



INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia Associada à Universidade de São Paulo

**Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons
de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações
Industriais**

ELBIS SANTOS CARDOSO

**Dissertação apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do Grau de
Mestre em Ciências na Área
de Tecnologia Nuclear - Materiais**

**Orientador:
Prof. Dr. Ricardo Elgul Samad**

**São Paulo
2023**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia Associada à Universidade de São Paulo

**Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons
de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações
Industriais**

Versão Corrigida

Versão Original disponível no IPEN

ELBIS SANTOS CARDOSO

**Dissertação apresentada como parte
dos requisitos para obtenção do Grau de
Mestre em Ciências na Área
de Tecnologia Nuclear - Materiais**

**Orientador:
Prof. Dr. Ricardo Elgul Samad**

**São Paulo
2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Como citar:

CARDOSO, E. S. ***Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações Industriais***. 2023. 177 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear), Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN-CNEN, São Paulo. Disponível em: <<http://repositorio.ipen.br/>> (data de consulta no formato: dd/mm/aaaa)

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de geração automática da Biblioteca IPEN, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cardoso, Elbis Santos

Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações Industriais / Elbis Santos Cardoso; orientador Ricardo Elgul Samad. -- São Paulo, 2023. 177 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Tecnologia Nuclear (Materiais) -- Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2023.

1. Matriz densidade. 2. Susceptibilidade elétrica. 3. Equações de taxa. 4. Itérbio. 5. Laser. I. Samad, Ricardo Elgul, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Autor: Elbis Santos Cardoso

Título: Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações Industriais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Tecnologia Nuclear – Materiais

São Paulo, 22 de novembro de 2023:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Elgul Samad : _____

Instituição: IPEN/USP

Julgamento: _____

Prof. Dr. Josemir Coelho Santos : _____

Instituição: USP

Julgamento: _____

Prof. Dr. Edison Puig Maldonado : _____

Instituição: ITA

Julgamento: _____

AGRADECIMENTOS

Ao meu D'us, Senhor e Pai Celestial, que é o princípio da minha existência e a razão do meu viver. A Fonte Viva de todas as minhas inspirações. Dele, por Ele, e para Ele a minha mais profunda, inigualável e límpida gratidão.

Aos meus amados pais Carlito Cardoso e Luciene Cardoso, formadores do meu caráter e amigos leais.

Às minhas irmãs Sueli e Suzilene e ao meu irmão Elvanger pela mais nobre, ilustre e significância que representam para mim.

Ao estimado Prof. Dr. Cláudio Costa Motta por sua dedicação incansável, orientação criteriosa e sabedoria compartilhada ao longo desta minha jornada de mestrado. Suas contribuições foram fundamentais para o meu crescimento intelectual e desenvolvimento como pesquisador. Serei eternamente grato pela sua generosidade em partilhar seus conhecimentos e inspirar-me a buscar a excelência na minha área de estudo e profissional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Elgul Samad pela sua valiosa e indispensável orientação, ao seu alto grau de conhecimento científico compartilhado ao longo dessa trajetória acadêmica e nas elaborações de trabalhos apresentados em conferências internacionais.

Aos amigos de curso Lucas Salustiano, Davi Nacaratti e Bernardo Melo pela camaradagem e perseverança aos desafios que surgiram na caminhada do mestrado, pela troca de ideias, pelos debates inspiradores e ao companheirismo nessa trajetória desafiadora.

*"A glória de D'us é ocultar certos conhecimentos; tentar desvendá-los é a glória dos majestosos."
(Provérbios 25:2)*

RESUMO

CARDOSO, Elbis S. ***Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações Industriais***. 2023. 177 p. Dissertação em Tecnologia Nuclear - Materiais - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares- IPEN-CNEN/SP, São Paulo.

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo teórico baseado na formulação da matriz densidade para a susceptibilidade elétrica complexa do problema a dois fótons (absorção e emissão laser). Além disso, desenvolveu-se, a partir da equação geral dos campos eletromagnéticos dos sinais de bombeamento e laser, que interagem com o sistema quântico de três níveis formado por um *ensemble* de átomos de íons de itérbio (Yb^{+3}), um modelo simplificado que possibilita acoplar as equações de taxa com a dinâmica térmica, que considera a remoção de calor da fibra óptica. Os modelos desenvolvidos foram aplicados ao estudo de lasers de fibra óptica de alta potência dopada com itérbio de revestimento duplo (*YDCFL*), operando em regime contínuo (*CW*) com potências de quilowatts, no comprimento de onda de $\lambda_s = 1018$ nm. Os resultados obtidos são relevantes para a construção de lasers de fibras de alta potência bombeados por diodos lasers em 976 nm. Para a descrição do fenômeno da emissão laser, adotou-se uma abordagem semiclassical, na qual o sistema quântico foi descrito pela equação de Schrödinger da mecânica quântica, enquanto o sistema clássico foi tratado pelas equações de Maxwell.

Palavras-chaves: Matriz densidade, susceptibilidade elétrica, equações de taxa, fibra óptica, itérbio, laser.

ABSTRACT

CARDOSO, Elbis S. *Investigação Teórica de um Laser de Fibra Óptica de Sílica Dopada com Íons de Itérbio de Alta Potência Bombeado por Diodos Laser para Aplicações Industriais*. 2023. 177 p. Dissertação em Tecnologia Nuclear - Materiais - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares- IPEN-CNEN/SP, São Paulo.

In this work, a theoretical model based on the density matrix formulation for the complex electric susceptibility of the two-photon problem (laser absorption and emission) was developed. Additionally, starting from the general equation of electromagnetic fields, as well as the pumping and laser signals, interacting with the three-level quantum system formed by an ensemble of ytterbium atoms (Yb^{+3}), a simplified model was developed. This model allows coupling the rate equations with the thermal dynamics, considering the heat removal from the optical fiber. The developed models were applied to the study of high-power ytterbium-doped double-clad optical fiber lasers (*YDCFL*) operating in continuous wave (*CW*) mode at kilowatts power levels, at a wavelength of $\lambda_s = 1018$ nm. The obtained results are relevant for the construction of high-power fiber lasers pumped by 976 nm diode lasers. A semiclassical approach was adopted for describing the laser emission phenomenon. In this perspective, the quantum system was described by the Schrödinger equation of quantum mechanics, while the classical system was treated by Maxwell's equations.

