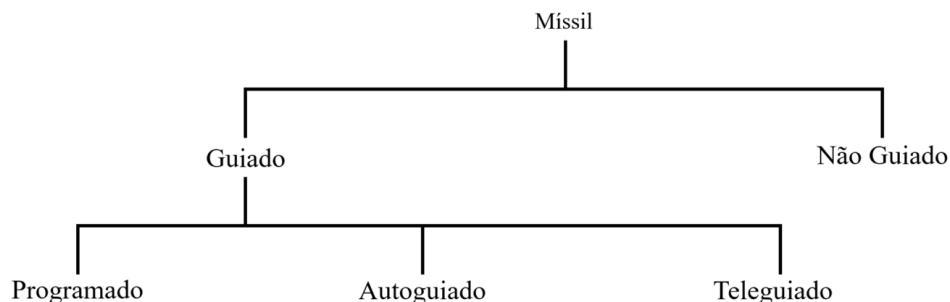


Figura 3 – Classificação de Mísseis, adaptada de (1).

- Programado (*Nonhoming*): Mísseis com guiamento programado seguem uma trajetória predefinida, que é estabelecida antes do lançamento. Este tipo de míssil pode ser

programado para seguir um caminho específico ou para atingir um local fixo, e não possui a capacidade de alterar seu curso em resposta a mudanças na posição ou no comportamento do alvo.

- Autoguiado (*Homing*): Mísseis autoguiados são equipados com sistemas de orientação internos que permitem que eles rastreiem e atinjam um alvo de forma independente, sem a necessidade de comandos externos após o lançamento. Exemplos incluem mísseis com guiamento por infravermelho, radar ativo, ou outras formas de sensores que podem detectar e seguir alvos.
- Teleguiado (*Direct or External Guidance*): Neste tipo de míssil, o controle é realizado remotamente, geralmente por um operador humano ou uma estação de controle. O míssil recebe comandos de controle externos para ajustar sua trajetória. Esses comandos podem ser transmitidos via rádio, cabo, ou outras formas de comunicação.
- Não Guiado ou Balístico (*Unguided*): Estes mísseis são lançados em uma trajetória predeterminada e não possuem um sistema de orientação para alterar seu percurso após o lançamento. Seu movimento é determinado principalmente pelas leis da balística, e estão sujeitos às forças da gravidade e da resistência do ar. Exemplos incluem foguetes de artilharia e alguns tipos de mísseis balísticos de longo alcance. Eles são geralmente chamados apenas de foguetes e usados para atingir alvos fixos e pré-determinados, e sua precisão é limitada em comparação com mísseis guiados.

### 3.1.2 Partes Componentes de um Míssil

Um míssil tipicamente é composto por várias partes essenciais que trabalham em conjunto para garantir sua precisão e eficiência. A Figura 4 apresenta um desenho de um modelo típico de míssil. As principais partes de um míssil incluem:

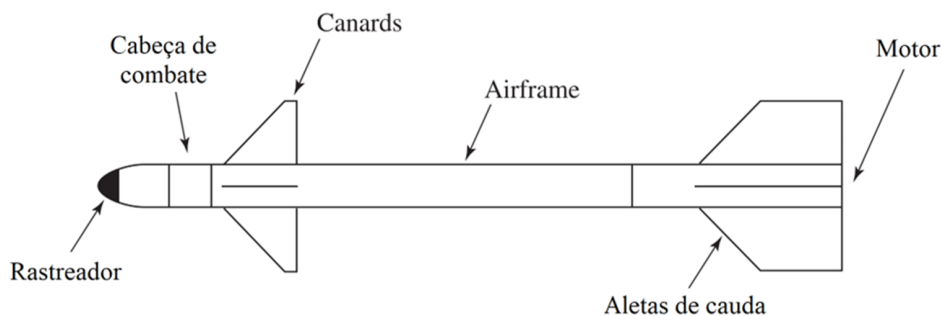


Figura 4 – Partes componentes de um míssil típico, adaptada de (1).

- Rastreador (*Seeker*): Esta é a parte do míssil responsável por localizar e rastrear o alvo. O rastreador pode ser baseado em diversas tecnologias, como infravermelho, radar ou laser, dependendo do tipo de míssil e do cenário operacional. Ele permite que o míssil ajuste sua trajetória durante o voo para atingir o alvo com precisão.

- Cabeça de Combate (*Warhead*): É a parte do míssil que contém a carga explosiva ou outra forma de armamento. A cabeça de combate é projetada para detonar no impacto ou próximo ao alvo, causando dano através de explosão, fragmentação, ou outros efeitos.
- *Canards*: São pequenas superfícies de controle localizadas na parte frontal do míssil, a frente do seu centro de gravidade. Os canards ajudam a controlar o voo, ajustando o ângulo de ataque e a trajetória do míssil. Eles são especialmente úteis em mísseis que necessitam de alta manobrabilidade.
- *Airframe*: O *airframe* é a estrutura principal do míssil, sobre a qual todos os outros componentes são montados. Ele é projetado para suportar as forças aerodinâmicas e térmicas durante o voo, mantendo o peso do míssil o mais baixo possível.
- Aletas de Cauda: Localizadas na parte traseira do míssil, as aletas de cauda são usadas para estabilizar e controlar o voo. Elas ajudam a manter o míssil alinhado com sua trajetória planejada e podem ser ajustadas para alterar o curso, se necessário.
- Motor: O motor fornece a propulsão necessária para o míssil. Dependendo do tipo de míssil, diferentes tipos de motores podem ser utilizados, como motores a jato, foguetes de combustível sólido ou líquido. O motor é um dos componentes mais críticos do míssil, determinando seu alcance, velocidade e capacidade de manobra.

## 3.2 Modelagem Dinâmica

### 3.2.1 Sistemas de Coordenadas e Ângulos de Euler

Em um sistema coordenadas retangulares, um vetor pode ser completamente especificado por seus componentes. Esses componentes dependem da orientação do sistema de coordenadas, e o mesmo vetor pode ser descrito por diferentes sistemas de eixos coordenados. Os três componentes que representam um vetor em um conjunto de eixos podem ser relacionados aos componentes ao longo de outro conjunto de eixos através de transformações de coordenadas.

Para a análise dinâmica do míssil geralmente são utilizados 2 principais sistemas de coordenadas: (a) um referencial fixo, considerado como referencial inercial, centrado no CG do míssil, e que não varia com a orientação do míssil, por meio do qual são calculadas as medidas de distância percorrida pelo míssil e para o qual as Leis de Movimento de Newton são válidas; e (b) um referencial móvel, também centrado no CG do míssil, e alinhado aos planos de simetria do corpo do míssil, com os eixos orientados conforme a Figura 5.

O sistema de coordenadas móvel, que é adotado no presente trabalho, é um sistema de mão direita com o eixo  $X_b$  positivo ao longo do eixo longitudinal do míssil, o eixo  $Y_b$

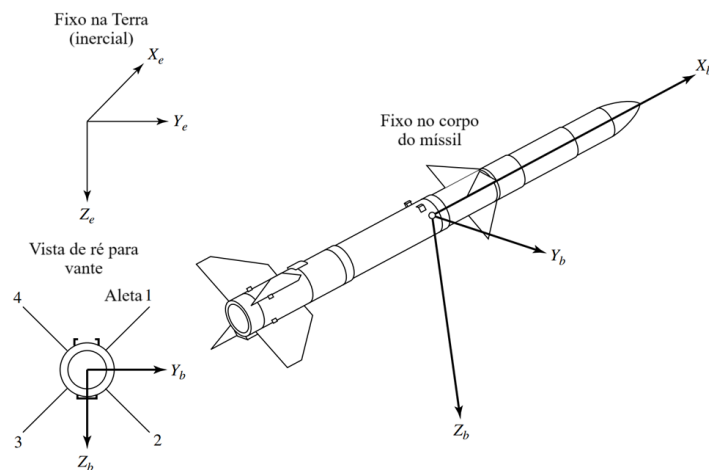


Figura 5 – Sistemas de coordenadas do referencial estacionário e do referencial centrado no míssil, adaptada de (1).

positivo para a direita e o eixo  $Z_b$  positivo para baixo (ou seja, o eixo  $Z_b$  é definido pelo produto vetorial dos eixos  $X_b$  e  $Y_b$ ). Este sistema de coordenadas também é conhecido como Norte-Leste-Abaixo, ou NED (do inglês *North-East-Down*) por sua semelhança com o sistema de orientação do referencial fixo. Juntos, esses sistemas de coordenadas são usados para definir a posição e orientação do míssil no espaço, o que se denomina atitude do míssil.

Existem três métodos comumente usados para expressar a orientação de um sistema de coordenadas em relação a outro. Os três métodos são: (a) ângulos de Euler, (b) cossenos diretores e (c) quaternions. Emprega-se neste trabalho apenas o método dos ângulos de Euler, ficando à cargo do leitor a leitura do trabalho completo de Siouris (1) para entendimento dos demais métodos. O método dos ângulos de Euler, relacionando um sistema de eixos móveis a um sistema de eixos fixos, é frequentemente utilizado em representações das dinâmicas de mísseis e aeronaves. As designações comuns dos ângulos de Euler são rolagem ( $\phi$ ), arfagem ( $\theta$ ) e guinada ( $\psi$ ). Suas vantagens residem no seu cálculo relativamente simples feito por computadores utilizados na simulação da dinâmica de mísseis. Outro aspecto benéfico desta técnica é que as taxas dos ângulos de Euler e os próprios ângulos de Euler têm um significado físico facilmente interpretado. O atributo negativo do método de transformação de coordenadas dos ângulos de Euler é a singularidade matemática que existe quando o ângulo de arfagem  $\theta$  se aproxima de  $90^\circ$ .

É possível observar na Figura 6 como os sistemas de coordenadas se relacionam através dos ângulo de Euler. A ordem de rotação dos eixos é a seguinte: a partir do sistemas de coordenadas fixo ( $X_e, Y_e, Z_e$ ), centrado no CG do míssil, rotaciona-se os eixos na seguinte sequência: mantendo-se  $Z_e$  fixo, rotaciona-se o plano formado por  $X_e$  e  $Y_e$  em  $\psi$ , em seguida, mantendo-se  $Y_e$  fixo na nova posição, rotaciona-se o plano formado por  $X_e$  e  $Z_e$  em  $\theta$  até que os eixos  $X_e$  e  $X_b$  estejam alinhados, então por último, matendo-se o

eixo  $X_e$  fixo na nova posição, rotaciona-se o plano formado por  $Y_e$  e  $Z_e$  em  $\phi$  até que os 3 eixos estejam alinhados, ou seja, até que  $(X_e, Y_e, Z_e)$  coincidam com  $(X_b, Y_b, Z_b)$ .

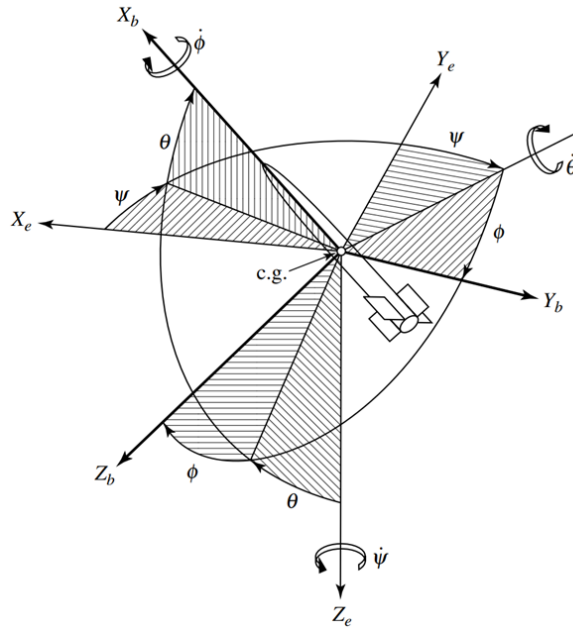


Figura 6 – Ângulos de Euler, adaptada de (1).

Para realizar a transformação de coordenadas de um referencial para o outro, utiliza-se as matrizes de rotação para cada eixo, dadas pela Equação 3.1:

$$R_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação resultante é dada pela Equação 3.2:

$$R_e^b = R_X(\phi) R_Y(\theta) R_Z(\psi) \quad (3.2)$$

$$R_e^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \text{sen } \psi & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \phi \text{sen } \theta \cos \psi - \cos \phi \text{sen } \psi & \text{sen } \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \cos \phi \cos \psi & \text{sen } \phi \cos \theta \\ \cos \phi \text{sen } \theta \cos \psi + \text{sen } \phi \text{sen } \psi & \cos \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi - \text{sen } \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

em que o subscrito indica de qual referencial está partindo e o sobrescrito para qual referencial se pretende levar. Devido a propriedade de ortogonalidade de  $R_e^b$  a operação

inversa, ou seja, levar do referencial do corpo para o referencial inercial, é dada pela Equação 3.3:

$$R_b^e = (R_e^b)^{-1} = (R_e^b)^T$$

$$R_b^e = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Graus de Liberdade e Vetores de Velocidade

Assume-se que o míssil possui 6 Graus de Liberdade (6-DOF). Esses 6 Graus de Liberdade consistem em: (a) 3 de translação e (b) 3 de rotação, ao longo e em torno dos eixos  $(X_b, Y_b, Z_b)$ . Essas variáveis estão ilustradas na Figura 7 em que as componentes de translação são  $(u, v, w)$  e as de rotação  $(p, q, r)$ .

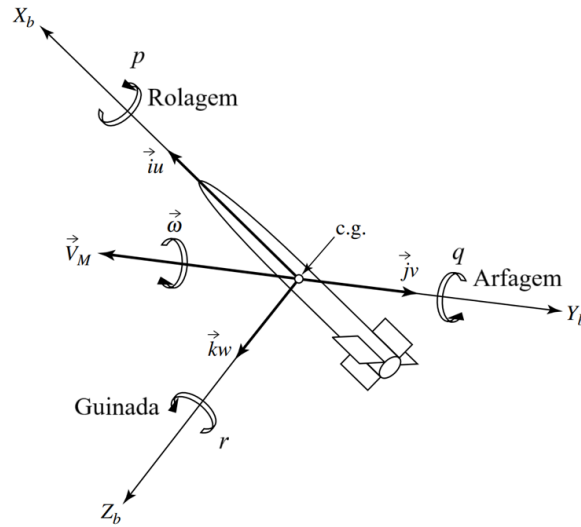


Figura 7 – Representação dos 6 graus de liberdade do míssil (componentes dos vetores de velocidade total do míssil  $(\vec{V}_M)$  e velocidade angular  $(\vec{\omega})$ , adaptada de (1).

É possível ver na Figura 7 os vetores de velocidade linear  $(\vec{V}_M)$  e velocidade angular do míssil  $(\vec{\omega})$ , que podem ser escritos em termos de suas componentes através da Equação 3.4:

$$\vec{V}_M = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Em relação especificamente ao vetor de velocidade linear do míssil  $(\vec{V}_M)$ , é necessário definir dois ângulos importantes de orientação desse vetor em relação ao referencial móvel

do corpo do míssil  $(X_b, Y_b, Z_b)$ . As fórmulas dos coeficientes aerodinâmicos de Força e Momento, que são apresentados na Seção 3.2.5 (pág. 67), dependem explicitamente desses ângulos: (a) ângulo de ataque  $\alpha$  e (b) ângulo de derrapagem  $\beta$ . A Figura 8 apresenta esses ângulos. Observe que o ângulo de ataque corresponde ao ângulo formado entre a projeção do vetor  $\vec{V}_M$  no plano  $(X_b, Z_b)$  e o eixo  $X_b$  e o ângulo de derrapagem corresponde ao ângulo entre o vetor  $\vec{V}_M$  e o plano  $(X_b, Z_b)$ . Essa é a definição usual desses ângulos, outros autores podem adotar definições diferentes, porém as equações devem ser modificadas de acordo para refletirem a convenção adotada.

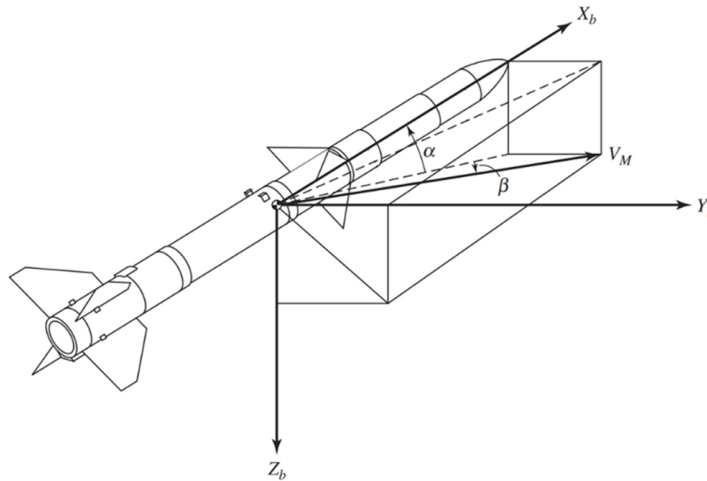


Figura 8 – Ângulos de ataque e de derrapagem, adaptada de (1).

A Equação 3.5 expressa a relação entre as componentes do vetor velocidade linear do míssil e os ângulos de ataque e de derrapagem:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) \tag{3.5}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left( \frac{v}{V_M} \right)$$

Por meio de operações de transformação de coordenadas é possível representar essa relação de forma matricial através da Equação 3.6:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = V_M \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Outra variável que convém ser definida agora consiste no número de Mach, que é calculado pela Equação 3.7 em que  $V_s$  corresponde à velocidade de propagação do som no ar e é dependente da altura de voo do míssil.

$$M = \frac{V_M}{V_s} \tag{3.7}$$

A Equação 3.8 expressa a relação entre a altura  $h$  e a velocidade do som no ar para a região da troposfera (i.e.  $0 \text{ km} \leq h \leq 11 \text{ km}$ ):

$$V_s = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.8)$$

em que  $\gamma$  é o índice adiabático para o ar seco,  $R$  é a constante de gás ideal do ar seco e  $T$  é a temperatura local do ar, dada pela seguinte equação:

$$T = T_0 - Lh \quad (3.9)$$

em que  $T_0$  é a temperatura do ar ao nível do mar e  $L$  é o gradiente térmico vertical. A Tabela 1 apresenta os valores das constantes para as Equações 3.8 e 3.9:

Tabela 1 – Valores padrões das constantes para cálculo da velocidade do som (referentes ao ar seco)

Símbolo	Nome	Valor
$\gamma$	Índice Adiabático	1,403
$R$	Constante de Gás Ideal	287,0531 J/(kg.K)
$T_0$	Temperatura do Ar ao Nível do Mar	288,15 K (15 °C)
$L$	Gradiente Térmico Vertical	0,0065 K/m

Cabe mencionar que para a altitude de  $h = 11 \text{ km}$  a velocidade do som é aproximadamente 13% menor em relação ao seu valor no nível do mar. No desenvolvimento das próximas equações, considera-se que a derivada de  $V_s$  em relação ao tempo é aproximadamente nula em todo o trajeto do míssil. Isto implica que a derivada do número de Mach é igual a:

$$\dot{M} = \frac{\dot{V}_M}{V_s} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Convenções para Superfícies de Controle

O sistema de controle, ou piloto automático, de um míssil guiado deve assegurar que o míssil mantenha a trajetória planejada pelo sistema de guiamento. Para os fins desta dissertação, assume-se que o míssil é controlado pela cauda por meio de quatro aletas. Em essência, o atuador consiste nas superfícies de controle (ou aletas) e nos servomecanismos associados, e é usado para alterar a atitude e a trajetória de voo do míssil. Portanto, a função dos quatro atuadores das aletas é mover as superfícies de controle de acordo com os comandos do piloto automático.

Neste ponto, é apropriado definir os termos profundores, lemes e ailerons. Comumente, mísseis guiados aerodinamicamente têm dois eixos de simetria, ou seja, dispostos em



uma configuração em forma de cruz (cruciforme). Se o míssil possui quatro superfícies de controle independentes (não conectadas), como mostrado na Figura 9a, então as superfícies 2 e 4 são definidas como profundores ou aletas de arfagem (responsáveis por provocar rotação em torno do eixo  $Y_b$ ), e 1 e 3 como lemes, ou aletas de guinada (responsáveis por provocar rotação em torno do eixo  $Z_b$ ).

As saídas do piloto automático são comandos virtuais de deflexão das aletas mostrados na Figura 9b. Na Figura 9b, o eixo de rolagem está ao longo do eixo  $P_1$ , enquanto os eixos de arfagem e guinada estão ao longo dos eixos  $P_2$  e  $P_3$ , respectivamente; os comandos de deflexão positiva das aletas são indicados pelos  $\delta_P$  correspondentes. As quatro aletas reais estão localizadas no míssil ou referencial  $M$ , que é mostrado na Figura 9a e é rotacionado a partir do sistema de eixos do piloto automático (referencial  $P$ ) por um ângulo  $\phi_P$ . Para obter efeitos equivalentes, os comandos do piloto automático devem ser transformados através de  $-\phi_P$ . O comando de rolagem é proporcionado por uma deflexão tal que para um comando de rolagem positivo é necessário uma deflexão negativa das aletas 1 e 2 e uma deflexão positiva das aletas 3 e 4. A Equação 3.11 relaciona o comando de deflexão do piloto automático com o ângulo efetivo de deflexão das aletas para a Convenção 1 da Figura 9.

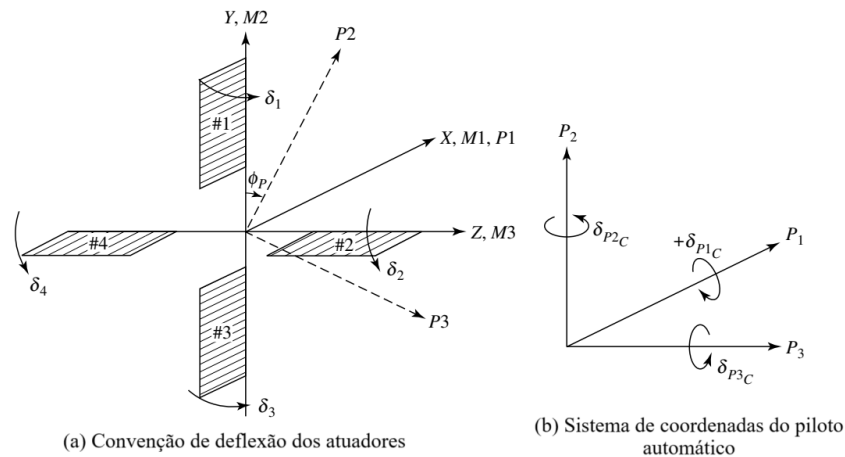


Figura 9 – Convenção 1 para os ângulo de deflexão das aletas, adaptada de (1).

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Observe que esta não é a única convenção ou arranjo de aletas utilizado no projeto de mísseis. A Equação 3.12 relaciona o comando de deflexão do piloto automático com o ângulo efetivo de deflexão das aletas para a Convenção 2 da Figura 10.