Key words: Density matrix, electric susceptibility, rate equations, optical fiber, ytterbium, laser.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria para a fibra óptica de duplo revestimento utilizada neste trabalho. Onde a é o raio do núcleo, b é o raio do revestimento interno e c é o raio do revestimento externo.	29
Figura 2 – Diagrama de níveis de energia para o sistema atômico utilizado.	30
Figura 3 – Diagrama de absorção e de emissão do laser de três níveis, $E_3 > E_2 > E_1$, onde ω_p e ω_s denotam as frequências dos campos de bombeamento e do sinal, respectivamente.	37
Figura 4 – (a) Perfil da relação de dispersão para os modos LP_{01} e LP_{02} (b) Perfil da relação de dispersão para o modo LP_{11}	69
Figura 5 – Perfil da relação de dispersão para o modo LP_{21}	69
Figura 6 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{01} (b) Curva de nível do modo LP_{01}	70
Figura 7 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{02} (b) Curva de nível do modo LP_{02}	70
Figura 8 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{11} (b) Curva de nível do modo LP_{11}	71
Figura 9 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{03} (b) Curva de nível do modo LP_{03}	71
Figura 10 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{04} (b) Curva de nível do modo LP_{04}	72
Figura 11 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{12} (b) Curva de nível do modo LP_{12}	72
Figura 12 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{13} (b) Curva de nível do modo LP_{13}	73
Figura 13 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{21} (b) Curva de nível do modo LP_{21}	73
Figura 14 – Fração da potência modal	74
Figura 15 – Seções de choque de absorção e de emissão do Yb^{+3} em sílica.	80
Figura 16 – Esquema de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada em um sistema de dois níveis.	82
Figura 17 – Variação infinitesimal $d\Phi$ no fluxo de fótons Φ para uma onda eletromagnética percorrendo uma distância dz através do material.	86

Figura 18 – Esquema genérico de um laser.	87
Figura 19 – Esquema de um laser de fibra com FBGs como espelhos.	87
Figura 20 – Sistema físico do oscilador laser	90
Figura 21 – Diagrama de nível de energia do Yb^{+3} em sílica.	91
Figura 22 – Fluxograma do formalismo empregado para encontrar a susceptibilidade elétrica.	112
Figura 23 – Campos eletromagnéticos dependentes da susceptibilidade atômica nas suas formas geral e simplificada.	112
Figura 24 – Oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	115
Figura 25 – Oscilador laser configuração de bombeamento bidirecional	115
Figura 26 – Oscilador laser de fibra dupla dopada com Yb dividida em várias seções Δz	117
Figura 27 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{32}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento em ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = 0$	119
Figura 28 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{32}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico, $\Delta_p\tau = -5$	120
Figura 29 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 5, 0$	121
Figura 30 – Comportamento de $\frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = -5$, para a intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 5$	121
Figura 31 – Comportamento de $\frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = -5$, para a intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2$	122
Figura 32 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 2, 0$	122
Figura 33 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 1, 0$	123

- Figura 34 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 1, 5$ 123
- Figura 35 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$ e $\beta_{23}\tau = 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância ($\Delta_p\tau = -10$ e $\Delta_p\tau = -5$) e em sintonia ($\Delta_p\tau = 0$) com o sistema atômico. 124
- Figura 36 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$ e $\beta_{23}\tau = 5$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância ($\Delta_p\tau = -10$ e $\Delta_p\tau = -5$) e em sintonia ($\Delta_p\tau = 0$) com o sistema atômico. 125
- Figura 37 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_p)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 0$, para uma intensidade do campo elétrico do bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$ 126
- Figura 38 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 5, 0$, para uma intensidade do campo elétrico do bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$ 126
- Figura 39 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia com o sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = 0$, para uma fraca intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau \ll 1$ 127
- Figura 40 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{23}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = 1, 0$ 127
- Figura 41 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{23}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = -1, 0$ 128
- Figura 42 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 5$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ 128
- Figura 43 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 0, 5$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ 129

Figura 44 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 1$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$	130
Figura 45 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$, para a intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau = 1$	130
Figura 46 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$, para a intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau = 5$	131
Figura 47 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_p)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 0$, para uma intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$	131
Figura 48 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_p)}{ \mu_{23} ^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 5$, para uma intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$	132
Figura 49 – Comprimento ótimo do oscilador laser em função da potência de bombeamento	132
Figura 50 – Potências no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	133
Figura 51 – Potências no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	134
Figura 52 – Sinal ASE no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	134
Figura 53 – Sinal ASE no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	135
Figura 54 – Perturbação causada por espalhamento espectral do sinal laser na configuração de bombeamento unidirecional	135
Figura 55 – Perturbação causada por espalhamento espectral do sinal laser na configuração de bombeamento bidirecional	136
Figura 56 – Influência da perturbação de primeira ordem na configuração de bombeamento unidirecional	136
Figura 57 – Influência da perturbação de primeira ordem na configuração de bombeamento bidirecional	137
Figura 58 – Intensidade do oscilador na configuração de bombeamento bidirecional .	138
Figura 59 – Intensidade do oscilador na configuração de bombeamento unidirecional	138
Figura 60 – Eficiência do oscilador na configuração de bombeamento unidirecional .	139
Figura 61 – Eficiência do oscilador na configuração de bombeamento bidirecional . .	139

Figura 62 – Inversão de população normalizada no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	140
Figura 63 – Inversão de população normalizada no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	140
Figura 64 – Função auxiliar na configuração de bombeamento unidirecional	141
Figura 65 – Função auxiliar na configuração de bombeamento bidirecional	141
Figura 66 – Influência do defeito quântico nos parâmetros térmicos do laser	142
Figura 67 – Fonte de calor no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	142
Figura 68 – Fonte de calor no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	143
Figura 69 – Temperatura no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	144
Figura 70 – Temperatura no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	144
Figura 71 – Variação da temperatura com o defeito quântico	145
Figura 72 – Dependência do defeito quântico com o comprimento de onda do sinal laser de saída	146
Figura 73 – Variação do índice de refração em função da temperatura interna do oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional	146
Figura 74 – Perfil da variação do índice de refração em função da temperatura interna do oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 3 – Parâmetros da fibra óptica e térmicos usados para simulação	113
Tabela 4 – Valores das temperaturas no oscilador laser	145
Tabela 5 – Análise comparativa dos parâmetros dos osciladores	148

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AlGaAs	Arseneto de gálio e alumínio (" <i>Aluminium gallium arsenide</i> ")
ASE	Emissão espontânea amplificada (" <i>Amplified spontaneous emission</i> ")
BPP	Parâmetro produto do feixe (" <i>Beam parameter product</i> ")
BS	Divisor de feixe (" <i>Beam splitter</i> ")
CMS	Decapador de modo do revestimento (" <i>Cladding mode stripper</i> ")
CNC	Controle numérico computadorizado (" <i>Computer numeric control</i> ")
CW	Ondas contínuas (" <i>Continuous wave</i> ")
DCF	Fibra com revestimento duplo (" <i>Double-clad fiber</i> ")
EDFA	Amplificador de fibra dopada com érbio (" <i>Erbium-doped Fiber amplifiers</i> ")
EDO	Equação diferencial ordinária
FBG	Rede de Bragg em fibras ópticas (" <i>Fiber Bragg grating</i> ")
HRFBG	Rede de Bragg altamente refletora (" <i>High-reflectivity fiber Bragg grating</i> ")
InGaAs	Arseneto de índio e gálio (" <i>Indium gallium arsenide</i> ")
JDSU	(" <i>JDS Uniphase Corporation</i> ")
LaMP	Laboratório de Micro-ondas de Potência e Fotônica
LP	Linearmente polarizado (" <i>Linearly polarized</i> ")
LSO/PoliUSP	Laboratório de Sensores Ópticos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
OCFBG	Acoplador de saída em FBG (" <i>Output coupler FBG</i> ")
OSA	Analisador de espectro óptico (" <i>Optical spectrum analyzer</i> ")
SBS	Espalhamento Brillouin estimulado (" <i>Stimulated Brillouin scattering</i> ")
SRS	Espalhamento Raman estimulado (" <i>Stimulated Raman scattering</i> ")
YDFL	Laser de fibra dopada com Itérbio (" <i>Yb-doped fiber laser</i> ")
YDCFL	Laser de fibra de revestimento duplo dopada com Itérbio (" <i>Yb-doped double-cladding fiber laser</i> ")

LISTA DE SÍMBOLOS

E_i	Energia do nível i
H	Operador Hamiltoniano
ρ	Matriz densidade
ρ_{ij}	Elemento ij da matriz densidade
Yb^{+3}	Íons de itérbio
λ_p	Comprimento de onda do sinal de bombeamento
λ_s	Comprimento de onda do sinal laser
$2a$	Diâmetro do núcleo da fibra óptica de revestimento duplo
a	Raio do núcleo da fibra óptica
n_1	Índice de refração do núcleo da fibra óptica
n_2	Índice de refração do revestimento interno da fibra óptica
n_3	Índice de refração do revestimento externo da fibra óptica
$2b$	Diâmetro do revestimento interno da fibra óptica
Δ	Índice de refração relativo
NA	Abertura Numérica
θ_a	Ângulo de aceitação
n_0	Índice de refração do ar
θ_i	Ângulo de incidência
V	<i>Número-V</i> da fibra óptica
k	Número de onda
λ	Comprimento de onda no vácuo
β	Constante de propagação axial
n_{eff}	Índice de refração efetivo
\vec{E}	Vetor campo elétrico
\vec{H}	Vetor campo magnético
$\vec{E}(r, \theta)$	Vetor campo elétrico em função das coordenadas transversais
$\vec{H}(r, \theta)$	Vetor campo magnético em função das coordenadas transversais
z	Coordenada axial
r	Coordenada radial
θ	Coordenada azimutal
n	Índice de refração do meio

μ_0	Permeabilidade magnética do espaço livre
ε_0	Permissividade elétrica do espaço livre
E_r	Componente radial do campo elétrico
E_θ	Componente azimutal do campo elétrico
E_z	Componente axial do campo elétrico
H_r	Componente radial do campo magnético
H_θ	Componente azimutal do campo magnético
H_z	Componente axial do campo magnético
$n(r, \theta)$	Índice de refração dependente de coordenadas cilíndricas
E_\perp	Componente tangencial do campo elétrico
H_\perp	Componente tangencial do campo magnético
J_ν	Função de Bessel ordinária de primeiro tipo, de ordem ν
K_ν	Função de Bessel modificada do segunda tipo, de ordem ν
ΔE	Varição de energia
N_1	Densidade de população iônica do estado fundamental (nível 1)
N_2	Densidade de população iônica do estado excitado (nível 2)
$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	Constante de Planck
ν_{21}	Frequência da transição atômica $2 \rightarrow 1$
$\rho(\nu)$	Densidade de radiação
B_{12} e B_{21}	Coeficientes B de Einstein
A_{21}	Taxa de emissão espontânea
$\sigma_e(\nu)$	Seção de choque de emissão
$\sigma_a(\nu)$	Seção de choque de absorção
k_B	Constante de Boltzmann
T	Temperatura absoluta em kelvin
ν	Frequência da luz no vácuo
R_{12}	Taxa de absorção do bombeamento
R_{21}	Taxa de emissão do bombeamento
W_{12}	Taxa de absorção do sinal laser
W_{21}	Taxa de emissão do sinal laser
I_p	Intensidade do bombeamento
I_s	Intensidade do sinal laser
QD	Defeito quântico
Φ	Fluxo de fótons