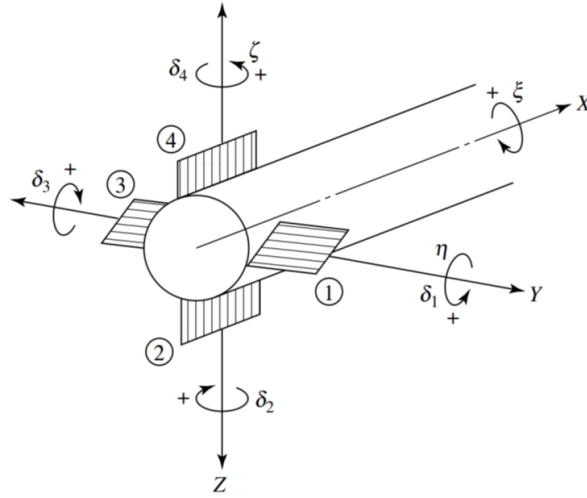


Figura 10 – Convenção 2 para os ângulo de deflexão das aletas, adaptada de (1).

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Independentemente da convenção adotada, os ângulos virtuais  $[\delta_a, \delta_e, \delta_r]$  podem ser convertidos para os ângulos reais de deflexão das aletas através da fórmula da pseudo-inversa, conforme Equação 3.13:

$$\begin{aligned} \text{Se } \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}, \text{ então} \\ \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

em conjunto com as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} |\delta_1| &= |\delta_3| \\ |\delta_2| &= |\delta_4| \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assume-se, neste trabalho, que o modelo dinâmico do atuador corresponde a um sistema de 2ª ordem sobreamortecido, sujeito à restrições de limites físicos do atuador (máxima deflexão e máxima taxa de deflexão), dado pela Equação 3.15

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_r \\ \ddot{\delta}_a \\ \ddot{\delta}_e \\ \ddot{\delta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 & 0 & -2\zeta\omega_n & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 & -2\zeta\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \\ \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a^{com} \\ \delta_e^{com} \\ \delta_r^{com} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Até o momento, foram apresentadas descrições gerais das características físicas e operacionais dos mísseis. Também foram abordadas definições importantes de ângulos, variáveis e convenções relacionadas aos atuadores. Esse embasamento é fundamental para que o leitor compreenda as equações de força e momento a partir dos conceitos fornecidos.

### 3.2.4 Condições e Simplificações Assumidas para o Modelo de Míssil

Esta seção apresenta as condições assumidas para o modelo de míssil empregado nessa dissertação, além de apresentar as simplificações decorrentes dessas condições, as quais permitem que o modelo possa ser utilizado em simulações e analisado com as técnicas de controle existentes. Essas simplificações são suficientemente próximas da realidade e o modelo matemático desenvolvido a partir delas pode ser utilizado para qualquer modelo de míssil que satisfaça as mesmas condições.

Assume-se que o míssil:

- Seja um corpo rígido, isso significa que o míssil não sofre deformações em sua forma ou estrutura. Um corpo rígido pode ser tratado como uma partícula cuja massa está toda concentrada em seu CG. Essa suposição permite que o movimento do corpo do míssil seja completamente descrito pela translação do CG e pela rotação do corpo do míssil em torno desse ponto.
- Possui simetria perfeita em relação ao plano  $(X_b, Z_b)$  e também em relação ao plano  $(X_b, Y_b)$ . Dessa forma, os produtos de inércia  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$  desaparecem das equações (são nulos) e os momentos de inércia  $I_y$  e  $I_z$  são iguais.
- Possui massa aproximadamente constante, o que implica que  $\frac{dm}{dt} \approx 0$ .
- Está sujeito à atuação de 3 forças: aerodinâmica, propulsão e gravitacional. E a atuação de 2 momentos: aerodinâmico e momento devido à variação do CG (esse último pode geralmente ser desprezado, mas é apresentado para fins didáticos).

Assume-se também que as equações de movimento são escritas no referencial móvel do corpo do míssil e então, por meio de transformação de coordenadas através da matriz  $R_b^e$  da Equação 3.3, podem ser levadas para o referencial fixo (inercial).

### 3.2.5 Forças e Coeficientes de Força Aerodinâmicos

Assume-se, neste trabalho, que o míssil é do tipo STT (*Skid-to-Turn*), o que implica que para realizar manobras de movimento lateral (guinada), o míssil não precisa executar uma manobra de rolagem, ou seja, apenas com deflexões das aletas de guinada é possível direcionar para boreste ou bombordo. O outro tipo de míssil existente é o BTT (*Bank-to-Turn*) em que o míssil tem aparência semelhante a uma aeronave de asa fixa e para manobras de guinada precisa executar uma breve rolagem para um dos bordos a que se pretende guinar.

A movimentação do ar ao redor de uma aeronave ou míssil produz variações de pressão e velocidade, que geram as forças e momentos aerodinâmicos. As principais variáveis que exercem influência nas forças aerodinâmicas são: (a) ângulo de ataque  $\alpha$ ; (b) ângulo de derrapagem  $\beta$ ; e (c) número de Mach  $M$ . Outras variáveis como características físicas do míssil e propriedades do ar também influenciam em sua aerodinâmica. As componentes da força aerodinâmica podem ser escritas no referencial do vento, atuando no CG do míssil, conforme demonstrado pela Figura (11). Esse referencial tem seu eixo  $A_X$  orientado no sentido da velocidade relativa do míssil em relação ao ar ( $V_M$ ), o eixo  $A_Z$  apontado para cima, perpendicular ao eixo  $A_X$ , no sentido positivo do vetor da Força de Sustentação, para ângulo de ataque positivo, e o eixo  $A_Y$  apontado para a direita, no sentido positivo do vetor da Força Lateral, para ângulo de derrapagem positivo.

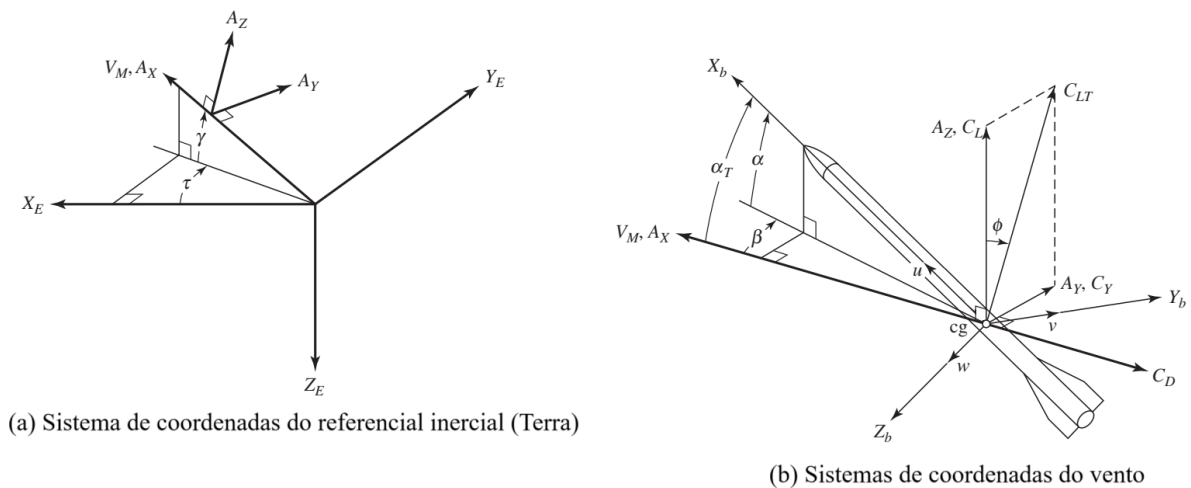


Figura 11 – Forças aerodinâmicas no referencial do vento, adaptada de (1).

A partir desse referencial, portanto, podem ser definidas 3 componentes de força aerodinâmica:

- a. Força de Arrasto (*Drag*): Força devida à resistência do ar e apontada no sentido contrário do vetor velocidade do míssil ( $\vec{V}_M$ ).

- b. Força de Sustentação (*Lift*): Força devida à diferença de pressão provocada pela variação de velocidade dos fluxos de ar acima e abaixo das superfícies aerodinâmicas. É perpendicular ao vetor ( $\vec{V}_M$ ).
- c. Força Lateral (*Side Force*): Força provocada por ângulos de derrapagem não nulos e que atua no sentido de deslocar o míssil para um dos lados. É perpendicular à Força de Arrasto e de Sustentação.

Para simplificação da análise, as forças precisam ser descritas no referencial do corpo do míssil, para isso se utiliza de transformações de coordenadas conforme a Figura 12.

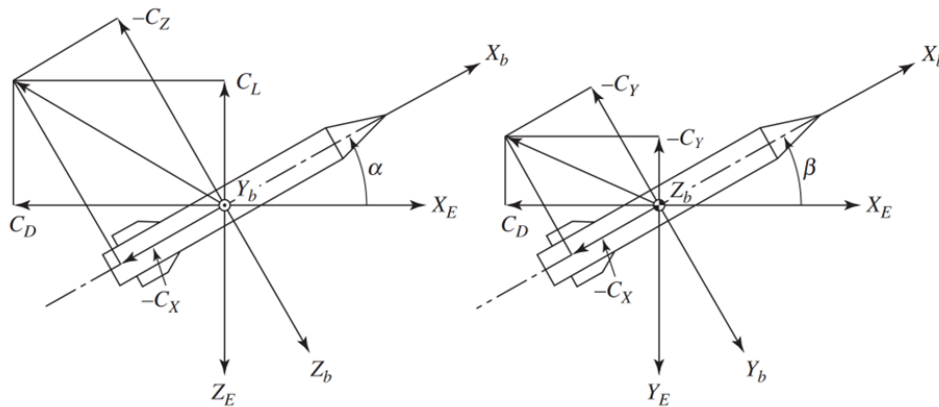


Figura 12 – Representação dos coeficientes aerodinâmicos de força, adaptada de (1).

Nessa Figura é possível ver os coeficientes aerodinâmicos  $C_X$ ,  $C_Y$  e  $C_Z$ , que expressam a relação entre as variáveis aerodinâmicas e a força produzida em cada um dos eixos do referencial do míssil, conforme a Equação 3.16.

$$\begin{bmatrix} F_X^A \\ F_Y^A \\ F_Z^A \end{bmatrix} = QS \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

em que  $Q$  corresponde à pressão dinâmica e  $S$  à área da seção transversal média do corpo do míssil, também chamada área de referência.

A pressão dinâmica pode ser expressa através de diferentes equações, escolhidas de acordo com o contexto ou preferência do autor. Neste trabalho, optou-se por uma abordagem específica para representar a pressão dinâmica que captura o comportamento dessa grandeza na faixa de operação do míssil. A seguir, apresenta-se uma explicação detalhada dessa escolha, destacando sua importância e aplicabilidade no contexto da presente dissertação.

Primeiramente, é necessário apresentar a equação da densidade do ar. A Equação 3.17 expressa a relação entre a altitude e a densidade do ar, válida para a região da troposfera (i.e. altitudes de até aproximadamente 11 km):

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{L}{T_0} h\right)^{\left(\frac{g}{RL} - 1\right)} \quad (3.17)$$

em que  $\rho_0$  corresponde à densidade do ar ao nível do mar,  $L$  é o gradiente térmico vertical,  $T_0$  é a temperatura do ar ao nível do mar,  $h$  é a altitude,  $g$  é a aceleração devida à gravidade ao nível do mar e  $R$  é a constante de gás ideal para o ar seco. A Tabela 2 apresenta os valores padrões das constantes para cálculo da densidade do ar:

Tabela 2 – Valores padrões das constantes para cálculo da densidade do ar seco

Símbolo	Nome	Valor
$\rho_0$	Densidade do Ar ao Nível do Mar	1,225 kg/m <sup>3</sup>
$L$	Gradiente Térmico Vertical	0,0065 K/m
$T_0$	Temperatura do Ar ao Nível do Mar	288,15 K (15 °C)
$g$	Aceleração da Gravidade ao Nível do Mar	9,80665 m/s <sup>2</sup>
$R$	Constante de Gás Ideal	287,0531 J/(kg.K)

A densidade do ar pode chegar a diminuir até 70% no limite da troposfera em relação ao seu valor no nível do mar. Esta variação, portanto, não pode ser desprezada e para a simulação da dinâmica não linear do míssil deve-se levar em conta a variação de  $\rho$  com a altitude  $h$ , principalmente para longos período de voo em que a altitude pode variar consideravelmente, tendo em vista as altas velocidades desse tipo de armamento (Mach 1 a 5).

Para fluidos compressíveis, que é o caso do ar atmosférico, a equação exata para se determinar a pressão dinâmica em função da pressão estática do ar e do número de Mach é dada por:

$$Q = P \left[ \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] \quad (3.18)$$

em que  $P$  corresponde à pressão estática,  $\gamma$  é o índice adiabático do ar, e  $M$ , o número de Mach. Substituindo o valor de  $\gamma = 1.4$  para o ar atmosférico, a equação exata de  $Q$  fica:

$$Q = P \left[ \left(1 + 0.2M^2\right)^{\frac{7}{2}} - 1 \right] \quad (3.19)$$

A pressão estática é determinada pela seguinte expressão:

$$P = \rho RT \quad (3.20)$$

em que  $\rho$  é a densidade local do ar,  $R$  é a constante de gás ideal para o ar e  $T$  é a temperatura local do ar, em Kelvin. A expressão de  $T$  já foi mostrada na Equação 3.9 (pág.

63). Os valores das constantes das Equações 3.18 e 3.20 já foram mostrados na Tabela 1 (pág. 63).

Utilizando a fórmula para fluidos incompressíveis, a expressão da pressão dinâmica é dada pela Equação 3.21, que expressa a relação entre a densidade local do ar  $\rho$  (que é função da altura  $h$ ), a velocidade do míssil  $V_M$  e a pressão dinâmica  $Q'$ .

$$Q' = \frac{1}{2}\rho V_M^2 \quad (3.21)$$

É possível expressar a pressão dinâmica para fluidos incompressíveis pela seguinte equação, que é equivalente à Equação 3.21 com algumas substituições de variáveis:

$$Q' = \frac{1}{2}\gamma P M^2 = 0.7 P M^2 \quad (3.22)$$

A Equação 3.19 pode ser aproximada utilizando-se uma série binomial do tipo:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (3.23)$$

em que:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (3.24)$$

em que  $x = 0.2M^2$  e  $\alpha = \frac{7}{2}$ . Portanto a expressão final de  $Q$  para a aproximação por série binomial é igual a:

$$Q = P \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{7/2}{k} (0.2M^2)^k \right] = 0.7 P M^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{7/2}{k} \frac{0.2^k M^{2(k-1)}}{0.7} \right] \quad (3.25)$$

$$Q = Q' \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{7/2}{k} \frac{(0.2M^2)^{k-1}}{7/2} \right]$$

Expandindo a série da equação anterior até o termo de 6<sup>a</sup> ordem e adaptando o denominador deste termo (que seria 1600, mas é substituído por 2100, para aproximar a série infinita), a Equação 3.18 pode ser finalmente aproximada pela seguinte expressão:

$$Q = Q' \left( 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \frac{M^6}{2100} \right) \quad (3.26)$$

A Equação 3.26 é utilizada nesta dissertação, pois é uma excelente aproximação da pressão dinâmica para a faixa  $M \in [2; 4]$ , conforme pode ser visto na Figura 13. Além disso, ela facilita o desenvolvimento da representação em espaço de estados, conforme é mostrado mais adiante. Para facilitar a notação, define-se o seguinte termo ( $\sigma(M)$ ) para o polinômio em  $M$ , que multiplica  $Q'$ :

$$\sigma = \left( 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \frac{M^6}{2100} \right) \quad (3.27)$$

A maioria dos autores utiliza a simplificação  $\sigma = 1$ , porém essa é uma simplificação grosseira e não capta o comportamento real da pressão dinâmica.

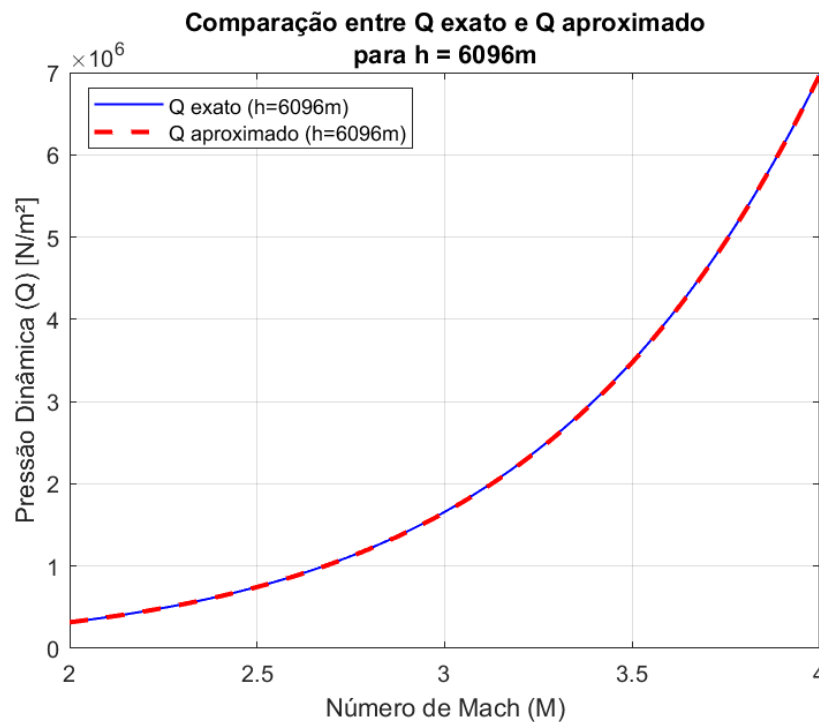


Figura 13 – Pressão Dinâmica em função do Número de Mach ( $h = 6096\text{m}$ ).

A seguir, são desenvolvidas as equações dos coeficientes aerodinâmicos. Cada um dos coeficientes aerodinâmicos é dado por uma função não linear das variáveis aerodinâmicas, conforme Equação 3.28:

$$C_i = f(\alpha, \beta, M, \delta_a, \delta_e, \delta_r, p, q, r) \quad (3.28)$$

Fazendo-se uma aproximação linear dessa função utilizando derivadas parciais em torno de qualquer ponto de operação ( $[\alpha, \beta, \delta_a, \delta_e, \delta_r, p, q, r]$ ), chega-se a representação matricial dada pela Equação 3.29:



$$\begin{bmatrix} \Delta C_X \\ \Delta C_Y \\ \Delta C_Z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial C_X}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_X}{\partial \beta} & \frac{\partial C_X}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_X}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_X}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_Z}{\partial \beta} & \frac{\partial C_Z}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_Z}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_Z}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C_X}{\partial p} & \frac{\partial C_X}{\partial q} & \frac{\partial C_X}{\partial r} \\ \frac{\partial C_Y}{\partial p} & \frac{\partial C_Y}{\partial q} & \frac{\partial C_Y}{\partial r} \\ \frac{\partial C_Z}{\partial p} & \frac{\partial C_Z}{\partial q} & \frac{\partial C_Z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

que pode ser reescrita como 3.30 ao se escolher como ponto de operação a origem, i.e.  $[\alpha, \beta, \delta_a, \delta_e, \delta_r, p, q, r] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ .

$$\begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} C_{X0} \\ C_{Y0} \\ C_{Z0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{X\alpha} & C_{X\beta} & C_{X\delta_a} & C_{X\delta_e} & C_{X\delta_r} \\ C_{Y\alpha} & C_{Y\beta} & C_{Y\delta_a} & C_{Y\delta_e} & C_{Y\delta_r} \\ C_{Z\alpha} & C_{Z\beta} & C_{Z\delta_a} & C_{Z\delta_e} & C_{Z\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + \frac{D}{2V_M} \begin{bmatrix} C_{Xp} & C_{Xq} & C_{Xr} \\ C_{Yp} & C_{Yq} & C_{Yr} \\ C_{Zp} & C_{Zq} & C_{Zr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

em que  $C_{ij} = \frac{\partial C_i}{\partial j}$  e  $D$  corresponde ao diâmetro da seção transversal do míssil (também chamado de comprimento de referência). Esses coeficientes parciais ainda são altamente não lineares nas variáveis aerodinâmicas e geralmente são descritos por polinômios de até 3º grau. Seus valores são determinados experimentalmente em túneis de vento. O leitor atento pode perceber que não há derivada em relação ao número de Mach, mas cabe mencionar que essa dependência (em relação ao número de Mach) se encontra nas expressões individuais de cada coeficiente, ou seja  $C_{ij} = f(\dots, M, \dots)$ . Na Equação 3.30, os termos que multiplicam ângulos são os chamados coeficientes de estabilidade, já os termos que multiplicam taxas angulares, são denominados de coeficientes de amortecimento.

Devido à simetria do míssil, as seguintes igualdades, dadas pela Equação 3.31, são verdadeiras para os coeficientes aerodinâmicos:

$$\begin{aligned} C_{Z\alpha} &= C_{Y\beta} \\ C_{Z\delta_e} &= C_{Y\delta_r} \\ C_{Zq} &= C_{Yr} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Outros coeficientes da Equação 3.30 podem ser desprezados (são praticamente nulos) e a equação final para os coeficientes de força aerodinâmica é dada por 3.32.

$$\begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} C_{X0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Y\beta} & 0 & 0 & C_{Y\delta_r} \\ C_{Z\alpha} & 0 & 0 & C_{Z\delta_e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + \frac{D}{2V_M} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Yr} \\ 0 & C_{Zq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.2.6 Força de Propulsão

A força de propulsão de um míssil é fornecida pelo motor e pode ser descrita por um vetor atuando no bocal de saída do propulsor. Ela não é constante em todo o voo do míssil e seu valor pode ser descrito por um gráfico temporal conhecido pelo projetista. Uma representação da força de propulsão atuando em um míssil pode ser vista na Figura 14:

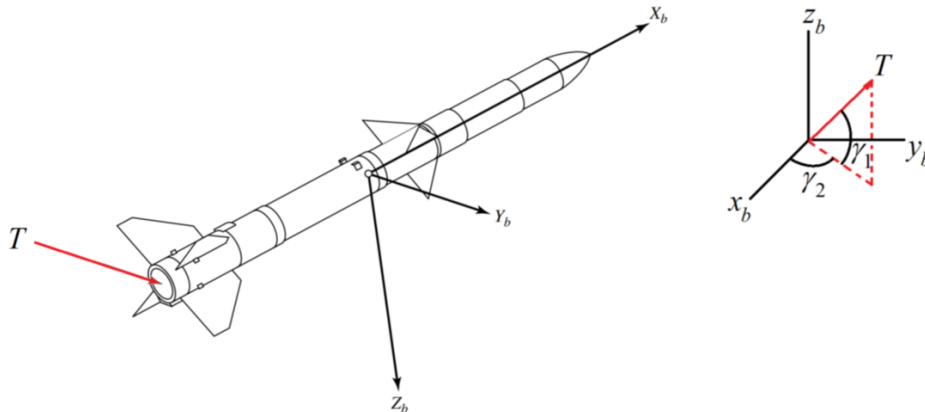


Figura 14 – Vetor de propulsão, adaptada de (1).