M^2	Qualidade do feixe
w_B	Cintura do feixe
Ω	Ângulo sólido
$d\Phi$	Varição infinitesimal do fluxo de fótons
$\sigma_{12}^p = \sigma_p^a$	Seção de choque de absorção do bombeamento
$\sigma_{21}^p = \sigma_p^e$	Seção de choque de emissão do bombeamento
$\sigma_{12}^s = \sigma_s^a$	Seção de choque de absorção do sinal laser
$\sigma_{21}^s = \sigma_s^e$	Seção de choque de emissão do sinal laser
t	Tempo
A	Área do núcleo da fibra óptica
Γ_p	Fator de preenchimento do bombeamento
Γ_s	Fator de preenchimento do laser
$P_p^+(z)$	Potência de bombeamento direto
$P_p^-(z)$	Potência de bombeamento reverso
$P_s^+(z)$	Potência do sinal laser direto
$P_s^-(z)$	Potência do sinal laser reverso
τ_{21}	Tempo de vida radiativo do estado excitado
A_{eff}	Área efetiva do núcleo da fibra óptica dopada
$N_t(r, \phi, z)$	Concentração total de dopante dependente da posição
$N_t(0)$	Concentração total de dopante no centro do núcleo da fibra óptica
dA	Varição infinitesimal da área do núcleo da fibra óptica
dr	Varição infinitesimal do raio do núcleo da fibra óptica
$d\phi$	Varição infinitesimal do ângulo azimutal
\bar{N}_i	valor médio da densidade de população iônica do nível i
$\bar{N}_i(r, \phi, z)$	Valor médio da densidade de população iônica do nível i dependente da posição
w_B	Raio modal fundamental de um feixe gaussiano
ρ_{eff}	Raio efetivo da fibra óptica dopada
L	Comprimento do oscilador laser
R_1	Refletividade da rede de Bragg 1
R_2	Refletividade da rede de Bragg 2
α_s	Perda por espalhamento do sinal laser
P_s^{sat}	Potência de saturação do sinal laser
$\alpha(z)$	Coefficiente de atenuação do sinal de bombeamento
α_p	Coefficiente de absorção do sinal de bombeamento

$P_s^+(L)$	Sinal laser de avanço na posição $z = L$ do oscilador
$P_s^-(L)$	Sinal laser reverso na posição $z = L$ do oscilador
$\bar{N}_2(z)$	Valor médio da densidade de população iônica $N_2(z)$
$G(z)$	Ganho total do oscilador laser
$\delta(z)$	Perturbação de primeira ordem
$P_{ASE}(\lambda_s)$	Sinal da emissão espontânea amplificada
L_{Opt}	Comprimento ótimo do oscilador laser
∇^2	Operador de Laplace
Q_0	Fluxo de calor máximo no núcleo da fibra óptica
$Q(r, \varphi, z, t)$	Fluxo de calor dependente da posição e do tempo
T_0	Temperatura no centro do núcleo da fibra ativa
T_c	Temperatura do refrigerante da fibra ativa
$Q(z)$	Fluxo de calor na fibra ativa na direção axial da fibra ativa
ΔP_{abs}	Potência absorvida do bombeamento
η	Eficiência quântica
$\Delta n(r, z)$	variação do índice de refração da fibra ativa
$\Delta T(r, z)$	variação da temperatura da fibra ativa
$\frac{dn}{dt}$	Coefficiente óptico da sílica
P_{th}	Potência limiar de Raman
L_{eff}	Comprimento efetivo do oscilador laser
P_c	Potência crítica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	Introdução ao Capítulo	24
1.2	Contribuições do Trabalho	26
1.2.1	Objetivos	27
1.2.2	Revisão bibliográfica	27
1.3	Formulação do Problema da Amplificação de Luz Utilizando Bombeamento Óptico	29
1.4	Esboço da Solução do Problema da Amplificação da Luz Utilizando o Bombeamento Óptico	30
1.5	Organização do Trabalho	34
2	MODELO PARA A SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA DO MEIO ATIVO DO OSCILADOR LASER	36
2.1	Introdução ao Capítulo	36
2.2	Modelo para a susceptibilidade elétrica para os íons de itérbio sob a interação de dois campos	36
2.2.1	Elementos da matriz densidade	38
2.3	Inclusão do Termos Referentes aos Processos Colisionais e de Emissão Espontânea	39
2.4	Relação entre a Polarização Induzida e a Susceptibilidade	44
2.5	Análise Numérica com o Modelo Apresentado da Susceptibilidade Elétrica	46
2.6	Conclusão do Capítulo	47
3	PROPAGAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM UMA FIBRA ÓPTICA	48
3.1	Introdução ao Capítulo	48
3.2	Desenvolvimento da Solução	48
3.3	Os Modos TE, TM, Híbridos e os Modos LP	60
3.3.1	Soluções para guiamento fraco: modos LP	63
3.4	Fluxo e Densidade de Potência	67
3.5	Carta dos Modos Linearmente Polarizados	69

3.6	Conclusão do Capítulo	75
4	DESCRIÇÃO QUANTITATIVA DO OSCILADOR LASER ATRAVÉS DO MODELO DA SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA COMPLEXA	76
4.1	Introdução ao Capítulo	76
4.2	Ganho e Índice de Refração para o Sistema de Três níveis de Energia	76
4.2.1	Desenvolvimento da solução para o campo elétrico	77
4.3	O Íon de Itérbio	80
4.4	Os Processos de Absorção Atômica, Emissão Espontânea e Estimulada Segundo o Tratamento de Einstein	81
4.4.1	Absorção	82
4.4.2	Emissão espontânea	82
4.4.3	Emissão estimulada	83
4.4.4	Seção de choque	83
4.5	Defeito quântico no fenômeno laser	85
4.6	O Princípio do Laser	85
4.7	Desempenho do Laser	88
4.8	Descrição do Oscilador Laser Utilizando as Equações de Taxa	90
4.8.1	Densidade de população iônica do oscilador laser	90
4.8.2	Área efetiva e fator de preenchimento do oscilador laser	93
4.8.3	Balço energético no oscilador laser	94
4.8.4	Valor médio da densidade da população iônica do oscilador laser	97
4.8.5	Análise da teoria da perturbação de primeira ordem no oscilador laser	102
4.8.6	Emissão espontânea amplificada no oscilador laser	103
4.9	Determinação do Comprimento Ótimo do Oscilador Laser	103
4.10	Modelamento do Mecanismo de Transferência de Calor do Oscilador Laser	104
4.11	Efeitos Não-Lineares no Oscilador Laser	108
4.12	Conclusão do Capítulo	110
5	MÉTODOS	111
5.1	Formalismo Aplicado na Modelagem do Sistema Laser	111
5.2	Parâmetros laser	113
5.3	Oscilador Laser nas Configurações Unidirecional e Bidirecional	114
5.3.1	Oscilador laser em regime de bombeamento unidirecional	114

5.3.2	Oscilador laser em regime de bombeamento bidirecional	115
5.4	Implementação Computacional	116
5.5	Conclusão do Capítulo	117
6	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	118
6.1	Introdução ao Capítulo	118
6.2	Comportamento da Susceptibilidade Elétrica	118
6.3	Comprimento Ótimo do Oscilador Laser	132
6.4	Perfis das Potências no Oscilador Laser	133
6.5	Intensidade dos Osciladores Laser	137
6.6	Eficiência dos Osciladores Laser	138
6.7	Perfil da Densidade de População Iônica Normalizada no Oscilador Laser	139
6.8	Geração de Calor no Oscilador Laser	141
6.9	Perfis da Variações das Temperaturas no Oscilador Laser	143
6.10	Perfil do Índice de Refração no Oscilador Laser	146
6.11	Análise comparativa entre os osciladores laser	148
6.12	Conclusão do Capítulo	148
7	CONCLUSÃO	149
7.1	Trabalhos Futuros	150
	REFERÊNCIAS	151
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA OS ELEMENTOS DA MATRIZ DENSIDADE	156
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO GERAL DO COEFICIENTE R COMO FUN- ÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA ATÔMICO	160
	APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO DETERMINANTE PARA ENCONTRAR A RELAÇÃO DE DISPERSÃO DOS MODOS ELETRO- MAGNÉTICOS SUSTENTADOS PELO GUIA DE ON- DAS ÓPTICO	169
	APÊNDICE D – FUNÇÕES AUXILIARES DO VALOR MÉDIO DA DENSI- DADE DE POPULAÇÃO IÔNICA	172

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução ao Capítulo

Lasers de fibras óptica, em particular aqueles dopados com os íons Yb^{+3} , têm se mostrado capazes de elevar os níveis de potência, em operação contínua, em uma escala jamais vista. Este fato decorre de vários fatores conjugados, a saber:

- Lasers a diodo de alta potência emitindo na região espectral do infravermelho próximo, tipicamente, em 976 nm;
- Íons Yb^{+3} em matrizes vítreas que apresentam um pequeno desvio de Stokes e, como consequência, baixa perda de energia no ciclo óptico e, portanto, contribuindo para a redução da carga térmica;
- Bombeamento distribuído por casamento de propagação de fibras em aproximação íntima, permitindo que haja a distinção do modo de confinamento do núcleo central da fibra e os modos do feixe de bombeamento, distribuindo axialmente o bombeamento óptico;
- A alta tecnologia desenvolvida para os componentes de integração óptica, construídos em fibras ópticas, permitindo flexibilizar combinadores, acopladores, divisores, espelhos, e demais elementos de seleção de frequência e de conformação espacial do feixe por meio de técnicas simples e disponíveis; e
- Adicionalmente, estes sistemas apresentam bandas largas, tanto de absorção como de emissão, flexibilizando o bombeamento e permitindo que estes lasers atuem em vários comprimentos de onda e até com geração de pulsos ultracurtos, limitados pela sua largura de banda de emissão.

Lasers de fibra óptica de sílica dopada com itérbio (YDFL), monomodo, bombeados com lasers de diodo têm atraído considerável atenção na última década, em vista das aplicações na indústria e na área médica, devido às suas características excepcionais, tais como, elevado brilho, elevada eficiência, compacticidade e qualidade do feixe quando comparadas com os tradicionais lasers a gás e de estado sólido (JEONG et al., 2004), (XIAO et al., 2004), (ZHANG; LIU; LI, 2013). Entretanto, para lasers de fibra operando em regime de alta potência, a seleção da configuração do bombeamento é de importância crítica, e pode ser dividida em duas categorias principais: a configuração de bombeamento direto (JEONG et al., 2009), (SAMSON; CARTER; TANKALA, 2011), (PEYSOKHAN; MOBINI; MAFI, 2020), e a configuração de bombeamento tandem (YAN et al., 2019), (WIRTH et al., 2011) .

Os YDFL têm duas regiões de absorção proeminentes, a região estreita com seção de choque de absorção relativamente alta, em $\sigma_a = 1,75 \times 10^{-24} \text{ m}^{-2}$ no comprimento de onda de $\lambda_p = 976 \text{ nm}$, e a região ampla com menor seção de choque de absorção, em $\sigma_a = 0,5 \times 10^{-24} \text{ m}^{-2}$ no comprimento de onda de $\lambda_p = 915 \text{ nm}$. Por essas razões, quase todas as fontes de bombeamento para YDFL de $\lambda_s = 1018 \text{ nm}$, com seção de choque de emissão em $\sigma_e = 0,75 \times 10^{-24} \text{ m}^{-2}$, empregam fontes de bombeamento em torno da região de $\lambda_p = 976 \text{ nm}$ (XIAO et al., 2015). No entanto, um grande desafio que surge com o uso de fontes de $\lambda_p = 976 \text{ nm}$ é garantir a estabilidade do comprimento de onda das fontes de bombeamento durante a operação do laser. Parâmetros como temperatura de operação e requisitos elétricos afetam o comprimento de onda central de saída dos diodos de bombeamento. Essa situação pode ser superada com o uso de lasers de diodo estabilizados por comprimento de onda (KÖHLER et al., 2009). Por outro lado, o espectro da seção choque de baixa absorção, em $\lambda_p = 915 \text{ nm}$, oferece um maior espectro de comprimentos de onda utilizáveis para a realização do bombeamento dos YDFLs de $\lambda_s = 1018 \text{ nm}$. Entretanto, utilizar esses comprimentos de onda para bombear YDFLs de $\lambda_s = 1018 \text{ nm}$ produzirá menor eficiência devido à seção de choque de absorção ser menor para o Yb^{+3} em comparação com a região de $\lambda_p = 976 \text{ nm}$ (DONG; SAMSON, 2016).

Nesse contexto, a operação do YDFL tem se deparado, frequentemente, com algumas dificuldades técnicas, tais como a reabsorção da radiação laser, a forte competição de ganho com a emissão espontânea amplificada (ASE), além de ação laser parasita (YAN et al., 2018) e (XIAO et al., 2013). A fim de vencer estas dificuldades, a otimização dos parâmetros do oscilador laser se faz necessária e, desta forma, um modelo teórico descrevendo o fenômeno da amplificação laser é fundamental.