Alguns tipos de mísseis têm capacidade de direcionar a força de propulsão por meio de ajuste do bocal de saída dos gases de propulsão, o que é denominado de Controle de Vetor de Propulsão, ou TVC (do inglês *Thrust Vector Control*). Nessa dissertação, considera-se o modelo mais simples em que o vetor de propulsão passa pelo CG do míssil e é direcionado no sentido positivo de  $X_b$ . Dessa forma, elimina-se completamente os efeitos de torque/momento que seriam provocados caso o vetor fosse orientado de outra maneira. A Equação 3.33 apresenta as componentes desse vetor:

$$T = \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} \quad \text{Por simplificação:} \quad T = \begin{bmatrix} T_X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

### 3.2.7 Força Gravitacional

O vetor da força de gravidade atua no CG do míssil e aponta para o centro da Terra. Sua orientação é dada conforme representado na Figura 15. Por meio de transformação de coordenadas, é possível decompor esse vetor de força gravitacional em cada um dos eixos do corpo do míssil, cuja expressão é dada pela Equação 3.34.

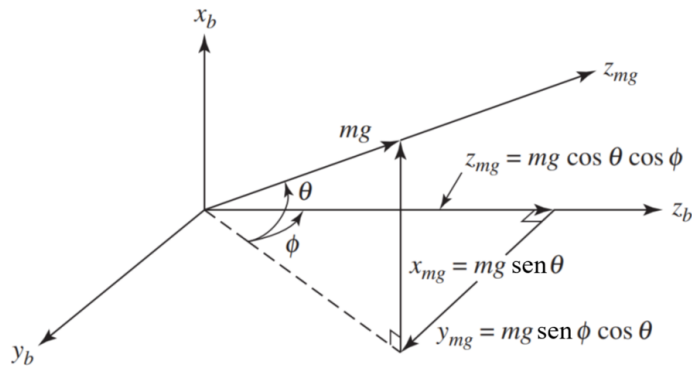


Figura 15 – Decomposição do vetor de aceleração gravitacional, adaptada de (1).

$$\begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = [R_e^b] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta \\ \operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix}$$

### 3.2.8 Momentos e Coeficientes de Momento Aerodinâmicos

De maneira similar a utilizada para definição das forças aerodinâmicas, define-se agora os momentos aerodinâmicos, cuja expressão é dada pela Equação 3.35 e que dependem dos coeficientes aerodinâmicos de momento.

$$\begin{bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} = QSD \begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Cada coeficiente de momento é uma função não linear das variáveis aerodinâmicas, conforme 3.36.

$$C_i = f(\alpha, \beta, M, \delta_a, \delta_e, \delta_r, p, q, r) \quad (3.36)$$

Utilizando de derivadas parciais, chega-se na seguinte aproximação linear, representada de forma matricial por 3.37.

$$\begin{bmatrix} \Delta C_l \\ \Delta C_m \\ \Delta C_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_l}{\partial \beta} & \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_l}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_m}{\partial \beta} & \frac{\partial C_m}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_m}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} & \frac{\partial C_n}{\partial \beta} & \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a} & \frac{\partial C_n}{\partial \delta_e} & \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C_l}{\partial p} & \frac{\partial C_l}{\partial q} & \frac{\partial C_l}{\partial r} \\ \frac{\partial C_m}{\partial p} & \frac{\partial C_m}{\partial q} & \frac{\partial C_m}{\partial r} \\ \frac{\partial C_n}{\partial p} & \frac{\partial C_n}{\partial q} & \frac{\partial C_n}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Escolhendo a origem como ponto de linearização, chega-se na representação final dada por 3.38:

$$\begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{l\alpha} & C_{l\beta} & C_{l\delta_a} & C_{l\delta_e} & C_{l\delta_r} \\ C_{m\alpha} & C_{m\beta} & C_{m\delta_a} & C_{m\delta_e} & C_{m\delta_r} \\ C_{n\alpha} & C_{n\beta} & C_{n\delta_a} & C_{n\delta_e} & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + \frac{D}{2V_M} \begin{bmatrix} C_{lp} & C_{lq} & C_{lr} \\ C_{mp} & C_{mq} & C_{mr} \\ C_{np} & C_{nq} & C_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Novamente, devido à simetria do míssil, as seguintes igualdades são verdadeiras 3.39:

$$\begin{aligned} C_{n\beta} &= -C_{m\alpha} \\ C_{n\delta_r} &= C_{m\delta_e} \\ C_{nr} &= C_{mq} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dessa maneira, e dado que alguns dos termos podem ser desprezados, chega-se à representação final dada pela Equação 3.40:

$$\begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{l\delta_a} & 0 & 0 \\ C_{m\alpha} & 0 & 0 & C_{m\delta_e} & 0 \\ 0 & C_{n\beta} & 0 & 0 & C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + \frac{D}{2V_M} \begin{bmatrix} C_{lp} & 0 & 0 \\ 0 & C_{mq} & 0 \\ 0 & 0 & C_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

### 3.2.9 Momentos Devido à Variação do Centro de Gravidade

Na Seção 3.2.4, foi informado que é assumido que o míssil possui massa aproximadamente constante, mas na realidade sabe-se que durante o processo de queima do combustível a massa varia de um máximo até um mínimo, quando então a propulsão cessa e a massa permanece constante, o que é chamada de fase pós-queima. Dependendo do tipo de combustível e do projeto do míssil (que pode prever mecanismos de compensação de alteração do CG), essa variação é pequena e não produz momentos induzidos devido à variação do CG, o que provocaria um braço de alavanca entre a origem do sistemas de coordenadas em que as equações de força são formuladas e o novo CG. A Equação 3.41 mostra a fórmula do momento devido à variação do CG. Note que apenas as forças em  $Y_b$  e  $Z_b$  provocam momentos, já que as forças em  $X_b$  continuam passando pelo novo CG, que se desloca longitudinalmente.

$$\begin{bmatrix} L_{\Delta cg} \\ M_{\Delta cg} \\ N_{\Delta cg} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ -C_Z \\ C_Y \end{bmatrix} \Delta cg \quad (3.41)$$

Nessa dissertação, essas componentes de momento induzido são desprezadas, pois considera-se  $\Delta cg \approx 0$ .

### 3.3 Modelo Dinâmico 6-DOF do Míssil

Nesta seção, o modelo completo na representação em espaço de estados para a dinâmica 6-DOF é estabelecido, a partir das equações das seções anteriores e a partir das equações de movimento dadas pela 2ª Lei de Newton, expressa pela Equação 3.42:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt}[\vec{p}]_e = \frac{d}{dt}[m\vec{V}_M]_e = m \left[ \frac{d\vec{V}_M}{dt} \right]_e = m \left( \left[ \frac{d\vec{V}_M}{dt} \right]_b + \vec{\omega} \times \vec{V}_M \right) \\ \vec{M} &= \frac{d}{dt}[\vec{H}]_e = \left[ \frac{d\vec{H}}{dt} \right]_b + \vec{\omega} \times \vec{H} \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que  $\vec{p}$  é o vetor de momento linear e  $\vec{H}$  é o vetor de momento angular, os subíndices  $e$  (Terra, referencial inercial) e  $b$  (corpo do míssil, referencial não-inercial) servem para indicar em qual referencial esses vetores estão representados.

As derivadas do vetor  $\vec{V}_M$  são as acelerações no referencial do corpo e expressas por:

$$\left[ \frac{d\vec{V}_M}{dt} \right]_b = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

O vetor de momento angular tem as seguinte componentes:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{bmatrix} = I\vec{\omega} \quad (3.44)$$

em que  $I$  corresponde ao tensor de inércia do míssil e é dado por:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = I^T \quad (3.45)$$

Devido à simetria do míssil, todas as componentes de produto de inércia (fora da diagonal principal) são nulas e  $I_y$  é igual a  $I_z$ , portanto, o formato final do tensor de inércia é o seguinte:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Os produtos vetoriais de  $\vec{\omega} \times \vec{V}_M$  e  $\vec{\omega} \times \vec{H}$  são expressos pela Equação 3.47 abaixo:

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_M = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{H} = \begin{bmatrix} qH_Z - rH_Y \\ rH_X - pH_Z \\ pH_Y - qH_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ pr(I_x - I_y) \\ pq(I_y - I_x) \end{bmatrix}$$

em que se faz uso da matriz antissimétrica dada pela Equação 3.48, para representar a operação de produto vetorial na forma matricial:

$$[\vec{\omega}]_{\times} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

É necessário calcular a derivada do momento angular no referencial do corpo, dada pela Equação 3.49:

$$\left[ \frac{d\vec{H}}{dt} \right]_b = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{p} \\ I_y \dot{q} \\ I_y \dot{r} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Os vetores de força e de momento podem ser decompostos nas suas componentes em cada um dos eixos coordenados e expressos por:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \sum F_X \\ \sum F_Y \\ \sum F_Z \end{bmatrix} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} \sum M_X \\ \sum M_Y \\ \sum M_Z \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A partir das equações anteriores, a Equação 3.42 pode agora ser reescrita por:

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_X \\ \Sigma F_Y \\ \Sigma F_Z \end{bmatrix} = m \left( \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_X \\ \Sigma M_Y \\ \Sigma M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Isolando as derivadas dos 6-DOF no lado esquerdo da igualdade, chega-se na representação dada pela Equação 3.52:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \Sigma F_X \\ \Sigma F_Y \\ \Sigma F_Z \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma M_X \\ \Sigma M_Y \\ \Sigma M_Z \end{bmatrix} \right)$$

Conforme informado na Seção 3.2.4 (pág. 66) o míssil está sujeito à atuação de 3 forças (aerodinâmica, propulsão e gravitacional) e de 2 momentos (aerodinâmico e devido à alteração do CG), portanto, o somatório de forças e momentos é dado pela Equação 3.53:

$$\begin{bmatrix} \Sigma F_X \\ \Sigma F_Y \\ \Sigma F_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X^A \\ F_Y^A \\ F_Z^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_X \\ \Sigma M_Y \\ \Sigma M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\Delta cg} \\ M_{\Delta cg} \\ N_{\Delta cg} \end{bmatrix}$$

Agora, é possível escrever as equações dinâmicas 6-DOF que regem o comportamento do míssil sujeito às forças e momentos externos. Porém, devido à dependência de muitos coeficientes em relação à  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $M$ , para simplificar a análise, é necessário realizar uma última mudança de coordenadas, de retangulares para polares, dessa forma as componentes  $[\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]$  podem ser convertidas em  $[\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{M}]$ . Para isso, é necessário calcular as derivadas do ângulo de ataque, do ângulo de derrapagem e do número de Mach, dadas pelas Equações 3.54 e 3.55.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_s M \cos \beta} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta & -\sin \alpha \sin \beta \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\dot{M} = \frac{\dot{V}_M}{V_s} = \frac{1}{V_s} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Uma equação que precisa também ser incluída no modelo corresponde à relação entre a velocidade angular do míssil e a taxa de variação dos ângulos de Euler, dada pela Equação 3.56:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

em que para tornar a notação mais legível, as funções trigonométricas  $\sin(\cdot)$ ,  $\cos(\cdot)$  e  $\tan(\cdot)$  foram substituídas pela notação  $s$ ,  $c$  e  $t$ , respectivamente.

Por último, é necessário incluir a equação da posição do míssil no referencial inercial, principalmente para que seja possível calcular a altitude  $h$  devido a dependência que existe para  $\rho$  e  $V_s$ . As Equações 3.57 e 3.58 apresentam essa dinâmica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_b^e \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\theta c_\psi + s_\beta (s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi) + s_\alpha c_\beta (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ c_\alpha c_\beta c_\theta s_\psi + s_\beta (s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi) + s_\alpha c_\beta (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ -c_\alpha c_\beta s_\theta + s_\beta s_\phi c_\theta + s_\alpha c_\beta c_\phi c_\theta \end{bmatrix} V_s M$$

Utilizando-se a igualdade  $h = -z$ , chega-se na seguinte equação dinâmica para a altitude:

$$\dot{h} = (c_\alpha c_\beta s_\theta - s_\beta s_\phi c_\theta - s_\alpha c_\beta c_\phi c_\theta) V_s M \quad (3.58)$$

A Equação 3.59 apresenta o modelo em espaço de estados da dinâmica 6-DOF completa.





### 3.4 Modelo Dinâmico 3-DOF do Míssil

Algumas simplificações extras podem ser feitas no modelo para se chegar na representação em espaço de estados da dinâmica 3-DOF. Primeiramente, é necessário definir dois conceitos, que se referem ao movimento do míssil em duas dinâmicas acopladas distintas: (a) dinâmica longitudinal, que consiste na movimentação longitudinal do míssil no plano vertical ( $X_b, Z_b$ ) e a rotação em torno de  $Y_b$  (arfagem); e (b) dinâmica latero-direcional, que consiste na movimentação do míssil no plano horizontal ( $X_b, Y_b$ ) e as rotações em torno de  $X_b$  (rolagem) e de  $Z_b$  (guinada).

Igualando-se a zero todas as variáveis relativas à dinâmica latero-direcional, chega-se na Equação 3.60 para a dinâmica longitudinal:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{M} \\ \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2m}\rho V_s S [-C_X s_\alpha + C_Z c_\alpha] \sigma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m}\rho V_s S [C_X c_\alpha + C_Z s_\alpha] M \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2I_y}\rho V_s^2 S D C_m M \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_s s_\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ M \\ q \\ h \\ \theta \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{mV_s M} s_\alpha & \frac{1}{V_s} \frac{c_\gamma}{M} \\ 0 & \frac{1}{mV_s} c_\alpha & -\frac{1}{V_s} s_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{com} \\ T \\ g \end{bmatrix}$$

em que  $\delta = \delta_e$  e  $T = T_X$ . A variável  $\gamma = \theta - \alpha$  é chamada de ângulo de trajetória de voo. O modelo de míssil adotado neste trabalho possui sensores (giroscópio e acelerômetro), capazes de medir as seguintes variáveis de saída, dadas por 3.61:

$$y = \begin{bmatrix} q \\ a_Z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Por fim, as expressões dos coeficientes aerodinâmicos  $C_X$ ,  $C_Z$  e  $C_m$ , utilizados nas Equações 3.16 (pág. 68) e 3.35 (pág. 74), para o modelo de míssil teórico empregado nessa dissertação são dados pelas Equações 3.62 e foram retirados de Mracek e Cloutier (19) e (20):

$$C_X = a_x$$

$$C_Z = a_z \alpha^3 + b_z \alpha |\alpha| + c_z \left(2 - \frac{M}{3}\right) \alpha + d_z \delta \quad (3.62)$$

$$C_m = a_m \alpha^3 + b_m \alpha |\alpha| + c_m \left(-7 + \frac{8M}{3}\right) \alpha + d_m \delta + e_m q$$

Os valores dos coeficientes polinomiais são mostrados na Tabela 3

Tabela 3 – Coeficientes polinomiais aerodinâmicos para a Equação 3.62

Força Axial ( $C_X$ )	Força Normal ( $C_Z$ )	Momento de Arfagem ( $C_m$ )
$a_x = -0,300$	$a_z = 19,373$ $b_z = -31,023$ $c_z = -9,717$ $d_z = -1,948$	$a_m = 40,440$ $b_m = -64,015$ $c_m = 2,922$ $d_m = -11,803$ $e_m = -1,719$

A Tabela 4 apresenta as características físicas do míssil teórico, também retirada das referências (19) e (20):

Tabela 4 – Características físicas do míssil

Símbolo	Nome	Valor
$I_y$	Momento de Inércia	247,44 kg.m <sup>2</sup>
$S$	Área de Referência	0,04088 m <sup>2</sup>
$D$	Comprimento de Referência	0,2286 m
$m$	Massa	204,02 kg
$g$	Gravidade	9,80665 m/s <sup>2</sup>

A Equação 3.60 é a equação completa para a dinâmica 3-DOF, considerando a propulsão e a gravidade. Esta é a equação utilizada para a simulação não linear do míssil no plano longitudinal. Para o projeto do controlador MPC para a dinâmica longitudinal, é possível simplificar ainda mais o modelo.

Como o controlador projetado possui um horizonte de predição de  $N = 8$  amostras à frente e o tempo de amostragem para o piloto automático é  $T_s = 20$  ms, isso implica uma janela móvel de predição de 160 ms, portanto, o modelo de predição, a ser utilizado pelo controlador, pode ser simplificado de maneira que essa simplificação não implique em grandes erros de predição. Desde que o controlador tenha acesso ao estado atual por meio de um observador de estados ou através da medição direta, é possível utilizar um modelo aproximado para predição, já que o problema de otimização é solucionado a cada amostra e apenas o sinal de controle  $u_0^*$ , que é o primeiro elemento da sequência calculada, é aplicado no instante  $k$ , e no instante  $k + 1$ , uma nova solução, a partir das medições

atuais, será calculada. Portanto, apresenta-se abaixo as simplificações nas equações que são utilizadas pelo modelo de predição do controlador.

$$\begin{aligned}\frac{1}{mV_s M} s_\alpha &\approx 0 \\ \frac{1}{mV_s} c_\alpha &\approx 0 \\ \frac{1}{V_s} \frac{c_\gamma}{M} &\approx 0\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$s_\gamma \approx 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s_\alpha \approx 0 \\ c_\alpha \approx 1 \end{array} \right\} \text{para } \alpha \ll 1$$

Como a derivada da altitude é aproximadamente nula, a partir das aproximações da Equação 3.63, e o número de Mach depende apenas da altitude  $h$  (nos termos  $\rho$  e  $V_s$ ) e do próprio número de Mach, isso implica que o número de Mach pode ser considerado uma variável autônoma. Sua equação pode, então, ser retirada da dinâmica do sistema. Dessa forma,  $M$  e  $h$  são consideradas variáveis exógenas, e são estimadas/medidas para escalonamento dos termos internos da matriz  $A$  do modelo em espaço de estados *quasi*-LPV dado pela Equação 3.64.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2m}\rho V_s S \left[ a_z \alpha^2 + b_z |\alpha| + c_z \left( 2 - \frac{M}{3} \right) \right] M \sigma & 1 & \frac{1}{2m}\rho V_s S d_z M \sigma & 0 \\ \frac{1}{2I_y} \rho V_s^2 S D \left[ a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m \left( -7 + \frac{8M}{3} \right) \right] M^2 \sigma & \frac{1}{2I_y} \rho V_s^2 S D e_m M^2 \sigma & \frac{1}{2I_y} \rho V_s^2 S D d_m M^2 \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \delta^{com}\end{aligned}\tag{3.64}$$

É possível observar que os termos da Matriz  $A$  são dependentes também do ângulo de ataque ( $\alpha$ ), que é uma variável endógena e não pode ser isolada da dinâmica, daí a denominação *quasi*-LPV.

Um modelo aproximado para a predição das variáveis de escalonamento ( $M, h$ ) é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{1}{2m}\rho V_s S a_x M^2 \sigma \\ \dot{h} &= 0\end{aligned}\tag{3.65}$$

A Equação 3.66 apresenta, explicitamente, a dependência dos termos da matriz  $A$  com relação às variáveis de escalonamento ( $\alpha, M, h$ ). Essa é a representação usual

encontrada em muitos trabalhos de controle da dinâmica longitudinal de mísseis conforme apresentado por Pellanda *et al.* (23), com a diferença de que são introduzidos um termo de amortecimento  $M_q(M, h)$ , a dependência dos termos em relação a altitude  $h$ , e o termo  $\sigma(M)$  que, diferentemente dos trabalhos de outros autores, nesta dissertação não é utilizada a aproximação  $\sigma(M) = 1$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha(\alpha, M, h)\sigma(M) & 1 & Z_{\delta_e}(M, h)\sigma(M) & 0 \\ M_\alpha(\alpha, M, h)\sigma(M) & M_q(M, h)\sigma(M) & M_\delta(M, h)\sigma(M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \delta^{com} \quad (3.66)$$

Assim, dois modelos são utilizados pelo controlador MPC proposto, um modelo completo utilizado para simulação e atualização do estado interno do controlador, dado pela Equação 3.60, e outro modelo simplificado para predição, utilizado no OCP, dado pelas Equações 3.64 e 3.65. O modelo simplificado de predição tem a função, dentre outras, de permitir a obtenção da solução ótima de maneira mais rápida, eliminando variáveis, reduzindo a dimensão do problema e eliminando não linearidades irrelevantes, tornando o problema aproximadamente linear (dentro da janela de predição). Dessa forma, o OCP se torna, possivelmente, convexo (dentro da janela de predição). No Capítulo 4, a seguir, são apresentadas algumas considerações adicionais sobre o OCP, especificamente sobre as matrizes de ponderação e sobre o modelo de predição, que devem ser satisfeitas, para garantir a convexidade da função custo.

## 4 CONTROLE DE MÍSSEIS

Neste capítulo, é apresentado de maneira simplificada o funcionamento do sistema de controle de mísseis e a integração entre o piloto automático e o sistema de guiamento. São apresentados os desafios e requisitos específicos para este tipo de aplicação, tais como os limites físicos do atuador e limites estruturais do míssil, além das especificações de desempenho que impõem restrições adicionais ao problema. Em seguida, são apresentados os resultados das simulações para o sistema nominal utilizando a dinâmica longitudinal desenvolvida no Capítulo 3. Por último, para relacionar este trabalho com os trabalhos anteriores de Simões e Cavalcanti (16, 2), o modelo é adaptado para permitir uma comparação de desempenho entre os dois controladores. O controlador projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2) é um controlador *quasi*-LPV que utiliza uma nova técnica de controle robusto (especificamente a síntese IQC estruturada baseada em otimização não diferenciável) para o problema de controle do míssil. Nesse trabalho, os autores modelam as não linearidades e incertezas da planta por meio de operadores IQC estruturados e buscam atender as especificações de desempenho no domínio do tempo por meio de funções de ponderação frequenciais (via análise de sensibilidade mista). No texto que se segue esse controlador é denominado de  $K_{IQC}$ .

### 4.1 Sistema de Controle de Mísseis

#### 4.1.1 Diagrama de Blocos

A Figura 16 apresenta o diagrama de blocos simplificado do sistema de controle de mísseis.

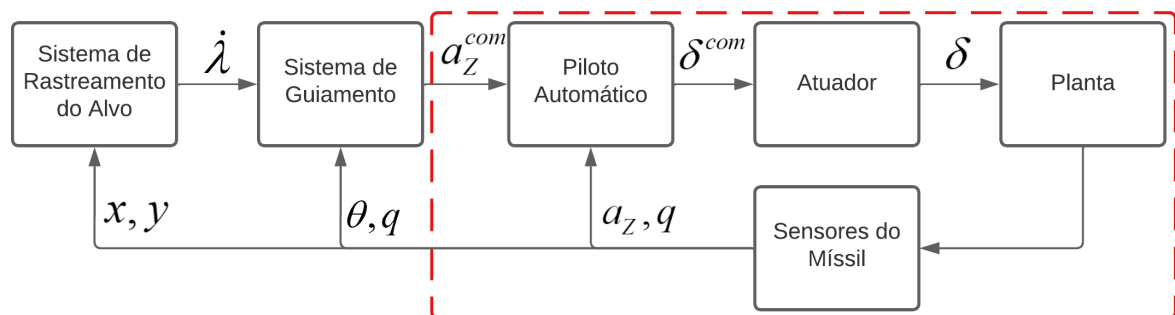


Figura 16 – Diagrama de blocos do sistema de controle de mísseis.

em que  $(x, y)$  corresponde às coordenadas do míssil no referencial inercial, e  $\lambda$  é o ângulo da linha de visada (ou LOS, do inglês *Line-of-Sight*), que é referente ao ângulo entre a

linha imaginária que conecta o sensor de rastreamento (geralmente um radar) e o alvo, e o plano  $(X_e, Y_e)$  do referencial inercial.