Em termos gerais, a configuração de bombeamento óptico dos lasers de fibra pode ser dividida em três categorias de bombeamento (YAN et al., 2018): o direto (WU et al., 2008), o reverso (HAN et al., 2011) e o bidirecional (YAN et al., 2018), (SHI et al., 2017). Já foi demonstrado que o bombeamento bidirecional pode alcançar uma melhor distribuição da potência de bombeamento na fibra ativa, reduzindo a carga térmica, enquanto aumenta a potência laser com elevada qualidade de feixe (LI et al., 2008). Contudo, a realização de estrutura de bombeamento bidirecional exige uma maior demanda do acoplador óptico, que também explica a razão de que a maioria dos lasers de fibra operando em $\lambda_s = 1018 \text{ nm}$ é restrita à configuração de bombeamento direto (XIAO et al., 2013).

A descrição quantitativa das características de saída e da distribuição de potência óptica no interior da porção ativa da fibra óptica do YDFL, fundamentais para o projeto do

laser, pode ser formulada por meio da solução de três grupos de equações: equações de taxa para as densidades de populações iônicas locais nos diferentes níveis de energia do sistema laser, equações de taxa locais para as potências dos feixes de emissão e de bombeamento e, por fim, as equações decorrentes das condições de contorno (PASCHOTTA et al., 1997), (HARDY; ORON, 1997), (PEYSOKHAN; MOBINI; MAFI, 2020).

Os YDFL operando em $\lambda_s = 1018$ nm têm muitas aplicações, especialmente como fontes de bombeamento em amplificadores de alta potência na configuração tandem, lasers pulsados e, devido à absorção residual nesse comprimento de onda, outros lasers de fibra óptica dopada com íons de itérbio. No caso de bombeamento na configuração tandem, YDFL em $\lambda_s = 1018$ nm são fontes de bombeamento muito boas para lasers de alta potência com saídas em comprimentos de onda maiores, entre $\lambda_s = 1060$ e $\lambda_s = 1080$ nm, devido ao menor defeito quântico e maior brilho em comparação com as convencionais fontes de bombeamento de diodo laser de $\lambda_p = 915$ nm ou $\lambda_p = 976$ nm (YAN et al., 2019), reduzindo significativamente a geração de calor (JEONG et al., 2009).

Esta introdução está organizada da seguinte forma. Na Seção 1.2 apresenta-se as contribuições do trabalho. Na Seção 1.3 formula-se o problema da amplificação utilizando bombeamento óptico em fibras ópticas com duplo revestimento dopadas com Yb^{+3} . A Seção 1.4 apresenta o esboço da solução do problema da amplificação luz, utilizando bombeamento óptico, que será objeto do desenvolvimento desta dissertação e, por fim, na Seção 1.5 descreve a organização do trabalho.

1.2 Contribuições do Trabalho

Neste trabalho é apresentada uma descrição macroscópica, por meio da susceptibilidade elétrica, do sistema atômico de três níveis de energia formado por um *ensemble* de átomos de itérbio, no processo a dois fótons (absorção e emissão laser), hospedado em uma matriz de sílica fundida (fibra dopada com íons de itérbio), que descreve o fenômeno laser desse sistema. Como se tratou de um *ensemble* de átomos, foi empregado um tratamento estatístico conduzido pela formulação da matriz densidade. A susceptibilidade elétrica acopla o campo eletromagnético interagente em duas frequências distintas, ω_p e ω_s , que são as frequências do sinal de bombeamento e do laser, respectivamente, com o sistema atômico, permitindo descrever o comportamento do sistema laser, além de fornecer uma solução simplificada, que são as equações de taxa do sistema laser. Outra contribuição de relevância neste trabalho foi apresentar a influência da temperatura no índice de refração da fibra óptica.

Os resultados obtidos neste trabalho, no que se referem às equações de taxa acopladas com as equações de transferência de calor, foram comparados com pesquisas anteriores que, também, utilizaram este tipo de formulação laser (PEYSOKHAN; MOBINI; MAFI, 2020) (KARIMI, 2018). No entanto, este trabalho apresenta as duas formulações para o fenômeno da emissão laser, a saber: a descrição laser por meio da matriz densidade e das equações de taxa.

1.2.1 Objetivos

Desenvolver um modelo teórico de um laser de fibra de alta potência de revestimento duplo dopada com íons de itérbio para operação em $\lambda_s = 1018$ nm, com esquema de bombeamento bidirecional, objetivando obter uma potência de saída em torno de 1 kW e eficiência superior a 80 %. Para tal, os objetivos específicos foram:

- Desenvolvimento do modelo teórico dos parâmetros do meio laser ativo baseado na formulação da matriz densidade;
- Desenvolvimento do modelo teórico do sistema laser baseado na formulação das equações de taxa;
- Modelamento do mecanismo da transferência de calor no oscilador laser; e
- Modelamento dos oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional.

1.2.2 Revisão bibliográfica

Em 2008, Li *et al.*, com base na estrutura especial dos YDCFL de alta potência, construiu um modelo de dissipação de calor em regime estacionário considerando tanto a transferência de calor convectiva quanto a radiativa. As distribuições de temperatura ao longo das direções radial e axial da fibra no bombeamento direto de 1 kW, e no bombeamento bidirecional de 500 W por cada extremidade do oscilador laser foram calculadas numericamente usando as equações de taxa de regime estacionário e a equação de calor. Os resultados mostraram que a distribuição de temperatura para o bombeamento bidirecional é mais uniforme do que para o modo de bombeamento direto, e a temperatura máxima na fibra diminui (LI *et al.*, 2008).

Em 2011, Li *et al.* construiu um YDCFL de $\lambda_s = 1018$ nm bombeado por diodo de $\lambda_p = 970$ nm. Um par de redes de Bragg de fibra com refletividade de 99,9 % e 9 % em um comprimento de onda central de $\lambda_s = 1018,9$ nm foi empregado como espelhos de cavidade. A fibra de revestimento duplo dopada com itérbio de comprimento 2,6 nm. A potência de saída do laser de 7,5 W em $\lambda_s = 1018$ nm foi obtida sob a potência da bombeamento de

59,2 W. A eficiência geral do laser foi de 16 % (LI et al., 2011).

Em 2013, Xiao *et al.* apresentaram um YDFL em $\lambda_s = 1018$ nm com uma potência de saída de 309 W e uma eficiência de 71 % (XIAO et al., 2013). Em 2015, eles aumentaram a potência de saída bombeada para 476 W com uma eficiência de 78,2 % (XIAO et al., 2015). No mesmo ano, Ottenhues *et al.* demonstraram um laser de fibra monolítico monomodo no comprimento de onda de 1018 nm com uma potência de saída de 200 W na configuração de bombeamento direto (OTTENHUES et al., 2015). Um YDFL com potência de saída de 403 W operando em $\lambda_s = 1018$ nm com eficiência óptica de 66 % e $M^2 = 1,51$ foi realizado por Seah *et al.* (SEAH; NG; CHUA, 2015).