O míssil é equipado com sensores capazes de fornecer medições de estados internos e da posição do alvo, para os diferentes sistemas de controle. O sistema de guiamento recebe a informação de posição relativa do alvo e de atitude e velocidade angular do míssil, em seguida, ele determina um comando de aceleração para que o míssil se direcione ao alvo. O piloto automático recebe esse comando de aceleração e determina comandos de deflexão de aleta para que as forças aerodinâmicas de fato produzam a aceleração desejada. Devido à dinâmica e restrições físicas do atuador, é incluído um bloco separado para expressar essas características. Por último, o ângulo de deflexão efetivo das aletas produz variações de pressão na superfície aerodinâmica do corpo do míssil e o míssil é efetivamente movimentado no ar. A próxima seção apresenta de forma detalhada os desafios e requisitos específicos para o controle de mísseis.

#### 4.1.2 Desafios e Requisitos Específicos

As restrições típicas para este tipo de aplicação consistem em:

- **Limite máximo de deflexão das aletas:** o atuador possui um limite físico, e mesmo que o controlador demande uma deflexão maior, o atuador é saturado em um valor máximo ou mínimo de deflexão. Esse limite físico é imposto no projeto do míssil para impedir que o atuador provoque manobras com altos ângulos de ataque, as quais poderiam provocar a perda de sustentação (*stall*). Geralmente, o valor de ângulo de ataque crítico, em que pode ocorrer *stall*, está entre  $15^\circ$  e  $20^\circ$ . Para o modelo de míssil teórico utilizado, isso implica em um limite de  $\delta = \pm 30^\circ$ , porém, para fins didáticos, adota-se um limite de  $\delta = \pm 45^\circ$  que é o valor que provoca o máximo ângulo de ataque de  $\pm 20^\circ$ .
- **Taxa máxima de deflexão das aletas:** geralmente o atuador é capaz de se movimentar rapidamente (tipicamente de  $500^\circ/\text{s}$ ) e essa taxa de variação real quase nunca é atingida, o que geralmente se faz é definir uma taxa máxima de variação bem inferior ao limite físico (e.g. de  $50^\circ/\text{s}$ ), para evitar excitar modos de vibração de alta frequência não modelados além de evitar, também, manobras agressivas (altas acelerações estruturais), devido à resposta de fase não-mínima, para comandos em degrau.
- **Limite máximo de aceleração:** apesar do míssil ser considerado como um corpo rígido, caso o míssil seja submetido à acelerações elevadas, pode ocorrer deformações estruturais significativas capazes de alterar o comportamento dinâmico temporariamente (regime elástico) ou mesmo deformar plasticamente o míssil.

- **Limites de envelope de voo:** como as equações do modelo desenvolvido no Capítulo 3 (principalmente as dos coeficientes aerodinâmicos) são válidas para valores limitados de ângulo de ataque, número de Mach e altitude, esses limites devem ser considerados na descrição do OCP. Além disso, especificamente no caso do ângulo de ataque, caso o valor exceda o limite (chamado de ângulo de ataque crítico), o míssil poderá entrar em *stall* e perder a sustentação aerodinâmica.

Outros limites podem ser considerados, dependendo da aplicação específica, porém, a lista acima engloba as principais restrições desse tipo de aplicação.

Para descrever essas restrições no OCP, é possível tratá-las em duas classificações:

- **Restrições Suaves** (*Soft Constraints*): São inseridas no problema de otimização por meio de variáveis de folga (*slack variables*) e tenta-se minimizar a diferença entre o valor da variável de decisão e o valor limite. Em outras palavras, qualquer violação da restrição deve ser minimizada (penalizada). A vantagem desse tipo de abordagem é que o programa de otimização tentará encontrar uma solução viável mesmo que essa solução viole um pouco a restrição, isso tipicamente se traduz em um maior espaço de soluções viáveis.
- **Restrições Rígidas** (*Hard Constraints*): São inseridas no problema de otimização por meio de restrições de desigualdade. Essas restrições impõem dificuldades adicionais na obtenção da solução do OCP e podem, a depender da característica do problema e da função custo, tornar o problema inviável quando as restrições estiverem ativas.

Nesta dissertação, foram consideradas as restrições descritas na Tabela 5, para o problema de controle do míssil teórico apresentado no Capítulo 3:

Tabela 5 – Restrições do OCP para o modelo teórico de míssil

Variável	Restrição	Tipo
Máxima deflexão	$-45^\circ \leq \delta \leq 45^\circ$	Rígida
Taxa máxima de deflexão	$-50^\circ/\text{s} \leq \dot{\delta} \leq 50^\circ/\text{s}$	Rígida

Para não restringir demasiadamente o problema, não foram incluídas restrições para as demais variáveis, porém é importante esclarecer que para os cenários típicos simulados, as restrições adicionais da Tabela 6, foram (quase sempre) atendidas, ou levemente violadas, apesar de não estarem consideradas diretamente na descrição do OCP.



Tabela 6 – Restrições adicionais para o modelo teórico de míssil, não consideradas no OCP

Variável	Restrição	Tipo
Ângulo de ataque	$-20^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$	Suave
Número de Mach	$2 \leq M \leq 4$	Suave
Altitude	$0 \leq h \leq 11\text{km}$	Suave
Aceleração normal	$-40g \leq a_z \leq 40g$	Suave

## 4.2 Controle de Mísseis Utilizando MPC

### 4.2.1 Superfície de Equilíbrio

A superfície de equilíbrio pode ser definida como o conjunto de pontos no espaço  $\mathbb{R}^{n+m}$ , em que  $n$  é o número de estados do sistema e  $m$  é o número de entradas, que satisfazem a condição:

$$\begin{aligned} x_r = f(x_r, u_r) &\Leftrightarrow \dot{x} = f_c(x_r, u_r) = 0 \\ y_r = h(x_r, u_r) & \quad y_r = h(x_r, u_r) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ao retirar a dinâmica do atuador (ver Figura 16, pág. 85), a equação final, da dinâmica isolada da planta, consiste apenas nas equações de  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{q}$ , conforme pode ser observado na Figura 17. Nessa Figura, as variáveis de escalonamento  $M$  e  $h$  possuem uma dinâmica própria, separada da planta, e são consideradas como entradas exógenas (condições iniciais).

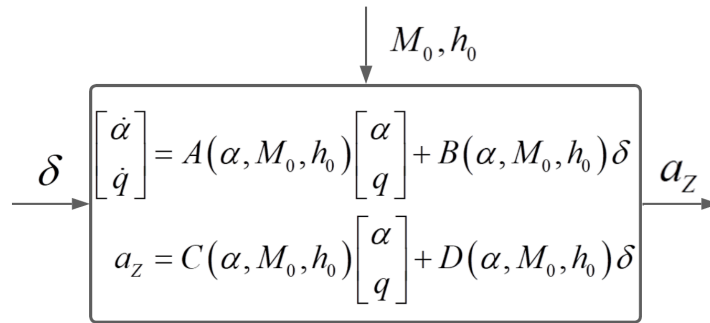


Figura 17 – Dinâmica isolada da planta.

Portanto, no caso da dinâmica longitudinal do míssil, a superfície de equilíbrio é o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^3$ , que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{2m} \rho(h_0) V_s(h_0) M_0 \sigma(M_0) S C_Z(\alpha, M_0, \delta) + q = 0 \\ \dot{q} &= \frac{1}{2I_y} \rho(h_0) V_s^2(h_0) M_0^2 \sigma(M_0) S D C_m(\alpha, M_0, q, \delta) = 0 \\ a_z &= \frac{1}{2m} \rho(h_0) V_s^2(h_0) M_0^2 \sigma(M_0) S C_Z(\alpha, M_0, \delta) = a_z^{com} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para cada  $a_Z^{com}$ , e dada uma condição inicial  $(M_0, h_0)$ , existe um único ponto de equilíbrio, em que  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{q}$  são nulos em regime permanente e  $\alpha$ ,  $q$  e  $\delta$  satisfazem o sistema de equações 4.2.

O sistema de equações anterior é não linear e precisa ser solucionado através de métodos numéricos. Trata-se de um sistema de 3 equações e 3 incógnitas  $(\alpha, q, \delta)$  e foi verificado que possui solução real única para a seguinte faixa de operação  $a_Z^{com} \in [-350; 350]$ ,  $M_0 \in [1,5; 4,5]$  e  $h_0 \in [0; 11\text{km}]$ .

Portanto, o ponto de equilíbrio é caracterizado pela terna:

$$(x_r, u_r) = [\alpha_r \quad q_r \quad \delta_r]^T \quad (4.3)$$

e a saída, pela seguinte igualdade:

$$y_r = h(x_r, u_r) = a_Z^{com} \quad (4.4)$$

Após solucionar o sistema de equações 4.2 para cada trio  $(a_Z^{com}, M_0, h_0)$  da faixa de operação em que há solução única, e considerando  $h_0 = 6.096$  m, chega-se às soluções para as variáveis  $(\alpha_r, q_r, \delta_r)$  mostradas nas Figuras 18 a 20.

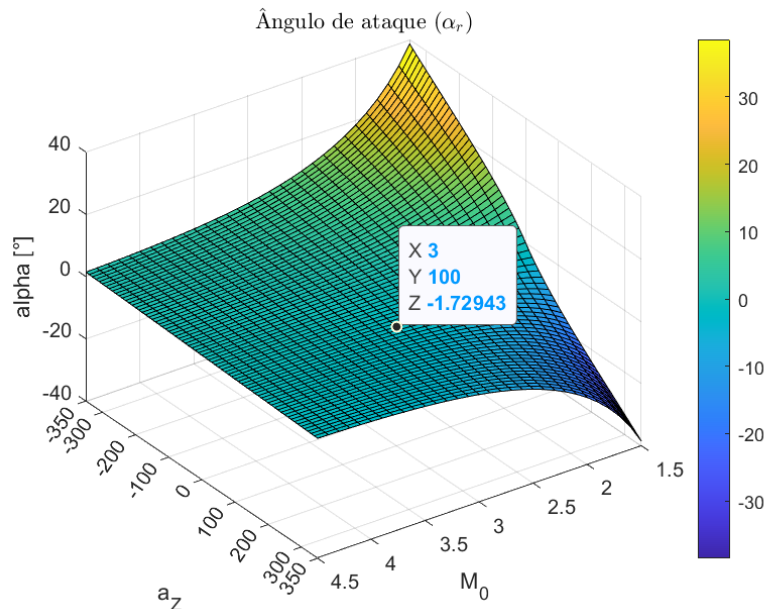


Figura 18 – Valores de equilíbrio do ângulo de ataque para diferentes valores de  $a_Z^{com}$  e  $M_0$  ( $h_0 = 6.096$  m).

Para interpretar essas figuras é simples, dada uma aceleração  $a_Z$  comandada (pelo sistema de guiamento), uma velocidade inicial ( $M_0$ ) e uma altitude inicial ( $h_0$ ), determina-se quais são os valores de referência dos estados e do sinal de controle  $(x_r, u_r)$ , que o piloto automático deve atingir. Então o controlador resolve um problema de otimização ( $\mathbb{P}_N$ ) e

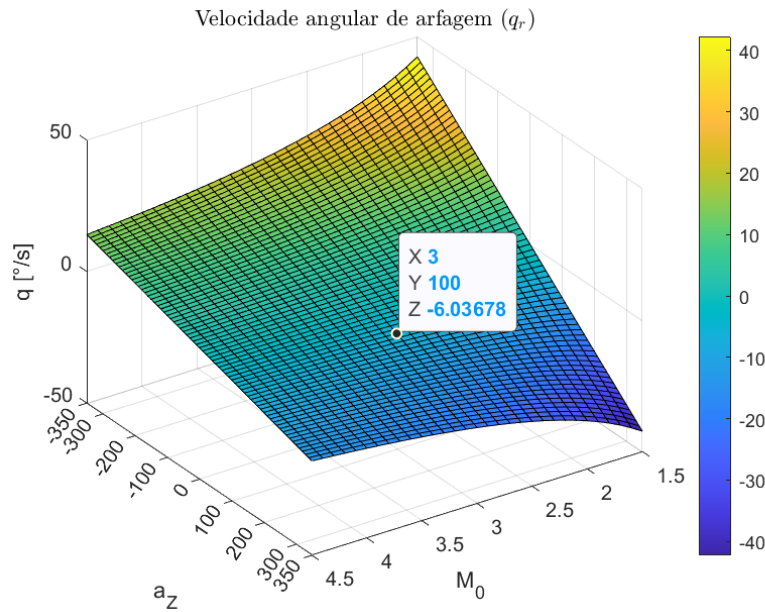


Figura 19 – Valores de equilíbrio da velocidade angular de arfagem para diferentes valores de  $a_z^{com}$  e  $M_0$  ( $h_0 = 6.096$  m).

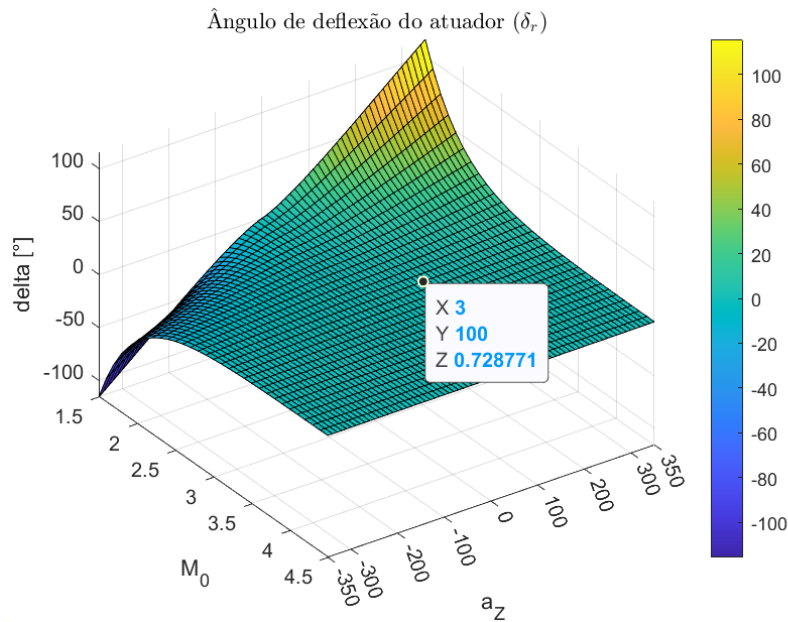


Figura 20 – Valores de equilíbrio do ângulo de deflexão da aleta de arfagem para diferentes valores de  $a_z^{com}$  e  $M_0$  ( $h_0 = 6.096$  m).

determina qual a sequência de comandos de entrada ( $\mathbf{u}^*$ ) que deve ser aplicada ao sistema para levá-lo do estado  $x$  para o estado  $x_r$  em até  $N$  intervalos de amostragem atendendo critérios de desempenho e robustez e considerando as restrições do problema. Apenas o primeiro valor dessa sequência  $u_0^*$  é aplicado no instante atual e no instante seguinte o problema de otimização é novamente solucionado para os novos valores de  $a_z^{com}$ ,  $M_0$  e  $h_0$ .

Desde que os valores de  $a_z^{com}$ ,  $M_0$  e  $h_0$  estejam nos limites da faixa de operação, o vetor  $(x_r, u_r)$  é um ponto único em  $\mathbb{R}^3$ , localizado em algum lugar definido pelas superfícies

das Figuras 18 a 20.

Para facilitar a visualização, é apresentado, na Figura 21, o gráfico em  $\mathbb{R}^3$  da superfície de equilíbrio, considerando os valores de  $[\alpha_r, q_r, \delta_r]$  para uma altitude  $h_0 = 6.096$  m,  $M \in [1,5; 4,5]$ , e comandos de aceleração positiva (i.e. para  $a_Z^{com} \in [0; 350]$ ). Para comandos de aceleração negativa, a superfície de equilíbrio é simétrica em relação a origem  $[0,0,0]$ . Para outros valores de altitude, a forma da superfície de equilíbrio irá variar, de acordo com os novos valores de  $[\alpha_r, q_r, \delta_r]$ , obtidos ao solucionar o sistema de equações 4.2.

É incluída, na Figura 21, uma trajetória dos estados do sistema para o comando em degrau de aceleração  $a_Z^{com} = 300$  m/s<sup>2</sup>, a condição inicial  $x_0 = [\alpha_0, M_0, q_0, h_0, \theta_0, \delta_0, \dot{\delta}_0]^T = [0, 3, 0, 6096, 0, 0, 0]^T$ , e considerando a altitude constante, ou seja, fazendo com que, no modelo,  $\dot{h} = 0$ , dessa forma, a superfície de equilíbrio permanece constante em todo o trajeto e facilita a visualização da trajetória do estado  $x$  até atingir a superfície de equilíbrio.

Uma observação importante, que vale ser mencionada aqui, é que alguns autores utilizam uma abordagem separada para determinar primeiro o ponto de equilíbrio  $(x_r, u_r)$ , e em seguida a solução que minimiza a função custo ( $\mathbf{u}^*$ ). Neste trabalho, adotou-se uma abordagem unificada que é capaz de determinar a solução ótima sem fornecer, ao algoritmo do OCP, o ponto de equilíbrio explicitamente. Essa abordagem foi utilizada para evitar etapas desnecessárias de processamento, reduzindo o tempo de solução do OCP.

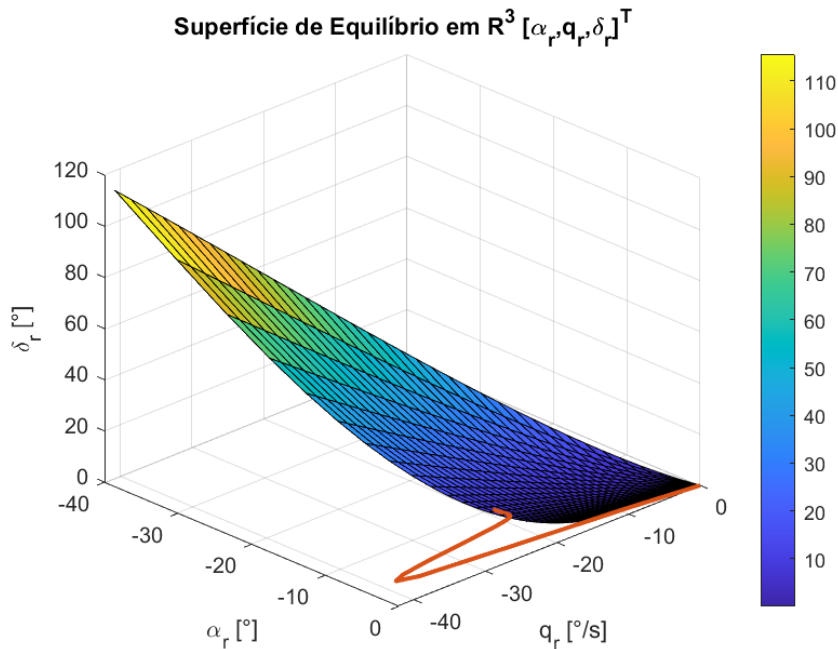


Figura 21 – Superfície de equilíbrio em  $\mathbb{R}^3$  e trajetória dos estados, para  $h_0 = 6.096$  m.

### 4.2.2 Função Custo e Convexidade

A função custo do OCP, que foi utilizada nessa dissertação, é apresentada a seguir:

$$V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|x_k - x_r\|_Q^2 + \|u_k - u_r\|_R^2 \right) + \|y_N - y_r\|_P^2 \quad (4.5)$$

sujeita às restrições de igualdade abaixo, que correspondem à dinâmica do sistema:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ x(0) &= x_0 \\ x_r &= x_N \\ u_r &= u_N \\ y_N &= h(x_N, u_N) = y_r \end{aligned} \quad (4.6)$$

As condições de estabilidade do ponto de equilíbrio, expressas pelas condições **A1** a **A9** do Capítulo 2 são atendidas pelas funções  $f(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$ ,  $V_N(\cdot)$  e  $V_f(\cdot)$ , pelas restrições  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}_f$  e  $\mathbb{U}$  e pela lei de controle terminal  $\kappa_f(\cdot) = u_r$ . Portanto, o controlador MPC pode ser utilizado para estabilizar o sistema do piloto automático do míssil.

É importante mencionar aqui, que devido ao fato do sistema ser não linear, é esperado que o problema de otimização seja não convexo. Como mencionado no Capítulo 2, em problemas não convexos, um mínimo local não necessariamente é um mínimo global. Isso representa um desafio para a estabilidade do MPC, pois a teoria de estabilidade, apresentada naquele capítulo, requer a convergência global do OCP, porém, conforme Allgöwer *et al.* (8), para alcançar a estabilidade, é suficiente conseguir a diminuição na função custo a cada intervalo de amostragem, ou seja, a viabilidade do OCP implica estabilidade do sistema em malha fechada.

Especificamente no caso do sistema do míssil adotado neste trabalho, foi definido um horizonte de controle de  $N_c = 2$ . Isso implica que o controlador precisa determinar apenas 2 variáveis de decisão a cada intervalo de amostragem. Isso permite a visualização tridimensional de  $V_N(\cdot)$  em função das variáveis de decisão  $[u_0^*, u_1^*]$ . A Figura 22 apresenta o gráfico da função custo  $V_N(\cdot)$  em função das variáveis de decisão para a seguinte condição inicial, demanda de aceleração e matrizes de ponderação:

$$\begin{aligned} x_0 &= \left[ \alpha_0 \quad M_0 \quad q_0 \quad h_0 \quad \theta_0 \quad \delta_0 \quad \dot{\delta}_0 \right]^T = \left[ 0 \quad 4 \quad 0 \quad 6096 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ y_r &= 300 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} P &= 10^{-3} \\ Q &= 10^2 \text{diag} \left( \left[ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \right] \right) \\ R &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

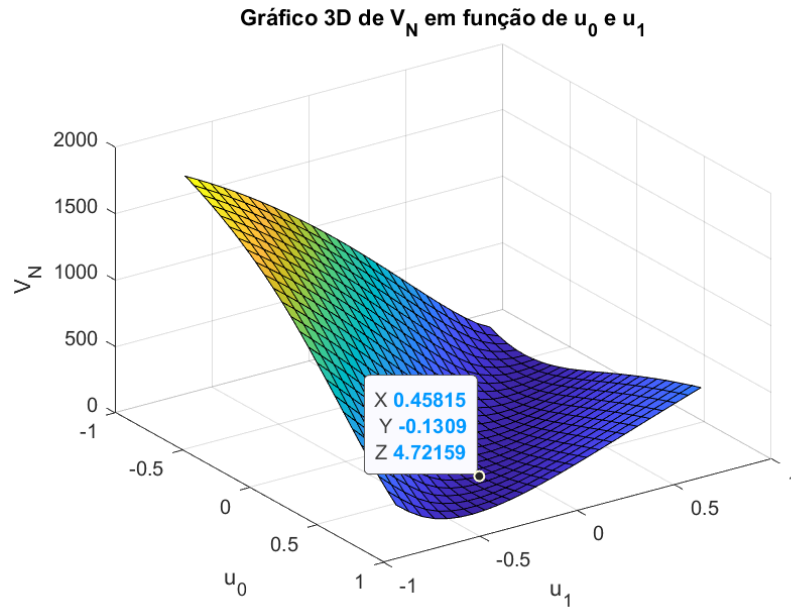


Figura 22 – Função Custo  $V_N$  em função de  $[u_0^*, u_1^*]$ , para  $P = 10^{-3}$  e modelo de predição não linear.

Observa-se na Figura 22 que a função custo é localmente convexa, nos limites de  $u_0^*$  e  $u_1^*$ . Portanto, dentro da região viável (ou domínio de viabilidade), o mínimo é global. Considere agora a seguinte mudança na matriz de ponderação terminal  $P$ :

$$P = 10^{-5} \quad (4.9)$$

A Figura 23 apresenta o gráfico da nova função custo em função das variáveis de decisão e para as mesmas condições iniciais e demanda de aceleração anteriores. Observa-se agora que, nos limites da restrição para  $u_0^*$  e  $u_1^*$ , a função é não convexa e possui 2 mínimos locais. Dependendo do ponto de partida do problema de otimização, o gradiente pode fazer com que a solução divirja da solução correta (mínimo global) e estacione em um mínimo local. As Figuras 22 e 23 foram apresentadas para mostrar ao leitor que a escolha das matrizes de ponderação tem um papel fundamental na convergência e estabilidade do sistema controlado pelo MPC Não Linear.

Uma outra abordagem que pode ser utilizada para tornar o problema de otimização convexo, descrita por Berberich *et al.* (41), consiste em obter um modelo linearizado do sistema não linear original, utilizando uma aproximação de primeira ordem por derivadas parciais. Esse modelo é então utilizado para a predição dos estados futuros e uma otimização convexa pode ser realizada, levando a uma solução global. A Figura 24 apresenta o gráfico da função custo para a mesma condição inicial e comando de aceleração dos gráficos anteriores, utilizando um modelo de predição linear, linearizado em torno do estado inicial  $x_0$ . Observe nessa figura que, como esperado, a função custo se torna convexa e a solução encontrada é  $\mathbf{u}^* = \{u_0^*, u_1^*\} = \{0, 58905; -0, 32725\}$ . Como apenas o primeiro

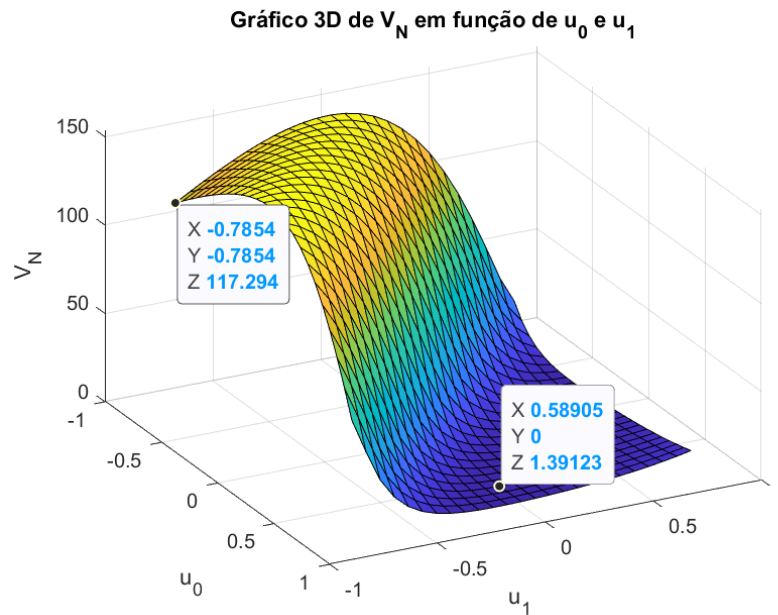


Figura 23 – Função Custo  $V_N$  em função de  $[u_0^*, u_1^*]$ , para  $P = 10^{-5}$  e modelo de predição não linear.

elemento dessa sequência é aplicado ao sistema, é possível constatar, por comparação com o mínimo global da Figura 23, que consiste exatamente na mesma solução. Portanto, um problema não convexo pode ser transformado em convexo, garantindo a obtenção da solução mínima global, equivalente à solução do problema não convexo original. No código fonte, desenvolvido em MATLAB, é possível utilizar qualquer uma das duas abordagens apresentadas acima para tornar o OCP convexo: utilizar valores adequados das matrizes de ponderação, ou linearizar o sistema a cada instante de amostragem.

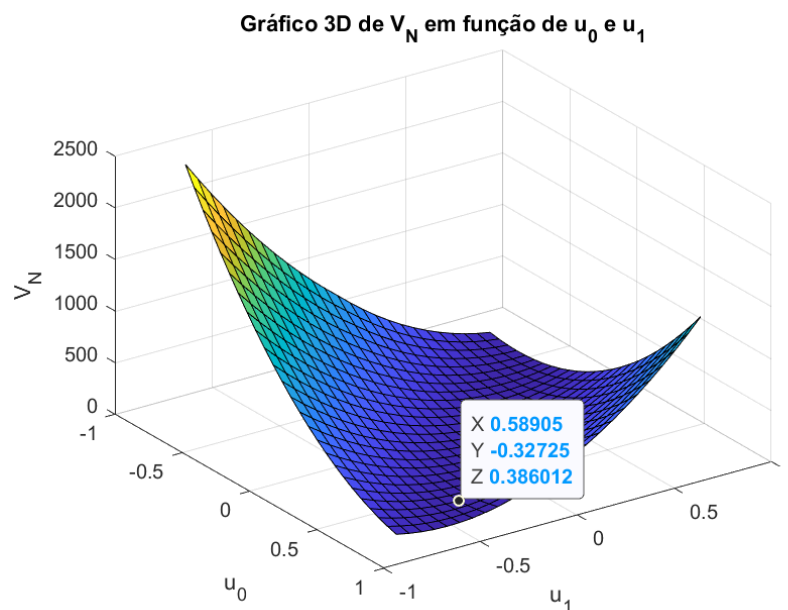


Figura 24 – Função Custo  $V_N$  em função de  $[u_0^*, u_1^*]$ , para  $P = 10^{-5}$  e modelo de predição linear.

Pode-se inferir, erroneamente, que a técnica de linearização é capaz de tornar a solução do OCP mais rápida, já que obter o mínimo de um problema convexo, com modelo de predição linear, é muito simples, e esse mínimo pode ser calculado por uma expressão analítica. Entretanto, devido ao número de operações realizadas na linearização, o tempo médio de solução do OCP, com o modelo de predição linear (linearizado a cada ponto de operação), é 50% maior do que o tempo médio de solução do mesmo OCP, com o modelo de predição não linear e matrizes de ponderação adequadamente formuladas, para tornar o problema convexo no domínio de viabilidade. Para o controlador MPC projetado, o tempo médio de solução do OCP, utilizando o modelo de predição não linear, foi de, aproximadamente, 5 ms, enquanto o tempo médio de solução do OCP, utilizando o modelo de predição linear, foi de, aproximadamente, 7,5 ms. A Tabela 7 apresenta a quantidade de operações aritméticas utilizadas na equação de  $x^+$ , para cada modelo de predição. Essa tabela serve como referência para estimar o custo computacional do OCP.

Tabela 7 – Número de Operações Aritméticas na Equação de  $x^+$ 

Modelo de Predição	Operação	Quantidade	Total
Linear	+	979	3112
	−	117	
	×	1788	
	÷	81	
	$x^y$	146	
	$\sqrt{x}$	1	
Não Linear	+	348	1255
	−	37	
	×	644	
	÷	80	
	$x^y$	145	
	$\sqrt{x}$	1	

As especificações do controlador MPC utilizado nessa dissertação são apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Especificações do controlador MPC projetado

Descrição	Símbolo	Valor
Período de Amostragem	$T_s$	20 ms
Horizonte de Predição	$N$	8
Horizonte de Controle	$N_c$	2
Ponderação dos Estados	$Q$	$10^2 \text{diag}([0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1])$
Ponderação da Entrada	$R$	0
Ponderação Terminal	$P$	1



### 4.3 Controle de Mísseis Utilizado Síntese IQC

Antes de prosseguir para as simulações e resultados, é importante apresentar aqui, de forma resumida, a teoria por trás do quadro de trabalho desenvolvido por Simões e Cavalcanti (16, 2), e o controlador de síntese obtido por esses autores, denominado adiante de controlador  $K_{IQC}$ , o qual será utilizado para comparação com o controlador MPC desenvolvido nesta dissertação.

#### 4.3.1 Síntese IQC

A Figura 25 apresenta o diagrama de blocos da interconexão padrão utilizada para a síntese IQC. O objetivo é encontrar um controlador  $K(s)$  que estabilize a planta nominal de síntese  $P(s)$  (i.e., a interconexão  $G(s) = \mathcal{F}_\ell(P, K)$  seja estável), e que faça com que o ganho do pior caso de desempenho (norma  $\mathcal{L}_2$  induzida da transferência  $w \mapsto z$ ) seja menor que um valor  $\gamma > 0$  especificado.

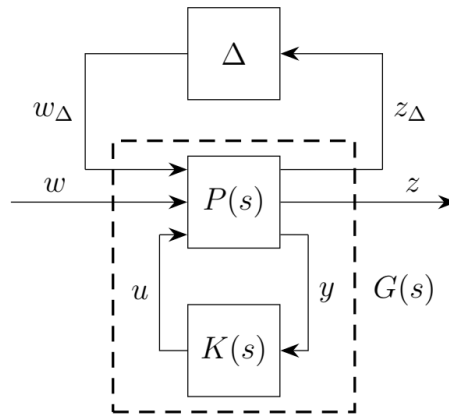


Figura 25 – Interconexão padrão para síntese IQC, adaptada de (2).

É possível descrever matematicamente esse sistema pela seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix} \\ w_\Delta = \Delta(z_\Delta) \\ u = Ky \end{array} \right. \quad (4.10)$$

#### 4.3.2 Síntese LPV/LFT

Cavalcanti (2) apresenta uma abordagem para tratamento de sistemas não lineares que possuam uma parametrização do tipo LPV/LFT. A partir dessa parametrização, é possível utilizar o ferramental da técnica IQC para essa classe de sistemas. Cabe mencionar

que a técnica IQC não se limita a sistemas LPV/LFT e pode ser aplicada em sistemas mais gerais, com outros formatos de estruturas.

A Figura 26 apresenta o diagrama de blocos da estrutura padrão de síntese LPV:

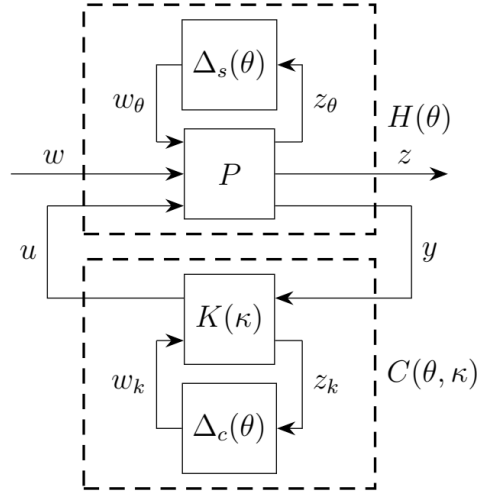


Figura 26 – Interconexão padrão para o problema de síntese LPV, adaptada de (2).

Assume-se que o sistema não linear, a ser controlado, possa ser representado em espaço de estados da seguinte maneira:

$$H(\theta) : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (4.11)$$

em que  $\theta \in \mathbb{R}^r$ , é um vetor de parâmetros variantes no tempo e as demais variáveis possuem suas definições usuais. Nessa equação, para simplificar a notação, é omitida a dependência das variáveis  $t$  (tempo) e  $s$  (variável de laplace). Essa representação é conhecida como representação LPV, devido a sua forma linear, em que as matrizes são dependentes do vetor de parâmetros  $\theta$ . Assume-se que o parâmetro  $\theta$  esteja disponível para medição.

Admite-se que o bloco do controlador  $C(\theta, \kappa)$  possua uma representação em espaço de estados na forma:

$$C(\theta, \kappa) : \begin{cases} \dot{x}_k = A_k(\theta, \kappa)x_k + B_k(\theta, \kappa)y, \\ u = C_k(\theta, \kappa)x_k + D_k(\theta, \kappa)y \end{cases} \quad (4.12)$$

em que  $\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$  é um vetor de parâmetros sintonizáveis do controlador. A ordem do controlador deve ser escolhida previamente pelo projetista.

O objetivo da síntese LPV estruturada é encontrar um controlador  $C(\theta, \kappa) = \mathcal{F}_\ell(K(\kappa), \Delta_c(\theta))$  que estabilize o sistema em malha fechada,  $\mathcal{F}_\ell(H(\theta), C(\theta, \kappa))$ , da Figura 26, e garanta que o ganho  $\mathcal{L}_2$  induzido do canal de desempenho  $w \mapsto z$  em malha fechada

seja menor do que um valor  $\gamma > 0$  especificado, para todas as trajetórias admissíveis do parâmetro  $\theta$ .

Os blocos da estrutura padrão de síntese LPV, da Figura 26, são rearranjados para ficarem na forma mostrada na Figura 27:

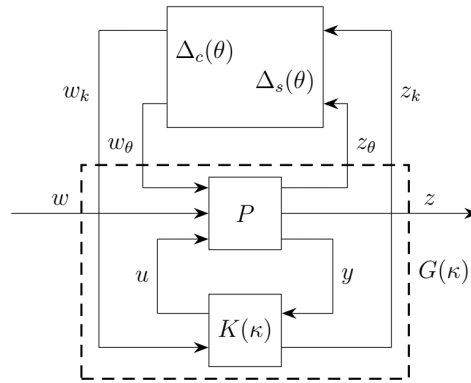


Figura 27 – Síntese LPV transformada em um problema de síntese IQC, adaptada de (2).

em que  $w$  é o vetor de entradas exógenas,  $z$  é o vetor de saídas reguladas,  $y$ , o vetor de saídas medidas,  $u$ , vetor de sinais de controle. Nessa figura,  $\Delta_s$  e  $\Delta_c$ , são operadores incertos que relacionam as variáveis  $z_\theta$  e  $z_k$ , nas entradas dos operadores, às variáveis  $w_\theta$  e  $w_k$ , nas saídas dos operadores, respectivamente.

### 4.3.3 Síntese $\mathcal{H}_\infty$ via Sensibilidade Mista

A estrutura padrão do sistema em malha fechada, para a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  via sensibilidade mista, é representada no diagrama de blocos da Figura 28. Nessa Figura as funções de ponderação frequenciais  $W_e(s)$ ,  $W_u(s)$  e  $W_y(s)$  devem ser formuladas de maneira a atender especificações de desempenho, dadas geralmente no domínio do tempo. Portanto, essas especificações devem ser tratadas indiretamente no domínio da frequência. No trabalho de Cavalcanti (2), podem ser encontrados maiores detalhes e limitações dessa abordagem.

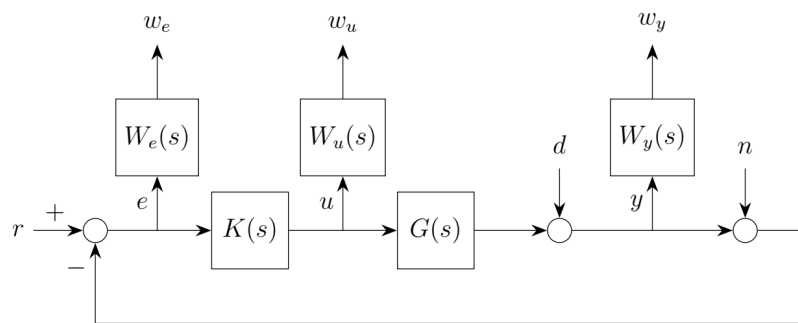


Figura 28 – Interconexão padrão para o problema de sensibilidade mista, adaptada de (2).

Nessa figura,  $K(s)$  e  $G(s)$  são, respectivamente, as funções de transferência do controlador e da planta. O sinal  $r$  é a entrada de referência,  $e$ , o erro de acompanhamento

de referência,  $u$ , o sinal de controle,  $d$ , a perturbação externa,  $y$ , a saída e  $n$ , o ruído de medição.

No trabalho de Cavalcanti (2), a estrutura de síntese  $\mathcal{H}_\infty$  adotada para o sistema de piloto automático do míssil é a apresentada na Figura 29:

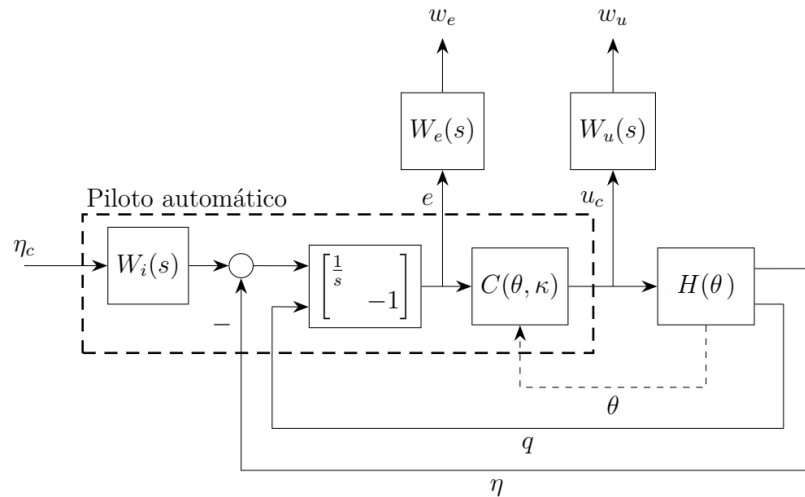


Figura 29 – Interconexão padrão para o problema de sensibilidade mista, adaptada de (2).

O procedimento adotado em (2) para seleção das funções de ponderação é descrito a seguir de maneira simplificada. Para maiores detalhes, sugere-se consultar o trabalho original.

- Especifica-se os critérios de desempenho a serem atendidos.
- Especifica-se a forma das funções de ponderação frequenciais: devem ser funções de transferência com polos estáveis.
- Lineariza-se o sistema em torno de um ponto de operação, geralmente o ponto médio da faixa de operação admissível.
- Obtém-se um controlador  $\tilde{K}(s)$  que estabilize o sistema linearizado em malha fechada e minimize a norma da transferência do canal de desempenho.
- A melhor seleção de funções de ponderação frequenciais é aquela que minimize o critério de desempenho e sejam estáveis.

As funções de ponderação obtidas são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 W_i(s) &= \frac{15.16}{s + 15.16} \\
 W_e(s) &= \frac{0.9783s^2 + 29.4s + 3957}{s^2 + 13.81s + 97.11} \\
 W_u(s) &= \frac{9.176 \times 10^4 s^2 + 8.127 \times 10^7 s - 1.406 \times 10^{13}}{s^2 + 2.913 \times 10^6 s + 4.033 \times 10^{12}}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

### 4.3.4 Controlador $K_{IQC}$

Agora é possível apresentar o controlador projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2), denominado nessa dissertação de  $K_{IQC}$ .

Para facilitar o entendimento, será adotada uma notação, nessa dissertação, ligeiramente diferente da adotada por Cavalcanti (2). Primeiramente, define-se o vetor de variáveis de escalonamento utilizado para a parametrização LPV/LFT da planta, representado pelo bloco  $H(\theta)$  da Figura 29:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ M \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Em (2), o autor adota uma parametrização normalizada e faz duas mudanças de variáveis, substituindo a variável  $\alpha \in [-\pi/6, \pi/6]$  por uma variável normalizada  $\theta \in [-1, 1]$ , e a variável  $M \in [2, 4]$  por uma variável normalizada  $\delta \in [-1, 1]$ , pois isso facilita o procedimento de síntese, porém, para fins didáticos, não será adotada essa parametrização e as variáveis  $\alpha$  e  $M$  são agrupadas em um único vetor  $\theta$ , conforme Equação 4.14. O controlador projetado é de 1<sup>a</sup> ordem e a variável de escalonamento escolhida para o controlador é o elemento  $\theta_1$ , ou seja, o ângulo de ataque ( $\alpha$ ). A representação em espaço de estados do controlador LTI  $K(\kappa)$  é mostrada a seguir:

$$K(\kappa) = \left[ \begin{array}{c|cccc} -1.134 & -0.1912 & -3.889 & -0.4488 \\ \hline 2.086 & 1.3 & -0.5624 & 0.001138 \\ 0.287 & 0.01464 & -0.001721 & -0.4785 \end{array} \right] \quad (4.15)$$

Em conjunto com o bloco de escalonamento, o controlador LPV final  $C(\theta, \kappa)$  é descrito por:

$$K_{IQC} = C(\theta, \kappa) = \mathcal{F}_\ell(K(\kappa), \Delta_c(\theta)) \quad (4.16)$$

$$K_{IQC} = \frac{1}{0.5215 + 1.823\alpha} \times \left[ \begin{array}{c|cccc} -0.4624 - 2.564\alpha & -0.09315 - 0.3746\alpha & -2.029 - 7.105\alpha \\ \hline 1.0877 + 3.814\alpha & 0.678 + 2.376\alpha & -0.2933 - 1.028\alpha \end{array} \right]$$

Na próxima seção são apresentados os resultados das simulações para diferentes modelos, além de apresentar um gráfico comparando o desempenho do controlador MPC projetado nesta dissertação e o controlador  $K_{IQC}$ , projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2).

## 4.4 Simulações e Resultados

Antes de apresentar os resultados das simulações, é necessário fazer algumas considerações importantes. Conforme a modelagem precisa apresentada no Capítulo 3, válida para todo o envelope de voo (faixa de operação), o modelo desenvolvido nesta dissertação difere dos modelos utilizados por outros autores, pois é introduzido o termo  $\sigma(M)$ , o termo  $M_q(\alpha, M, h)$ , e a dependência, em relação a altitude  $h$ , nos termos da matriz dinâmica  $A$ , na representação *quasi*-LPV da Equação 3.66 (pág. 84). Portanto, diferentes simulações foram realizadas na seguinte ordem:

1. Simulação do controlador MPC nominal utilizando o modelo desenvolvido nesta dissertação e considerando  $T = 0$  (Força de propulsão nula, após a queima do combustível).
2. Simulação do controlador MPC nominal com o modelo utilizado por Simões e Cavalcanti (16, 2) e comparação de desempenho entre os controladores MPC e  $K_{IQC}$ .
3. Simulação do controlador MPC nominal para o sistema com incerteza paramétrica politópica, para variações de  $\pm 10\%$  nos termos individuais do coeficiente aerodinâmico de aceleração normal ( $C_Z$ ) da Equação 3.62 (pág. 82).
4. Simulação do controlador  $K_{IQC}$  para as mesmas incertezas do item anterior.

### 4.4.1 Especificações de Hardware e Software

Para fins de registro e facilitar comparações com trabalhos futuros no campo de pesquisa, a especificação técnica do hardware empregado nas simulações é detalhada na Tabela 9, baseando-se em informações obtidas de (42). A Tabela 10 apresenta as especificações de softwares utilizados nas simulações. Cabe mencionar que os tempos de solução obtidos são dependentes do hardware utilizado e de modificações nos parâmetros dos algoritmos de otimização (e.g. número máximo de iterações, tolerância, máximo tempo de execução, etc). Portanto, é possível que hardwares mais potentes e algoritmos mais eficientes, que venham a ser desenvolvidos no futuro, reduzam consideravelmente os tempos de solução do OCP.

Com relação ao código fonte desenvolvido, é importante mencionar que a biblioteca CasADi, utilizada em conjunto com o MATLAB, disponibiliza métodos de geração de código fonte de saída, em linguagem C. Isto permite a portabilidade do código para, por exemplo, um hardware embarcado, já que existem muitos compiladores C disponíveis para diferentes arquiteturas de hardware.