Em 2014, Yanshan *et al.* analisaram teoricamente o efeito dos parâmetros de ganho da fibra para o projeto de um YDCF de comprimento de onda curto e, com base nessas análises, encontraram abordagens viáveis para melhorar o desempenho do laser. Foi construído um sistema YDFL de alta potência em $\lambda_s = 1018$ nm, as características de saída do laser com o núcleo/revestimento, concentração de dopagem e comprimento de fibra de ganho foram investigados experimentalmente. Verificou-se que aumentar a razão núcleo/área de revestimento, reduzir a concentração de dopagem de itérbio e encurtar o comprimento da fibra é uma maneira eficaz de suprimir o ganho de emissão espontânea amplificada (ASE) e garantir a operação do laser em $\lambda_s = 1018$ nm. Obteve-se uma potência de saída recorde de 154 W em $\lambda_s = 1018$ nm, com brilho de $5,7 \text{ GW}/\text{cm}^2 - \text{sr}$, e eficiência de conversão óptico-óptica de 71 % quando o laser operou na potência máxima (WANG et al., 2015).

Em 2016, Glick *et al.* desenvolveram um laser de fibra monolítico monomodo de alta potência em $\lambda_s = 1018$ nm, produzindo 230 W de potência de saída com eficiência óptico-óptica de 75 % na configuração de bombeamento bidirecional (GLICK et al., 2016). No ano seguinte, em 2017, foi apresentado por Yan *et al.* um YDFL em $\lambda_s = 1018$ nm de alta potência com parâmetros otimizados, como o comprimento da fibra de ganho. A potência de saída atingiu 805 W, juntamente com um eficiência de 64,9 % (YAN et al., 2017).

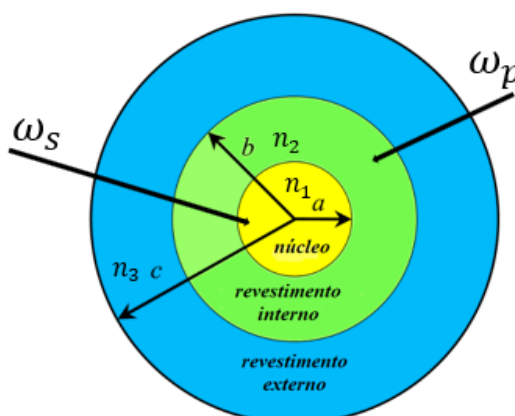
No entanto, em nenhum desses trabalhos supracitados foi apresentado um modelo do sistema laser baseado na matriz densidade. Nesse sentido, este presente trabalho, além de utilizar as equações de taxas acopladas às potências de bombeamento e do sinal laser, buscou modelar o oscilador laser empregando a matriz densidade e relacioná-la com outros parâmetros do laser, tais como a susceptibilidade atômica complexa, o índice de refração, o ganho laser e a polarização induzida devido ao campo eletromagnético aplicado

ao meio ativo por meio da potência de bombeamento. Fatores como a temperatura e à sua relação com o índice de refração da fibra óptica também serão analisados.

1.3 Formulação do Problema da Amplificação de Luz Utilizando Bombeamento Óptico

Consideremos um guia de ondas óptico do tipo fibra óptica de geometria circular, conforme mostrado na Fig. 1, com núcleo de raio, $r = a$, e índice de refração, n_1 , concêntrico ao revestimento interno de raio, $r = b$, e índice de refração, n_2 , e ao revestimento externo de raio, $r = c$, e de índice de refração, n_3 , satisfazendo as condições, $c > b > a$ e $n_1 > n_2 > n_3$. A fibra óptica é capaz de sustentar o guiamento de um campo eletromagnético de frequência angular ω_s , denominado de sinal, na região de seu núcleo e o guiamento de um segundo campo eletromagnético de frequência angular ω_p , denominado de bombeamento, na região, tanto do núcleo, como na região do revestimento interno.

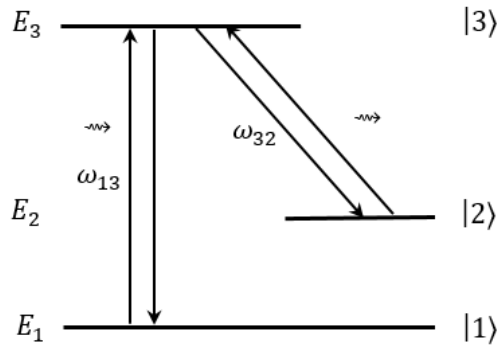
Figura 1 – Geometria para a fibra óptica de duplo revestimento utilizada neste trabalho. Onde a é o raio do núcleo, b é o raio do revestimento interno e c é o raio do revestimento externo.



Fonte: autor da dissertação.

Consideremos ainda que o núcleo da fibra óptica é dopado com íons, opticamente ativos, e com densidade uniforme. A estrutura de níveis de energia dos íons é formada por três estados, representados por $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, cada um com energia E_1 , E_2 e E_3 , sendo $E_3 > E_2 > E_1$, conforme representado pela Fig. 2. Neste sistema atômico são possíveis a ocorrência do fenômeno da absorção de um fóton de energia $\hbar\omega_{13}$ do campo eletromagnético de bombeamento, caracterizado pela frequência ω_s , entre os níveis de energia $1 \rightarrow 3$, desde que, $\omega_p \cong \omega_{13}$, e a emissão de um fóton de energia $\hbar\omega_{32}$ entre o nível de energia $3 \rightarrow 2$. Uma condição necessária para que este fóton possa ser somado com campo eletromagnético, a fim de obter-se amplificação é a sintonia, isto é, $\omega_s \cong \omega_{32}$.

Figura 2 – Diagrama de níveis de energia para o sistema atômico utilizado.



Fonte: autor da dissertação.