Tabela 9 – Especificações do computador utilizado nas simulações

Componente	Especificação
Processador	Core i5-1235U
Cache L3	12 MB
Frequência Base	1.30 GHz
Frequência Máxima	4.40 GHz
Núcleos	10
Threads	12
TDP Max	15 W
Gráfico Integrado	Intel Iris Xe Graphics
Memória Total	16 GB
Tipo de Memória	LPDDR4x
Velocidade da Memória	4267 MHz

Tabela 10 – Especificações dos softwares utilizados nas simulações

Software	Versão
Microsoft Visual Studio	2022
MinGW-w64 Compiler	6.3
MATLAB	R2023a
MATLAB Support for MinGW-w64 Compiler	R2023a
CasADi	3.6.3
Mosek	10.0

#### 4.4.2 Simulação 1: Controlador MPC Nominal e Modelo Completo

Para esta e as próximas simulações, foi utilizada a mesma entrada de referência. Esta entrada de comando de aceleração corresponde a uma sequência de degraus no intervalo de 0 a 10 s. Esse sinal de referência permite visualizar o comportamento do míssil em toda a faixa de operação. A Figura 30 apresenta o comportamento da aceleração normal, do míssil controlado pelo MPC nominal, projetado nesta dissertação.

Note que nos instantes  $t \approx 7$  s e  $t \approx 9$  s, o controlador não é capaz de atender ao comando de aceleração. Isto se deve ao fato de que nestes instantes o limite físico do atuador é atingido, conforme pode ser visto na Figura 31.

A Figura 32 apresenta o comportamento do ângulo de ataque durante a simulação. Observe que os limites operacionais são levemente violados. Como foi explicado na Seção 4.1.2 (pág. 86), essa restrição não foi incluída na descrição do OCP. É importante novamente salientar que violações do ângulo de ataque crítico podem resultar em perda de sustentação.

A Figura 33 apresenta o comportamento do número de Mach ao longo da trajetória de voo. Observe que o limite  $M_{min} = 2$  foi violado. No entanto, conforme apresentado em Reichert (9), esse limite do número de Mach é apenas desejado, porém, as equações dos coeficientes aerodinâmicos ainda são válidas nessa região.

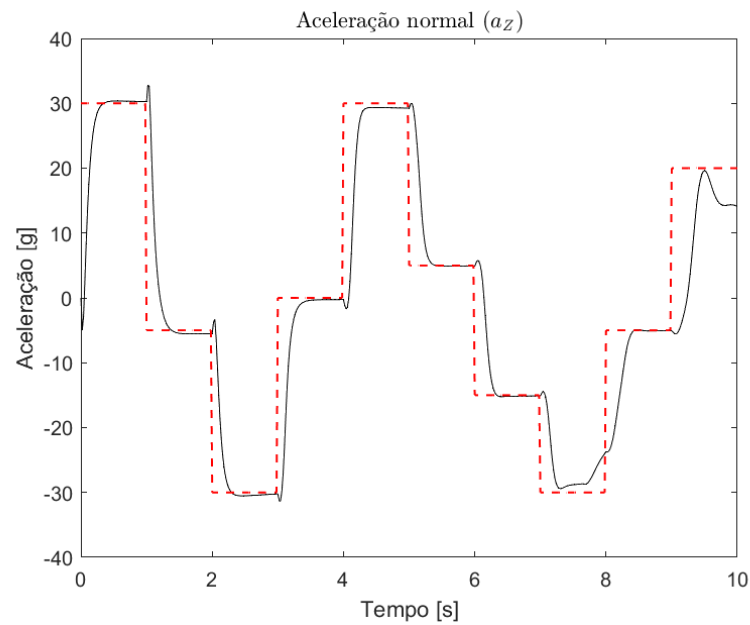


Figura 30 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_z$ ) para o sistema nominal.

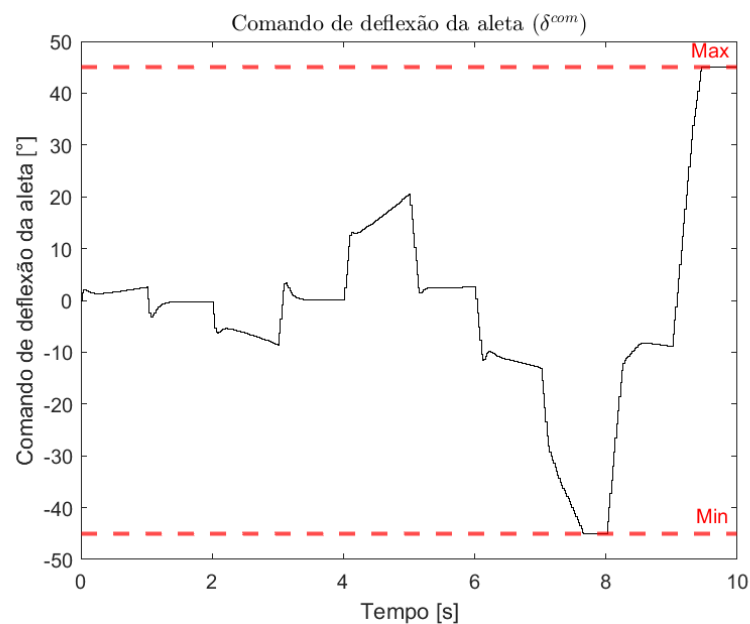
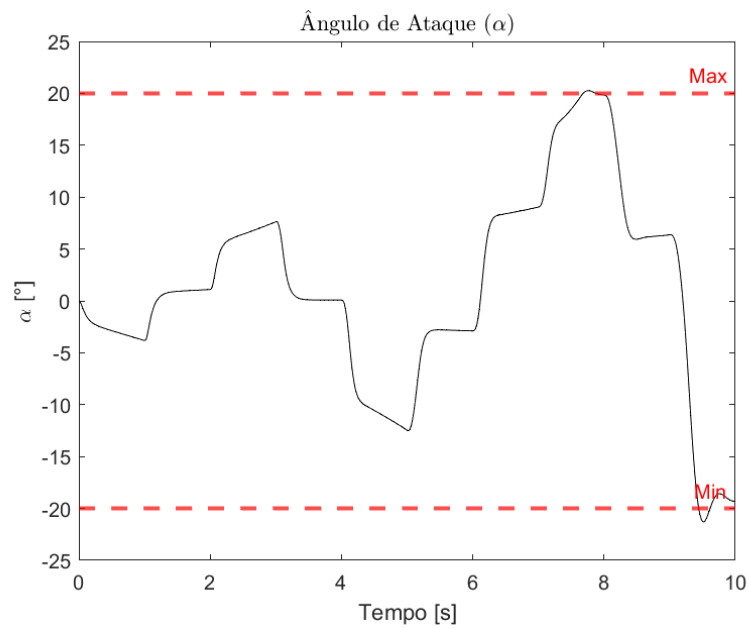
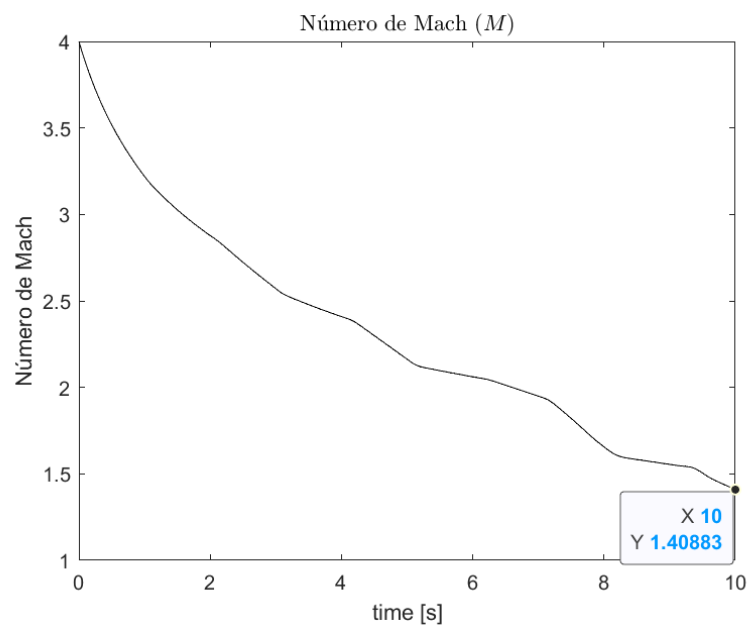


Figura 31 – Sinal de comando de deflexão da aleta de arfagem ( $\delta^{com}$ ) para o sistema nominal.

A Figura 34 apresenta o comportamento da taxa de deflexão da aleta de cauda. Observe nesta figura que as restrições inseridas no OCP são respeitadas. Isso é algo desejado para evitar a excitação de modos de vibração de alta frequência não modelados e manobras agressivas (que provoquem acelerações estruturais acima da desejada quando o piloto automático é sujeito a comandos em degrau, devido à resposta de fase não mínima).

A Figura 35 apresenta o perfil típico de duração do tempo de solução do OCP para cada intervalo de amostragem. O limite óbvio de duração é mostrado no gráfico pela linha



Figura 32 – Ângulo de ataque ( $\alpha$ ) para o sistema nominal.Figura 33 – Número de Mach ( $M$ ) para o sistema nominal.

horizontal tracejada, que corresponde ao tempo de amostragem ( $T_s = 20$  ms), ou seja, o controlador projetado foi capaz de encontrar (com folga) uma solução viável, dentro do limite de tempo, o que é desejado para a aplicação em tempo real.

A Figura 36 apresenta o histograma de distribuição do tempo de processamento por amostra. O importante a ser notado nesta figura é que mesmo no pior caso ( $t_{proc} \approx 11$  ms), o controlador foi capaz de encontrar uma solução viável antes de “estourar” o tempo disponível de 20 ms.

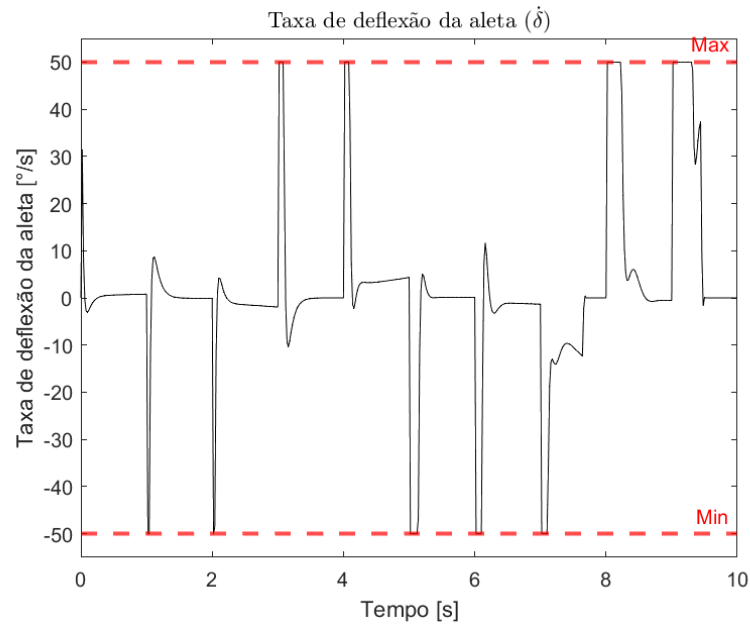


Figura 34 – Taxa de deflexão da aleta de arfagem ( $\dot{\delta}$ ) para o sistema nominal.

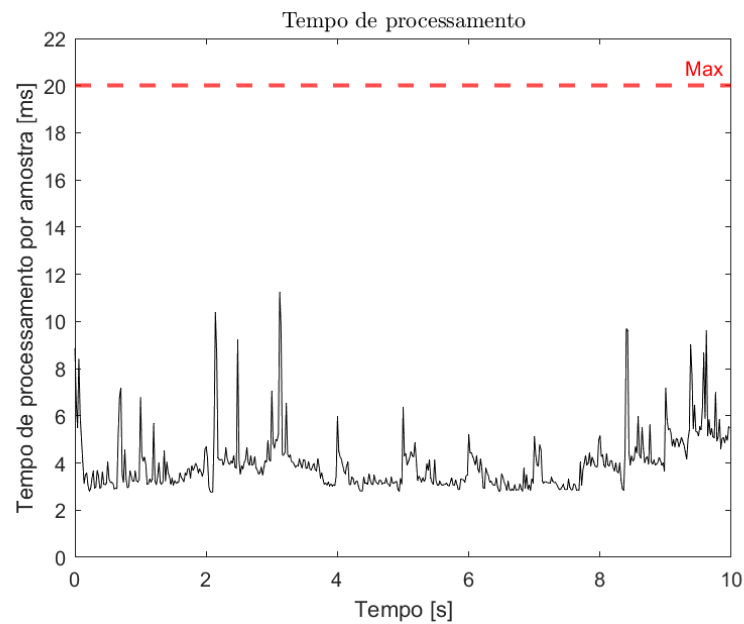


Figura 35 – Tempo de processamento a cada iteração do problema de otimização para uma simulação típica.

#### 4.4.3 Simulação 2: Controladores MPC Nominal e $K_{IQC}$ Utilizando o Modelo Aproximado

Para esta simulação, o modelo não linear desenvolvido deverá ser adaptado ao modelo utilizado Simões e Cavalcanti (16, 2). Para isso, as seguintes adequações devem ser feitas:

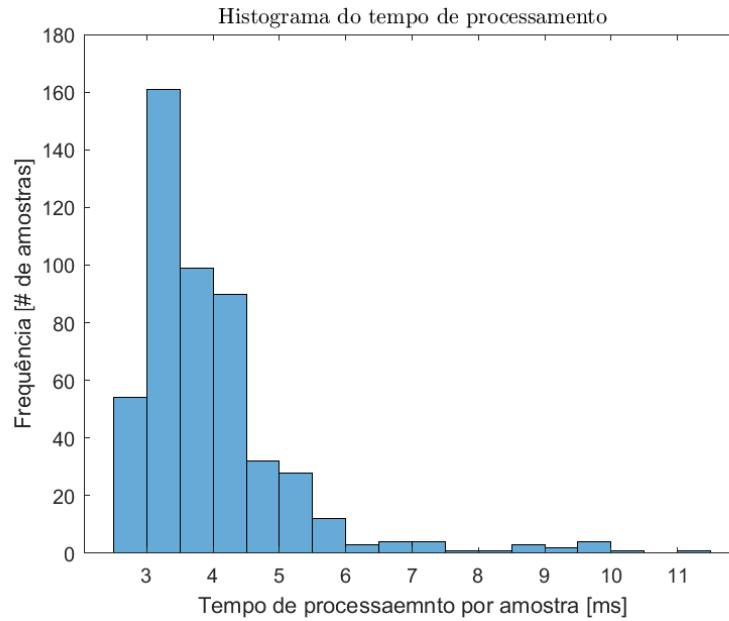


Figura 36 – Histograma do tempo de processamento a cada iteração do problema de otimização para uma simulação típica.

$$\text{Adaptações do modelo} \begin{cases} g = 0 \\ M_q(M, h) = 0 \Rightarrow e_m = 0 \\ \sigma(M) = 1 \\ \dot{h} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

A seguir, são apresentados apenas os gráficos do comportamento do ângulo de deflexão da aleta (entrada) e da aceleração normal  $a_Z$  (saída). A Figura 37 apresenta o gráfico da aceleração normal, para comparação do desempenho do controlador MPC e do controlador  $K_{IQC}$ .

Observa-se na Figura 37 que o desempenho dos 2 controladores é semelhante, com a diferença de que o controlador  $K_{IQC}$  possui uma resposta mais agressiva nas primeiras mudanças do comando de aceleração. Por exemplo, é possível observar nessa figura que no instante  $t = 0,22$  s o sobressinal do controlador  $K_{IQC}$  é de aproximadamente 9,5%. Após o instante  $t \approx 7$  s o controlador que passa a apresentar sobressinal é o controlador MPC. É possível melhorar o desempenho do controlador MPC, ajustando as matrizes de ponderação  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , de modo a evitar esse comportamento indesejado. Outra característica da resposta do controlador  $K_{IQC}$  é o pico de aceleração para mudanças em degrau do comando de aceleração (resposta de fase não-mínima), como o controlador  $K_{IQC}$  não abordou a restrição de taxa máxima de deflexão da aleta, esse comportamento já seria esperado. Na Figura 38, é possível observar o comportamento de  $\dot{\delta}$  para ambos os controladores.

A Figura 39 apresenta o gráfico do ângulo de deflexão da aleta para os dois

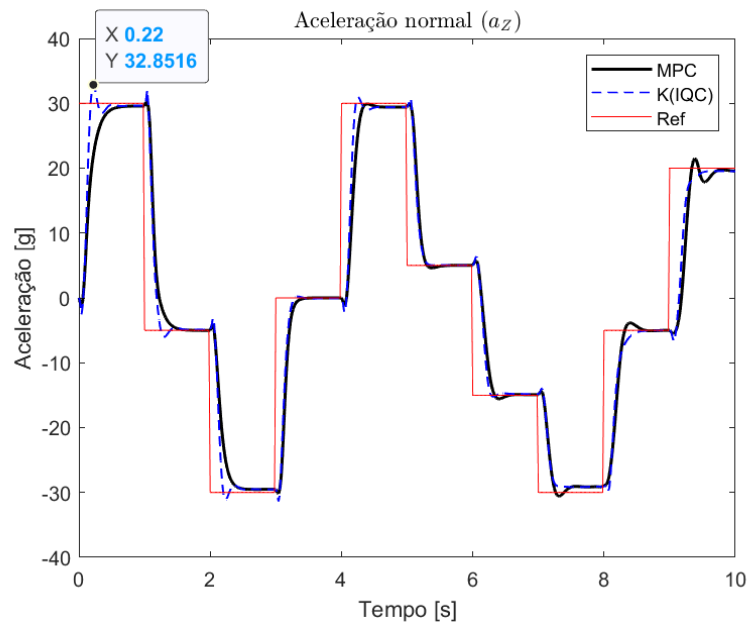


Figura 37 – Aceleração comandada vs aceleração medida, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador  $K_{IQC}$ .

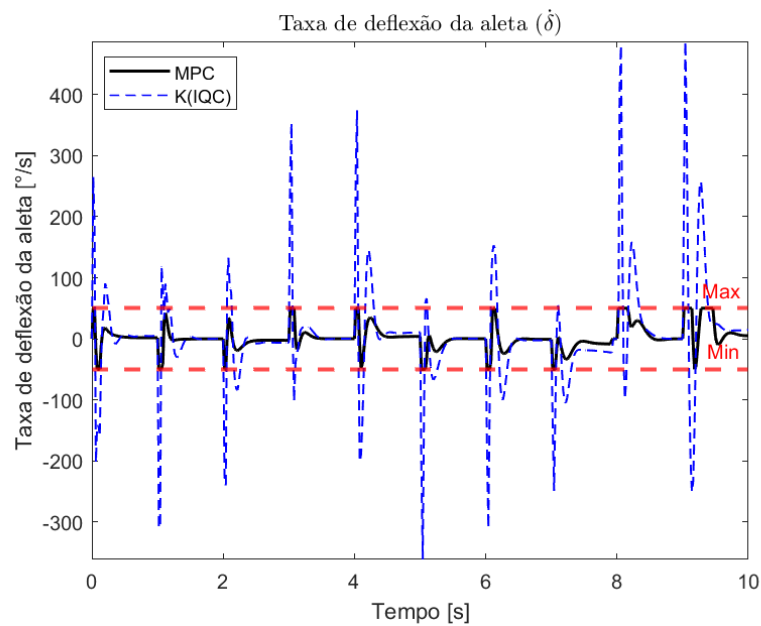


Figura 38 – Taxa de deflexão da aleta, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador  $K_{IQC}$ .

controladores. Novamente, como esperado, o comportamento do atuador é semelhante para os dois projetos. Isso evidencia que ambos os projetos são excelentes para o modelo considerado nesta seção (i.e. o modelo simplificado, com as simplificações descritas pela Equação 4.17, pág. 106). Cabe lembrar que o modelo adotado nessas simulações não corresponde ao comportamento esperado da planta real, já que muitas simplificações não realistas foram feitas. Nesse sentido, o controlador MPC se sobressai em relação ao  $K_{IQC}$ , pois a mudança de modelo pode ser feita de maneira muito mais simplificada no

controlador MPC, sem alterar qualquer parâmetro de projeto, apenas reescrevendo as equações dinâmicas.

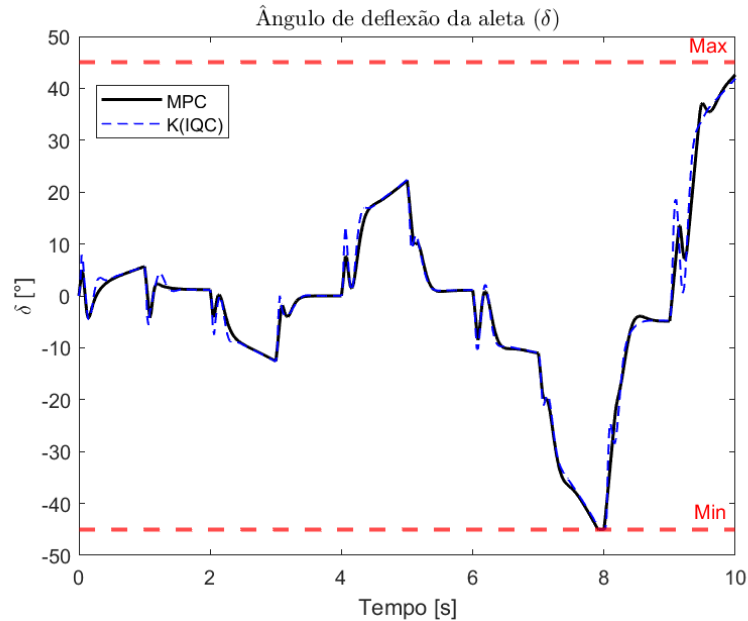


Figura 39 – Ângulo de deflexão da aleta, para o sistema controlado pelo MPC e pelo controlador  $K_{IQC}$ .

#### 4.4.4 Simulação 3: Controlador MPC Nominal e Modelo Aproximado, com Incertezas Paramétricas em $C_Z$

O modelo possui 3 coeficientes aerodinâmicos (2 de força,  $C_X$  e  $C_Z$ , e 1 de momento,  $C_m$ ), conforme Equação 3.62 (pág. 82). Cada coeficiente aerodinâmico possui seus próprios coeficientes internos, os denominados coeficientes de estabilidade e de amortecimento, conforme descrito no Capítulo 3, nas Equações 3.30 (pág. 72) e 3.37 (pág. 74). Define-se o vetor de parâmetros do sistema da seguinte maneira:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_z & b_z & c_z & d_z & a_m & b_m & c_m & d_m & e_m \end{bmatrix}^T \quad (4.18)$$

em que  $q$  corresponde ao número de parâmetros e  $p \in \mathbb{R}^q$ . Foi definido um polítopo de sistemas incertos, cujos vértices são determinados por cada combinação possível de variações dos coeficientes de  $C_Z$ . Ou seja, apenas os coeficientes  $[a_z, b_z, c_z, d_z]$  variam. Assume-se que os coeficientes individuais da equação de  $C_Z$  podem variar em  $\pm 10\%$ . Como  $C_Z$  possui 4 coeficientes, isso implica que há 16 combinações possíveis.

Para avaliar o desempenho do controlador MPC na presença de incertezas na planta, foram feitas 16 simulações do modelo aproximado (ver Equação 4.17, pág. 106),

para cada vértice do polítopo de sistemas incertos. Foi considerado nessas simulações que, apesar do modelo interno do controlador e a dinâmica da planta serem diferentes, o controlador possui acesso à medição de todos os estados reais da planta, portanto, o estado inicial  $x_0$  do problema de otimização é sempre o estado atual (verdadeiro) da planta. A Figura 40 apresenta o gráfico da resposta de aceleração normal (saída) do sistema incerto controlado pelo MPC nominal.

Observa-se, na Figura 40, que o controlador é capaz de estabilizar a planta ainda que apresente erro não nulo de estado estacionário, quando o comando de aceleração é diferente de zero. Para o comando de aceleração  $a_Z^{com} = 0$ , o controlador MPC é estável na origem com erro nulo em regime permanente.

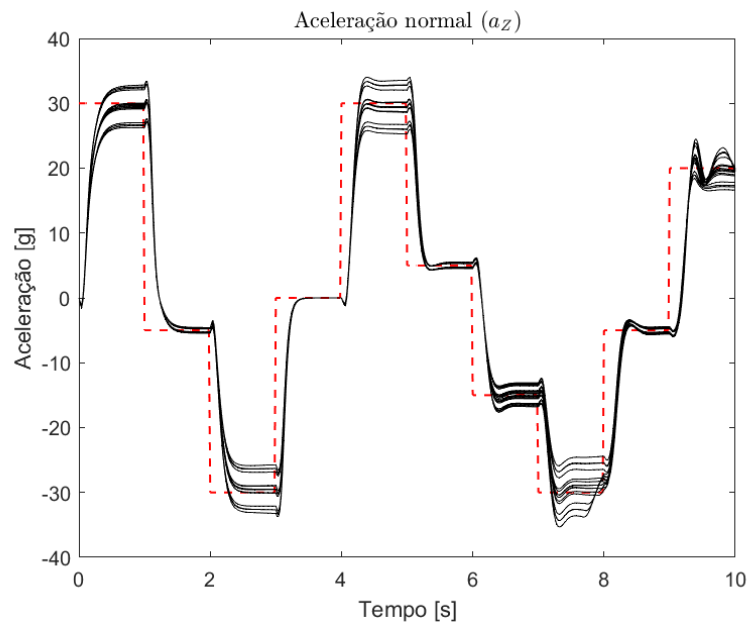


Figura 40 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_Z$ ) para 16 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador MPC nominal.

#### 4.4.5 Simulação 4: Controlador $K_{IQC}$ e Modelo Aproximado, com Incertezas Paramétricas em $C_Z$

Para comparação, também foram realizadas simulações do sistema com modelo aproximado, e controlado por  $K_{IQC}$ , na presença das mesmas incertezas paramétricas descritas na seção anterior. A Figura 41 apresenta o resultado dessas simulações.

Observa-se na Figura 41 que o controlador  $K_{IQC}$  apresentou desempenho superior ao controlador MPC pois foi capaz de controlar a planta para todos os vértices do polítopo de sistemas incertos, sem erro em regime permanente e atendendo as demandas de comando de aceleração sem grandes diferenças em relação ao desempenho nominal. Observa-se que

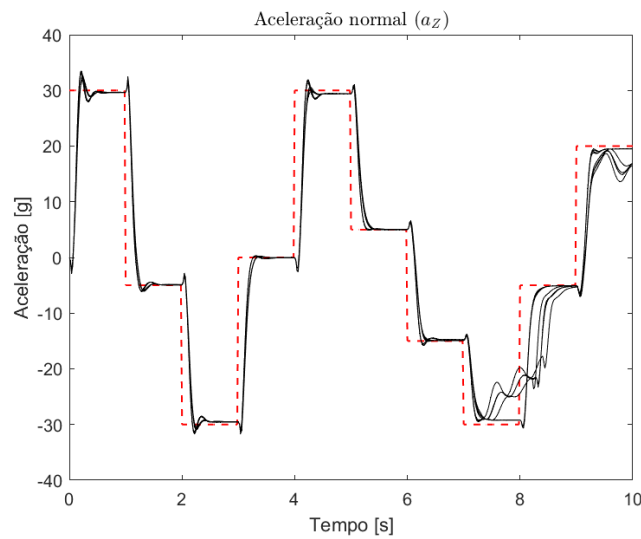


Figura 41 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_z$ ) para 16 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador  $K_{IQC}$ .

a partir do instante  $t \approx 7$  s o comportamento (esperado) de saturação do atuador provoca a instabilidade observada no gráfico.

Para avaliar o desempenho do controlador  $K_{IQC}$  na presença de incertezas de  $\pm 10\%$  em todos os parâmetros de  $p$  (total de 10 parâmetros) foram realizadas mais 1024 simulações (correspondentes a cada uma das combinações possíveis). A Figura 42 apresenta o resultado dessas simulações, e é possível verificar que não possui diferença em relação ao gráfico da figura anterior, em que só foram consideradas incertezas no coeficiente aerodinâmico  $C_Z$ . Esse comportamento era esperado, pois a equação de saída  $y = a_z = \frac{QSC_Z}{mg}$ , depende apenas do coeficiente  $C_Z$ , e, portanto, a saída é afetada apenas por incertezas em  $[a_z, b_z, c_z, d_z]$ .

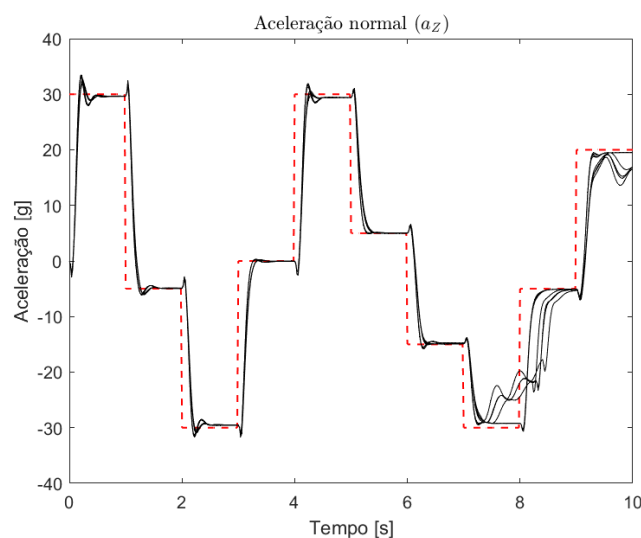


Figura 42 – Aceleração normal comandada (--) vs aceleração normal medida ( $a_z$ ) para 1024 simulações do sistema com incertezas paramétricas e controlador  $K_{IQC}$ .

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este capítulo encerra o presente trabalho com as conclusões finais e faz apontamentos importantes sobre as contribuições para o campo de pesquisa, limitações encontradas e sugestões de trabalhos futuros.

### 5.1 Conclusão

Nesta dissertação de mestrado, é apresentado o histórico de desenvolvimento da teoria de controle MPC e suas aplicações. A teoria de controle MPC é apresentada de forma resumida, e os principais conceitos e teoremas da técnica MPC foram introduzidos de maneira didática e fundamentada, fornecendo um arcabouço teórico para a aplicação da técnica a um problema de controle não linear de difícil solução: o controle de piloto automático de mísseis.

Como o controle MPC Nominal é uma técnica que depende, fundamentalmente, da modelagem dinâmica precisa, do sistema a ser controlado, no Capítulo 3, é desenvolvida toda a modelagem matemática para a dinâmica de mísseis. Neste capítulo, são apresentadas as simplificações realistas que podem ser feitas no modelo para o tipo de míssil adotado, um míssil axissimétrico controlado aerodinamicamente por aletas. A dinâmica longitudinal de 3-DOF foi isolada da dinâmica completa 6-DOF para que se pudesse projetar um controlador MPC no capítulo seguinte.

No Capítulo 4, é desenvolvido um controlador MPC Nominal para o problema de controle do piloto automático de mísseis e foram realizadas diversas simulações. O desempenho do controlador MPC projetado é comparado com o desempenho do controlador projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2).

As seguintes conclusões podem ser estabelecidas a partir dos resultados apresentados, no que tange à técnica de controle MPC:

- O controle MPC Nominal é uma técnica de controle viável para aplicações em sistemas lineares e não lineares.
- Desde que se tenha um modelo matemático preciso do sistema a ser controlado, o controle MPC é mais simples de ser projetado e, em certa medida, mais intuitivo. As especificações de desempenho podem ser facilmente traduzidas em termos de restrições do OCP.
- O modelo dinâmico desenvolvido no Capítulo 3 é um modelo com poucas considerações simplificadoras, e reflete o comportamento do míssil em toda a faixa de operação



na qual os coeficientes aerodinâmicos são modelados, de maneira mais realista.

- O controlador MPC pode utilizar um modelo de predição que seja uma aproximação do modelo não linear original, pois, dado que a janela de predição seja suficientemente pequena, o erro de predição também será pequeno. Como a otimização é feita *on-line*, e o controlador tem acesso ao estado da planta, ocorre que, a cada instante de amostragem, o OCP é atualizado com os dados reais da planta e não ocorre uma acumulação do erro de predição. Caso contrário, haveria uma diferença entre o estado interno do controlador e o estado real da planta, que não seria compensada entre as iterações.

Quanto à comparação de desempenho entre o controlador MPC projetado e o controlador IQC projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2), é possível destacar as seguintes conclusões:

- O projeto do controlador MPC é muito mais simples e pode ser adequado a diferentes modelos, nenhuma otimização *off-line* é realizada, e o projetista apenas precisa definir parâmetros simples como: horizonte de predição, horizonte de controle e matrizes de ponderação, de maneira a atender as especificações de desempenho.
- O desempenho do controlador MPC para o modelo simplificado é, ao menos no caso nominal, superior ao controlador IQC, pois restrições operacionais foram atendidas pelo controle MPC que não foram atendidas no controle IQC. Para ser justo, é importante mencionar que no projeto do controlador IQC, o operador de saturação (para  $\delta$ , a taxa de deflexão de aleta) não foi contemplado.
- O controlador MPC apresentou estabilidade robusta para variações paramétricas, ainda que com erro não nulo em regime permanente.
- O controlador IQC apresentou estabilidade e desempenho robustos para todo o espaço de variações paramétricas dos coeficientes aerodinâmicos. Esse resultado é surpreendente, dada a simplicidade da estrutura do controlador projetado por Simões e Cavalcanti (16, 2), ainda que a síntese desse controlador IQC não tenha sido simples, e utilize uma técnica de otimização não diferenciável baseada em algoritmo genético.

## 5.2 Contribuições da Dissertação

Essa dissertação apresenta as seguintes contribuições para o campo de pesquisa de controle de sistemas não lineares, especialmente no que tange ao controle de mísseis utilizando a técnica MPC:

- No Capítulo 3, é apresentada uma nova fórmula para cálculo da Pressão Dinâmica ( $Q$ ) para fluidos compressíveis, para o ar atmosférico ( $\gamma = 1,4$ ), que serve como uma excelente aproximação da equação exata de  $Q$ , para diferentes valores de altitude ( $h$ ) e Número de Mach ( $M$ ). Essa fórmula, apesar de ser de 6ª ordem, é mais simples e permite a elaboração de uma representação em Espaço de Estados *quasi*-LPV também mais simplificada. A validade dessa equação é demonstrada por meio de gráficos e das simulações. Todas as referências citadas no Capítulo 1, utilizaram como fórmula para cálculo da pressão dinâmica, uma aproximação grosseira, em que se faz a aproximação  $\sigma(M) = 1$  (Equação 3.27, pág. 71). Essa aproximação não corresponde ao valor realista da pressão dinâmica, conforme explicado em detalhes no Capítulo 3, e tem sérias implicações na aplicabilidade das soluções de projetos de controladores que utilizam essa aproximação.
- Adota-se uma abordagem MPC de 2 modelos internos, como explicado nos Capítulos 2 e 3. Essa abordagem consiste em utilizar um modelo aproximado, para predição, e um modelo completo/exato, para atualização dos estados internos do controlador. Como a janela de predição é muito curta (160 ms), um modelo de predição aproximado, com menos estados e *quasi*-linear, pode ser utilizado para estimar os estados da planta no horizonte de predição e assim determinar a melhor ação de controle pro instante atual. Na extensa pesquisa bibliográfica realizada, não foi encontrada nenhuma referência em que esse tipo de abordagem seja formalmente apresentada.
- O controlador MPC projetado no Capítulo 4 é muito simples, o projetista apenas precisa escolher as matrizes de ponderação ( $P, Q, R$ ) da função custo, além do horizonte de predição ( $N$ ) e de controle ( $N_c$ ) de maneira que atenda as especificações de desempenho. Nenhuma otimização *off-line* é realizada e o controlador pode facilmente se adaptar à modificações nos parâmetros e nas equações do modelo, inclusive em tempo real. Além disso, como foi demonstrado por meios das simulações do Capítulo 4, o tempo computacional médio para solucionar o problema de otimização foi de aproximadamente 5 ms, demonstrando assim que o controlador MPC pode ser implementado em tempo real para aplicações de piloto automático de mísseis, já que, para esse tipo de aplicação, o período de amostragem típico é de 10 a 20 ms. O máximo tempo de solução foi de aproximadamente 11 ms, o que demonstra que, mesmo no pior caso, o controlador seria capaz de obter uma solução viável antes de ultrapassar o período de amostragem.

### 5.3 Limitações e Sugestões para Pesquisas Futuras

As seguintes limitações do trabalho desenvolvido podem ser elencadas, e para cada uma dessas limitações é apresentada uma sugestão de trabalho futuro no campo de

pesquisa de controle MPC, especialmente aplicado ao sistema de mísseis:

- O controlador MPC projetado nesse trabalho utiliza apenas informações do modelo nominal para predição dos estados futuros, portanto, nenhuma técnica de controle robusto foi utilizada, nem mesmo para eliminar o erro de estado estacionário. Apesar do controlador MPC projetado apresentar estabilidade robusta, não foram fornecidas as bases teóricas para provar matematicamente esse comportamento. Uma sugestão de trabalho futuro consiste em utilizar técnicas de controle robusto, como, por exemplo, o MPC *Offset-Free*, para tratar esse e outros problemas de robustez.
- Foi utilizado apenas o modelo 3-DOF correspondente à dinâmica longitudinal, e desprezado o acoplamento existente entre essa dinâmica e a dinâmica latero-direcional. Além disso, os valores e equações dos coeficientes aerodinâmicos utilizados neste trabalho são meramente teóricos e não correspondem a uma configuração de míssil real. Há, na literatura de sistemas de mísseis, diversos dados experimentais obtidos em túneis de vento. É possível também, obter os valores dos coeficientes aerodinâmicos, para uma ampla faixa de operação, por meio de softwares de modelagem e simulação. Portanto, uma sugestão de trabalho futuro consiste em empregar dados mais realistas para os coeficientes aerodinâmicos, assim como para as características físicas do míssil, como tensor de inércia, etc. Além disso, sugere-se considerar toda a dinâmica 6-DOF, com os acoplamentos existentes entre as dinâmicas longitudinal e latero-direcional.
- No diagrama de blocos da Figura 16 (pág. 85) é destacado que apenas o sistema de piloto automático foi considerado no projeto do controlador MPC desta dissertação. Há trabalhos, como o de Bachtiar *et al.* (35) e Park *et al.* (36), que abordam o projeto de um controlador integrado para sistema de controle de mísseis. Este tipo de controlador, como o próprio nome diz, integra o sistema de guiamento e de piloto automático em uma única estrutura, e, segundo Park *et al.* (36), é capaz de eliminar o atraso de resposta ao comando de aceleração, que existe entre o sistema de guiamento e o piloto automático. Além disso, essa abordagem permite atenuar comandos bruscos de aceleração na fase terminal, de interceptação do alvo. Esse comportamento inconveniente sempre irá ocorrer, devido à uma singularidade que existe na solução exata do problema de guiamento, no instante da interceptação. Neste instante de interceptação, conforme apresentam Bachtiar *et al.* em (35), a segunda derivada do ângulo de visada ( $\ddot{\lambda}$ ) tende ao infinito, portanto, ao considerar diretamente no problema de otimização, as restrições sobre essa variável, pode-se trazer enormes melhorias de estabilidade e desempenho. Sugere-se, portanto, que trabalhos posteriores integrem, no modelo, as dinâmicas do sistema de guiamento e de rastreamento do alvo.

Uma estrutura de controlador MPC *Offset-Free* com realimentação de saída, proposta para estudos futuros, é apresentada na Figura 43. Essa estrutura é baseada em um modelo de observador de estados, e propõe-se encontrar uma função (ou família de funções)  $\ell_x(\cdot)$  que possua a seguinte propriedade:

- $\ell_x(0) = 0 \implies y = y_{mpc}$  e  $x_{mpc}^+ = x_{mpc} = x_0$ .

ou seja, a função  $\ell_x(\cdot)$  deve ser tal que, mesmo para diferenças entre a planta e o modelo, o sistema controlado atinja um estado de equilíbrio e a saída da planta e do modelo sejam idênticas. Isso, em tese, é capaz de eliminar o erro entre a saída e a planta sem a necessidade de estimação dos estados da planta. No entanto, ainda não é garantido que o valor da saída da planta ( $y$ ) seja igual ao da entrada de referência ( $y_r$ ). Portanto, adicionalmente, propõe-se incluir uma malha externa de controle para levar a saída  $y$  para  $y_r$  (talvez um controlador LTI clássico).

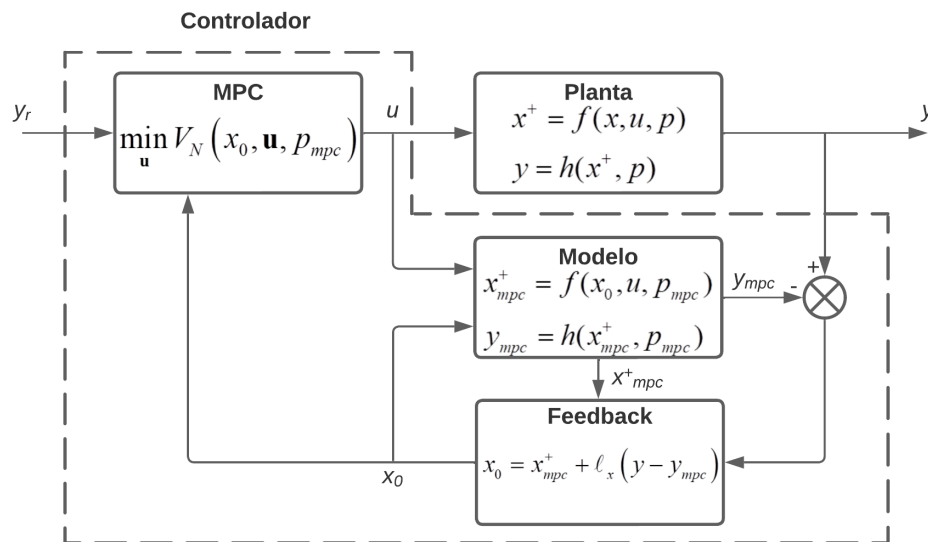


Figura 43 – Diagrama de blocos em malha fechada do controlador MPC *Offset-Free* proposto.

Uma última sugestão de trabalho futuro consiste em se utilizar o MHE para estimação dos estados e parâmetros da planta, a partir de medições passadas da saída do sistema. Uma estrutura de controle sugerida para essa abordagem é apresentada na Figura 44. Nesta Figura, é possível ver que o bloco MHE tem a função de estimar tanto o estado atual, quando os parâmetros. Sabe-se que o problema de estimação geralmente é não convexo e muito complexo, porém, ao menos em teoria, a estrutura da Figura 44 seria capaz de eliminar o erro entre planta e modelo e fazer com que o modelo seja continuamente adaptado à medida que novas medições se tornem disponíveis.

Quanto à teoria de controle MPC, sugere-se os seguintes trabalhos futuros:

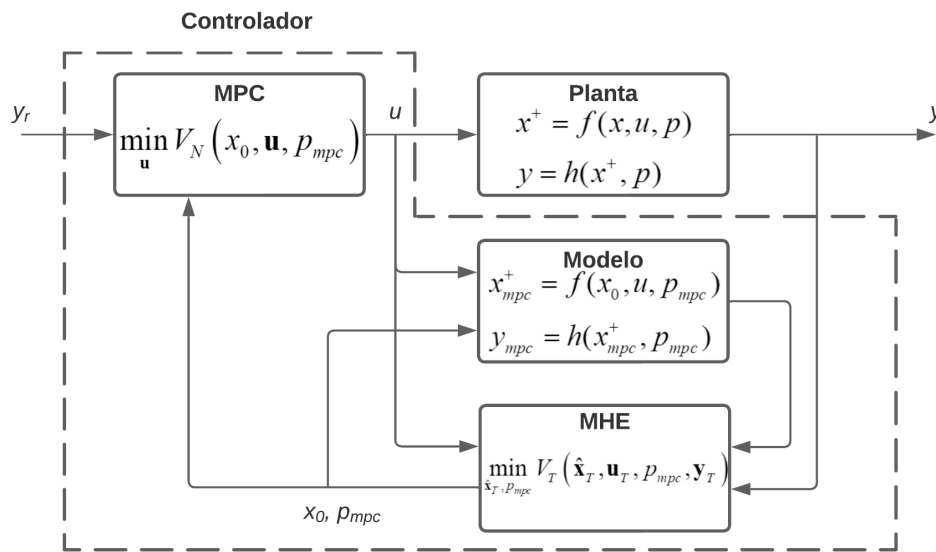


Figura 44 – Diagrama de blocos em malha fechada do controlador MPC + MHE.

- Prover ferramental teórico para provar que a superfície de equilíbrio é equivalente à superfície de estabilidade (ou seja, provar que os pontos de equilíbrio são estáveis).
- Calcular, por meio de técnicas de otimização, os valores das matrizes de ponderação que equilibrem as especificações de desempenho e a convexidade da função custo.
- Determinar a validade da técnica de linearização, em cada instante, para se determinar a solução do OCP não linear, ou seja, demonstrar que a solução do OCP convexo linearizado é igual, ou muito próxima, da solução do OCP não convexo original, conforme apresentado na Seção 4.2.2 (pág. 92).

## REFERÊNCIAS

- 1 SIOURIS, G. *Missile Guidance and Control Systems*. 1. ed. [S.l.]: Springer New York, 2004. 681 p. ISBN 9780387218168.
- 2 CAVALCANTI, V. M. G. de B. *Síntese de controladores estruturados sob restrições quadráticas integrais*. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Defesa) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil, 12 2021.
- 3 MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 789–814, 2000.
- 4 QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control engineering practice*, Elsevier, v. 11, n. 7, p. 733–764, 2003.
- 5 LEE, J. H. Model predictive control: Review of the three decades of development. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 9, p. 415–424, 2011.
- 6 SCHWENZER, M.; AY, M.; BERGS, T.; ABEL, D. Review on model predictive control: An engineering perspective. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 117, n. 5-6, p. 1327–1349, 2021.
- 7 RAWLINGS, J. B.; MAYNE, D. Q.; DIEHL, M. *Model predictive control: theory, computation, and design*. [S.l.]: Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017. v. 2.
- 8 ALLGÖWER, F.; FINDEISEN, R.; NAGY, Z. K. et al. Nonlinear model predictive control: From theory to application. *Journal-Chinese Institute Of Chemical Engineers, CHINESE INST CHEM ENGINEERS*, v. 35, n. 3, p. 299–316, 2004.
- 9 REICHERT, R. T. Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 12, n. 5, p. 35–42, 1992. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/158896>>.
- 10 GESSER, R. d. S. *Robust model predictive control: a comparative study considering implementation issues*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia de Automação e Sistemas)) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.
- 11 CAMPO, P. J.; MORARI, M. Robust model predictive control. In: IEEE. *1987 American control conference*. [S.l.], 1987. p. 1021–1026.
- 12 LANGSON, W.; CHRYSOCHOOS, I.; RAKOVIĆ, S.; MAYNE, D. Q. Robust model predictive control using tubes. *Automatica*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 125–133, 2004.
- 13 KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1361–1379, 1996.
- 14 MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 39, n. 2, p. 262–287, 1993.

- 15 RAWLINGS, J.; MEADOWS, E.; MUSKE, K. Nonlinear model predictive control: A tutorial and survey. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 27, n. 2, p. 185–197, 1994. ISSN 1474-6670. IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, Kyoto, Japan, 25-27 May 1994. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017481511>>.
- 16 SIMÕES, A. M.; CAVALCANTI, V. M. G. B. Missile autopilot design via structured robust linear parameter-varying synthesis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 46, n. 8, p. 1649–1656, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/1.G007580>>.
- 17 NICHOLS, R. A.; REICHERT, R. T.; RUGH, W. J. Gain scheduling for h-infinity controllers: A flight control example. *IEEE Transactions on Control systems technology*, IEEE, v. 1, n. 2, p. 69–79, 1993. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/238400>>.
- 18 REICHERT, R. T.; YOST, D. J. Modern robust control for missile autopilot design. *AGARD, Missile Interceptor Guidance System Technology 15 p(SEE N 91-13434 05-05)*, IEEE, 1990. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://www.sto.nato.int/publications/AGARD/AGARD-LS-173/AGARD-LS-173.pdf>>.
- 19 MRACEK, C.; CLOUTIER, J. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent riccati equation method. In: \_\_\_\_\_. *Guidance, Navigation, and Control Conference*. AIAA, 1997. p. 3767. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.1997-3767>>.
- 20 MRACEK, C. P.; CLOUTIER, J. R. Missile longitudinal autopilot design using the state-dependent riccati equation method. In: *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*. [s.n.], 1997. p. 387–396. 22 jun. de 2023. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Curtis-Mracek/publication/271374403\\_Missile\\_longitudinal\\_autopilot\\_design\\_using\\_the\\_state-dependent\\_Riccati\\_equation\\_method/links/57351b4008ae9f741b283635/Missile-longitudinal-autopilot-design-using-the-state-dependent-Riccati-equation-method.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Curtis-Mracek/publication/271374403_Missile_longitudinal_autopilot_design_using_the_state-dependent_Riccati_equation_method/links/57351b4008ae9f741b283635/Missile-longitudinal-autopilot-design-using-the-state-dependent-Riccati-equation-method.pdf)>.
- 21 WU, F.; PACKARD, A.; BALAS, G. Lpv control design for pitch-axis missile autopilots. In: IEEE. *Proceedings of 1995 34th IEEE conference on decision and control*. 1995. v. 1, p. 188–193. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/478672>>.
- 22 SHAMMA, J. S.; CLOUTIER, J. R. Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, v. 16, n. 2, p. 256–263, 1993. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.20997>>.
- 23 PELLANDA, P. C.; APKARIAN, P.; TUAN, H. D. Missile autopilot design via a multi-channel lft/lpv control method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, Wiley Online Library, v. 12, n. 1, p. 1–20, 2002. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/rnc.612>>.
- 24 SIMÕES, A. M.; APKARIAN, P.; PELLANDA, P. C. Controle do modelo nao-linear de um míssil ar-ar: Comparacao entre técnicas lpv. 2004. 22 jun. de 2023. Disponível em: <[http://pierre.apkarian.free.fr/papers/cba2004\\_missil.pdf](http://pierre.apkarian.free.fr/papers/cba2004_missil.pdf)>.

- 25 PELLANDA, P. C.; SIMOES, A. M.; APKARIAN, P.; ALAZARD, D. Synthesis of missile gain-scheduled autopilots using an  $h_\infty$ -lpv technique with piecewise continuously differentiable parameter-dependent lyapunov functions. *Journal of Nonlinear Studies*, v. 11, n. 2, p. 243–276, 01 2004.
- 26 KIM, S.-H.; SONG, C. A robust adaptive nonlinear control approach to missile autopilot design. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 31, n. 21, p. 49–52, 1998.
- 27 KIM, S.-H.; KIM, Y.-S.; SONG, C. A robust adaptive nonlinear control approach to missile autopilot design. *Control engineering practice*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 149–154, 2004.
- 28 BACHTIAR, V.; MÜHLPFORDT, T.; MOASE, W.; FAULWASSER, T.; FINDEISEN, R.; MANZIE, C. Nonlinear model predictive missile control with a stabilising terminal constraint. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 457–462, 2014.
- 29 LU, P. Nonlinear predictive controllers for continuous systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 17, n. 3, p. 553–560, 1994. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.21233>>.
- 30 MEHRA, R.; GOPINATHAN, M.; SISTU, P. Robust nonlinear model predictive control for agile interceptor missile. In: *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 4121.
- 31 CHEN, W.-H.; BALLANCE, D. J.; GAWTHROP, P. J. Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach. *Automatica*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 633–641, 2003. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109802002728>>.
- 32 HU, X.-B.; CHEN, W.-H. Model predictive control for non-linear missiles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 221, n. 8, p. 1077–1089, 2007.
- 33 BOCK, H. G.; PLITT, K.-J. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 1603–1608, 1984.
- 34 BIEGLER, L. T. Solution of dynamic optimization problems by successive quadratic programming and orthogonal collocation. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 8, n. 3-4, p. 243–247, 1984.
- 35 BACHTIAR, V.; MANZIE, C.; KERRIGAN, E. C. Nonlinear model-predictive integrated missile control and its multiobjective tuning. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 40, n. 11, p. 2961–2970, 2017.
- 36 PARK, J.; KIM, Y.; KIM, J.-H. Integrated guidance and control using model predictive control with flight path angle prediction against pull-up maneuvering target. *Sensors*, MDPI, v. 20, n. 11, p. 3143, 2020.
- 37 MAYNE, D. Q. Nonlinear model predictive control: Challenges and opportunities. *Nonlinear model predictive control*, Springer, p. 23–44, 2000.



- 
- 38 BORRELLI, F.; BEMPORAD, A.; MORARI, M. *Predictive control for linear and hybrid systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- 39 KÖHLER, J.; MÜLLER, M. A.; ALLGÖWER, F. A nonlinear tracking model predictive control scheme for dynamic target signals. *Automatica*, Elsevier, v. 118, p. 109030, 2020.
- 40 ANDERSSON, J. A. E.; GILLIS, J.; HORN, G.; RAWLINGS, J. B.; DIEHL, M. CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, Springer, v. 11, n. 1, p. 1–36, 2019. 22 jun. de 2023. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s12532-018-0139-4>>.
- 41 BERBERICH, J.; KÖHLER, J.; MÜLLER, M. A.; ALLGÖWER, F. Linear tracking mpc for nonlinear systems—part i: The model-based case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 67, n. 9, p. 4390–4405, 2022.
- 42 CORPORATION, I. *Intel® Core™ i5-1235U Processor - Product Specification*. 2024. 09 jan. de 2024. Disponível em: <<https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/226261/intel-core-i5-1235u-processor-12m-cache-up-to-4-40-ghz.html>>.

APÊNDICE A – TABELAS COMPARATIVAS DOS ARTIGOS  
SOBRE CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO TÉCNICAS DE  
CONTROLE CLÁSSICO

Tabela 11 – Resumo dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos

Ref.	Autores, Ano	Método de Linearização	Método de Projeto	Dinâmica	Faixa de Operação		Especificações de Desempenho (resposta ao degrau)		
					Ângulo de Ataque	Número de Mach	Erro de Estado Estacionário	Constante de Tempo	Máximo Sobressinal
(18)	Reichert e Yost, 1990	Linearização jacobiana em torno de pontos de equilíbrio	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	$< 0,5 \%$	$< 0,2 \text{ s}$	–
(9)	Reichert, 1992	Linearização jacobiana em torno de pontos de equilíbrio	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	$< 5\%$	$< 0,35 \text{ s}$	–
(22)	Shamma e Cloutier, 1993	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	$< 0,5 \%$	$< 0,2 \text{ s}$	–
(17)	Nichols <i>et al.</i> , 1993	Linearização estendida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$1,5 \leq M \leq 3$	$< 1 \%$	$< 0,35 \text{ s}$	$< 10 \%$
(21)	Wu e Balas, 1995	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	$< 1 \%$	$< 0,35 \text{ s}$	$< 10 \%$
(19)	Mracek e Cloutier, 1997	Parametrização SDC	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese SDRE <math>\mathcal{H}_2</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2,5 \leq M \leq 4,5$	–	–	–
(20)	Mracek e Cloutier, 1997	Parametrização SDC	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese SDRE <math>\mathcal{H}_2</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 2,5$	–	–	–
(26)	Kim e Song, 1998	Não Linear	<ul style="list-style-type: none"> <li>Backstepping adaptativo</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	–	–	–
(23)	Pellanda <i>et al.</i> , 2002	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV <math>\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	$< 1 \%$	$< 0,35 \text{ s}$	$< 10 \%$
(24)	Simões <i>et al.</i> , 2004	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV <math>\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	$< 1 \%$	$< 0,35 \text{ s}$	$< 10 \%$
(25)	Pellanda <i>et al.</i> , 2004	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV/Gradeamento <math>\mathcal{L}_2</math></li> <li>Funções de Lyapunov parametrizadas por LMIs</li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	$< 1 \%$	$< 0,35 \text{ s}$	$< 10 \%$
(27)	Kim <i>et al.</i> , 2004	Não Linear	<ul style="list-style-type: none"> <li>Backstepping adaptativo</li> </ul>	Longitudinal	$-10^\circ \leq \alpha \leq +10^\circ$	$1,8 \leq M \leq 2,6$	–	–	–

Tabela 12 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 1

Ref.	Autores, Ano	Método de Linearização	Método de Projeto	Dinâmica	Faixa de Operação		Especificações Adicionais de Desempenho
					Ângulo de Ataque	Número de Mach	
(18)	Reichert e Yost, 1990	Linearização jacobiana em torno de pontos de equilíbrio	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desempenho robusto para variações no ângulo de ataque</li> <li>Evitar saturação da taxa de deflexão do atuador</li> <li>Evitar instabilidades de alta frequência causadas por modos flexíveis não modelados</li> </ul>
(9)	Reichert, 1992	Linearização jacobiana em torno de pontos de equilíbrio	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desempenho robusto para variações no ângulo de ataque e número de Mach</li> <li>Limitar a largura de banda do controlador para evitar instabilidades em alta frequência (modos flexíveis não modelados e não linearidades do atuador)</li> <li>O ganho de malha na entrada do atuador deve ser menor que <math>-30</math> dB a <math>300</math> rad/s</li> </ul>
(22)	Shamma e Cloutier, 1993	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty/\mu</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Limitar a largura de banda do controlador para evitar instabilidades em alta frequência (modos flexíveis não modelados e não linearidades do atuador e dos sensores)</li> </ul>
(17)	Nichols <i>et al.</i> , 1993	Linearização estendida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$1,5 \leq M \leq 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabilidade robusta em toda a faixa de operação (para variações de <math>\pm 25\%</math> nos coeficientes de <math>\alpha</math> e <math>\delta</math> na equação polinomial do coeficiente aerodinâmico de momento <math>C_m</math>)</li> <li>Atenuação de <math>30</math> dB em <math>300</math> rad/s para a função de transferência em malha aberta no ponto de entrada do atuador</li> <li>Máxima taxa de variação do ângulo de deflexão do atuador de <math>25</math> °/s para um comando em degrau de <math>1g</math></li> </ul>
(21)	Wu e Balas, 1995	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese <math>\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabilidade robusta em toda a faixa de operação (para variações de <math>\pm 25\%</math> nos coeficientes de <math>\alpha</math> e <math>\delta</math> na equação polinomial do coeficiente aerodinâmico de momento <math>C_m</math> e de <math>\pm 10\%</math> nos coeficientes de <math>\alpha</math> e <math>\delta</math> na equação polinomial do coeficiente aerodinâmico de força normal <math>C_n</math>)</li> <li>Máxima taxa de variação do ângulo de deflexão do atuador de <math>25</math> °/s para um comando em degrau de <math>1g</math></li> </ul>

Tabela 13 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 2

Ref.	Autores, Ano	Método de Linearização	Método de Projeto	Dinâmica	Faixa de Operação		Especificações Adicionais de Desempenho
					Ângulo de Ataque	Número de Mach	
(19)	Mracek e Cloutier, 1997	Parametrização SDC	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese SDRE <math>\mathcal{H}_2</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2,5 \leq M \leq 4,5$	–
(20)	Mracek e Cloutier, 1997	Parametrização SDC	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análise/Síntese SDRE <math>\mathcal{H}_2</math></li> <li>Controlador LTI</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$2 \leq M \leq 2,5$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desempenho robusto para variações paramétricas (de <math>\pm 25\%</math> nos coeficientes de <math>\alpha</math>, <math>M</math> e <math>q</math> nas equações polinomiais dos coeficientes aerodinâmicos <math>C_m</math> e <math>C_N</math>) OBS.: Nenhum limite de deflexão do atuador ou de taxa máxima de variação do atuador foi imposta ao projeto do controlador, no modelo ou na simulação</li> </ul>
(26)	Kim e Song, 1998	Não Linear	<ul style="list-style-type: none"> <li>Backstepping adaptativo</li> </ul>	Longitudinal	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desempenho robusto para 5 perturbações aleatórias constantes (conforme definição adotada pelo autor). Essas perturbações não possuem interpretação física mas englobam diversas incertezas: incertezas paramétricas, não linearidades, e outras.</li> </ul>
(23)	Pellanda <i>et al.</i> , 2002	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV <math>\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabilidade robusta para toda a faixa de operação</li> <li>Atenuação de malha aberta em alta frequência suficiente para atenuação de ruídos na entrada do atuador e dinâmicas de alta frequência não modeladas</li> <li>Máxima taxa de variação do ângulo de deflexão do atuador de <math>25^\circ/\text{s}</math> para um comando em degrau de <math>1g</math></li> </ul>
(24)	Simões <i>et al.</i> , 2004	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV <math>\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty</math></li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabilidade robusta para toda a faixa de operação</li> <li>Atenuação de malha aberta em alta frequência suficiente para atenuação de ruídos na entrada do atuador e dinâmicas de alta frequência não modeladas</li> <li>Máxima taxa de variação do ângulo de deflexão do atuador de <math>25^\circ/\text{s}</math> para um comando em degrau de <math>1g</math></li> <li>Limites na taxa de variação dos parâmetros de escalonamento (<math>-180^\circ/\text{s} \leq \dot{\alpha} \leq 180^\circ/\text{s}</math> e <math>-1 \leq M \leq 0</math>)</li> </ul>

Tabela 14 – Especificações de desempenho adicionais dos artigos sobre controle de mísseis utilizando os métodos clássicos - Parte 3

Ref.	Autores, Ano	Método de Linearização	Método de Projeto	Dinâmica	Faixa de Operação		Especificações Adicionais de Desempenho
					Ângulo de Ataque	Número de Mach	
(25)	Pellanda <i>et al.</i> , 2004	Parametrização quasi-LPV	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estrutura LFT</li> <li>Análise/Síntese LPV/Gradeamento <math>\mathcal{L}_2</math></li> <li>Funções de Lyapunov parametrizadas por LMIs</li> <li>Controlador escalonado</li> </ul>	Longitudinal	$-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$	$2 \leq M \leq 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabilidade robusta para toda a faixa de operação</li> <li>Atenuação de malha aberta em alta frequência suficiente para atenuação de ruídos na entrada do atuador e dinâmicas de alta frequência não modeladas</li> <li>Máxima taxa de variação do ângulo de deflexão do atuador de <math>25^\circ/\text{s}</math> para um comando em degrau de <math>1g</math></li> <li>Limites na taxa de variação dos parâmetros de escalonamento (<math>-180^\circ/\text{s} \leq \dot{\alpha} \leq 180^\circ/\text{s}</math> e <math>-1 \leq \dot{M} \leq 0</math>)</li> </ul>
(27)	Kim <i>et al.</i> , 2004	Não Linear	<ul style="list-style-type: none"> <li>Backstepping adaptativo</li> </ul>	Longitudinal	$-10^\circ \leq \alpha \leq +10^\circ$	$1,8 \leq M \leq 2,6$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Desempenho robusto para 5 perturbações aleatórias constantes (conforme definição adotada pelo autor). Essas perturbações não possuem interpretação física mas englobam diversas incertezas: incertezas paramétricas, não linearidades, e outras</li> </ul>

APÊNDICE B – TABELAS COMPARATIVAS DOS ARTIGOS  
SOBRE CONTROLE DE MÍSSEIS UTILIZANDO MPC

Tabela 15 – Resumo dos artigos sobre controle de mísseis utilizando MPC

Ref.	Autores, Ano	Dinâmica	Domínio do Tempo	Estados	Entrada ( $u$ )	Sinal de Referência ( $y_r$ )	Saída ( $y$ )	Faixa de Operação	
								Ângulos de Ataque/Derrapagem	Número de Mach
(29)	Lu, 1994	Longitudinal	Contínuo	$[\alpha \ q \ \delta]^T$	$[\delta^{com}]$	$\begin{bmatrix} \alpha^{com} \\ q^{com} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}$	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$
(30)	Mehra <i>et al.</i> , 1998	Completa	Discreto	$[\alpha \ \beta \ p \ q \ r \ \delta_a \ \delta_e \ \delta_r \ \dot{\delta}_a \ \dot{\delta}_e \ \dot{\delta}_r]^T$	$\begin{bmatrix} \delta_a^{com} \\ \delta_e^{com} \\ \delta_r^{com} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_Y^{com} \\ a_Z^{com} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_Y \\ a_Z \end{bmatrix}$	$-15^\circ \leq \alpha \leq +15^\circ$ $-5^\circ \leq \beta \leq +5^\circ$	$M = 5$
(31)	Chen <i>et al.</i> , 2003	Longitudinal	Contínuo	$[\alpha \ q \ \delta]^T$	$[\delta^{com}]$	$[\alpha^{com}]$	$[\alpha]$	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 3$
(32)	Hu e Chen, 2007	Latero-direcional	Discreto	$[\beta \ p \ r \ \phi]^T$	$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$	$[\phi^{com}]$	$[\phi]$	$-5^\circ \leq \beta \leq +5^\circ$	$M = 2$
(28)	Bachtiar <i>et al.</i> , 2014	Longitudinal	Discreto	$[\alpha \ q \ \delta \ \dot{\delta} \ \delta^{com}]^T$	$[\dot{\delta}^{com}]$	$[a_Z^{com}]$	$[a_Z]$	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 2,5$
(35)	Bachtiar <i>et al.</i> , 2017	Longitudinal	Discreto	$[\alpha \ q \ \theta \ \delta \ \dot{\delta} \ \delta^{com} \ s \ v \ \dot{\lambda}]^T$	$[\dot{\delta}^{com}]$	$[\dot{\lambda}^{com}] = [0]$	$[\dot{\lambda}]$	$-20^\circ \leq \alpha \leq +20^\circ$	$M = 2,5$
(36)	Park <i>et al.</i> , 2020	Longitudinal	Discreto	$[\alpha \ q \ \delta \ \gamma \ z]^T$	$[\delta^{com}]$	$[z^{com}] = [0]$	$[z]$	$-8^\circ \leq \alpha \leq +8^\circ$	$M = 1,1$



Tabela 16 – Especificações do OCP e do MPC para os artigos sobre controle de mísseis utilizando MPC

Ref.	Autores, Ano	Especificações do OCP		Especificações do MPC					
		Função Custo	Restrições	Forma da Solução	Modelo de Predição	Passo ( $h$ ) (Tempo contínuo) ou Período de Amostragem ( $T_s$ ) (Tempo discreto)	Horizonte de Predição ( $N$ )	Horizonte de Controle ( $N_c$ )	Tempo Médio de Solução do OCP
(29)	Lu, 1994	$\ y(t+h) - y_r(t+h)\ _Q^2 + \ u(t)\ _R^2$	–	<i>Off-line</i>	Não linear	$h = 50$ ms	1	1	–
(30)	Mehra <i>et al.</i> , 1998	$\sum_{k=1}^N \ y_k - y_{r,k}\ _Q^2 + \sum_{k=0}^{N_c-1} \ u_k\ _R^2$	$ \delta_{a,e,r}  \leq 50^\circ$ $ \dot{\delta}_{a,e,r}  \leq 300^\circ/s$ $ a_{\gamma,z}  \leq 50g$	<i>On-line</i>	Não linear	$T_s = 100$ ms	30	20	–
(31)	Chen <i>et al.</i> , 2003	$\int_{t=0}^h \ y(t+\tau) - y_r(t+\tau)\ ^2 d\tau$	$ \delta  \leq 30^\circ$	<i>Off-line</i>	Não linear	$h = 238$ ms	1	1	–
(32)	Hu e Chen, 2007	$\sum_{k=0}^{N-1} (\ x_k\ _Q^2 + \ u_k\ _R^2) + \ x_N\ _P^2$	$ \beta  \leq 5^\circ$ $ \phi  \leq 180^\circ$ $ \delta_{a,r}  \leq 45^\circ$	<i>On-line</i>	Linear	$T_s = 12,5$ ms	4	4	604 ms
(28)	Bachtiar <i>et al.</i> , 2014	$\sum_{k=0}^{N-1} (\ x_k - x_r\ _Q^2 + \ u_k - u_r\ _R^2) + \ x_N - x_r\ _P^2$	$ \alpha  \leq 20^\circ$ $ \delta  \leq 45^\circ$ $ q  \leq 1000^\circ/s$ $ \dot{\delta}  \leq 500^\circ/s$	<i>On-line</i>	Não linear	$T_s = 20$ ms	25	25	17,5 ms
(35)	Bachtiar <i>et al.</i> , 2017	$\sum_{k=0}^{N-1} (\ x_k\ _Q^2 + \ u_k\ _R^2) + \ x_N\ _P^2$	$ \alpha  \leq 20^\circ$ $ \delta  \leq 40^\circ$ $ q  \leq 500^\circ/s$ $ \dot{\delta}  \leq 500^\circ/s$ $ \theta  \leq 90^\circ$ $ \delta^{com}  \leq 40^\circ$	<i>On-line</i>	Não linear	$T_s = 25$ ms	12	12	200 ms
(36)	Park <i>et al.</i> , 2020	$\sum_{k=0}^{N-1} (\ x_k\ _Q^2 + \ u_k\ _R^2) + \ x_N\ _P^2$	$ a_z  \leq 12g$ $ \epsilon  \leq 20^\circ$	<i>On-line</i>	Não linear	$T_s = 50$ ms	60	60	20,6 ms