Como efeito do guiamento do campo eletromagnético pelo guia de ondas óptico, o material dielétrico que constitui a fibra óptica ficará polarizado. Desta forma, o campo resultante será a soma das duas contribuições, a do campo eletromagnético sustentado pela estrutura de guiamento e o campo elétrico devido à polarização. Por outro lado, a interação do campo de bombeamento com o sistema atômico irá induzir absorção atômica, que em termos macroscópicos, será descrita como um mecanismo de perda, com uma frequência central ω_{13} . A emissão estimulada decorrente da transição atômica entre os níveis $3 \rightarrow 2$, de frequência central, ω_{32} , irá contribuir com um ganho, aumentando a intensidade com campo eletromagnético do sinal.

1.4 Esboço da Solução do Problema da Amplificação da Luz Utilizando o Bombeamento Óptico

Para a descrição quantitativa do fenômeno físico apresentado na formulação, será adotada uma abordagem semi-clássica, onde o sistema atômico será descrito pela equação de Schrödinger, utilizando a técnica da matriz densidade, já que o meio ativo é descrito por um conjunto de átomos, sendo desta forma, uma abordagem quântica estatística. Com esta técnica é possível obter uma expressão para a polarização macroscópica. Por outro lado, o campo eletromagnético é descrito, classicamente, utilizando-se as equações de Maxwell. Especificamente, pela equação de onda (MEYSTRE; SARGENT, 2007) (PENNY-BACKER, 2009) (MARCUSE, 2012), não homogênea, para o campo elétrico, $E = E(r, z, t)$, onde a parte não homogênea é dada pela polarização macroscópica, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, z, t)$. Com esta consideração, e utilizando coordenadas cilíndricas, adequadas a fibra óptica, o campo elétrico satisfaz:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

No desenvolvimento da solução, em geral, separam-se as contribuições das polarizações devidas ao meio dielétrico, $\mathcal{P}_H(r, z, t)$, daquela devida à interação do campo elétrico com o sistema atômico (DESURVIRE, 1995), $\mathcal{P}_A(r, z, t)$,

$$\mathcal{P}(r, z, t) = \mathcal{P}_H(r, z, t) + \mathcal{P}_A(r, z, t), \quad (1.2)$$

Para um meio não dispersivo homogêneo e isotrópico, a polarização macroscópica, se relaciona com o campo elétrico, por meio da susceptibilidade elétrica real (DESURVIRE, 1995), χ_H ,

$$\mathcal{P}_H(r, z, t) = \varepsilon_0 \chi_H E(r, z, t) = \varepsilon_0 (n^2 - 1) E(r, z, t), \quad (1.3)$$

onde ε_0 é a permeabilidade elétrica do vácuo e n é o índice de refração do meio.

Para um meio dispersivo, como aquele produzido pelo sistema atômico em questão, a susceptibilidade elétrica e o campo elétrico, se relacionam, no domínio do tempo, por meio de uma integral de convolução (NEWTON, 1974) (GBUR, 2011)

$$\mathcal{P}_A(r, z, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi_A(\tau) E(r, z, t - \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

A contribuição da polarização \mathcal{P}_H na equação de onda, equação (1.1), pode ser escrita na forma (DESURVIRE, 1995)

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_H}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 (n^2 - 1) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

que, substituindo na equação (1.1), resulta em

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

onde $v = c/n$, que tem como efeito líquido a redução da velocidade de fase com campo elétrico, tanto, do bombeamento, quanto do sinal. O desenvolvimento da solução para o campo elétrico, considerando a contribuição do sistema atômico ativo, é obtida substituindo-se a equação (1.4) na equação (1.1), que resulta em uma equação integro-diferencial:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi_A(\tau) E(r, z, t - \tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Por outro lado, para o desenvolvimento da contribuição do sistema atômico ativo de maneira a descrever o fenômeno da dispersão óptica, é necessário trabalhar com a equação de onda no domínio da frequência e, desta forma, alguma transformada integral, deve ser utilizada na equação (1.7).

Considerando a transformada integral de Fourier, conforme definida a seguir, as representações do campo elétrico no domínio do tempo, $E(r, z, t)$, e no domínio da frequência, $E(r, z, \omega)$, se relacionam segundo (WEBER; ARFKEN, 2013)

$$E(r, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(r, z, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.8)$$

e

$$E(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(r, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.9)$$

Podem-se verificar as seguintes propriedades,

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega, \quad (1.10)$$

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt, \quad (1.11)$$

onde $\delta(t - t')$ e $\delta(\omega - \omega')$ são as funções delta de Dirac nos respectivos domínios. A equação (1.10) é conhecida com a propriedade de fechamento do espaço de funções $\{e^{i\omega t}\}$, e a equação (1.11), a propriedade de ortogonalidade. A propriedade da derivada da transformada de Fourier pode ser escrita na forma (WEBER; ARFKEN, 2013),

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(r, z, t) e^{i\omega t} dt \right] = (-i\omega)^n E(r, z, \omega). \quad (1.12)$$

O teorema da convolução pode ser escrito na forma,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \chi_A(\tau) E(r, z, t - \tau) d\tau \right] e^{i\omega t} dt = \chi_A(\omega) E(r, z, \omega). \quad (1.13)$$

Desta forma, a transformada de Fourier da equação (1.7) resulta em

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{v^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \chi_A(\omega) \right] \right\} E(r, z, \omega) = 0. \quad (1.14)$$

A equação de onda escrita em (1.14) está numa forma que permite a descrição do comportamento óptico da fibra óptica dopada com material ativo. A susceptibilidade elétrica, $\chi_A(\omega)$, é uma grandeza complexa que, em geral, é escrita na forma (YARIV, 1989) (KIEN; HAKUTA, 2004),

$$\chi_A(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (1.15)$$

onde a parte real, $\chi'(\omega)$, origina o índice de refração, e a parte imaginária, $\chi''(\omega)$, causa a amplificação ou atenuação do campo eletromagnético resultante da interação com o sistema atômico (DESURVIRE, 1990), (DIGONNET et al., 1997).

Esboçaremos agora a abordagem para a obtenção de uma expressão para a susceptibilidade elétrica do núcleo da fibra óptica que foi dopada com íons cuja estrutura atômica é aquela da Fig 2. A matriz densidade $\rho(t)$ para o sistema quântico satisfaz uma equação de movimento do tipo Heisenberg (MARCUSE, 2012), (YARIV, 1989), (DESURVIRE, 1995),

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H(t)], \quad (1.16)$$

onde $[\rho(t), H(t)]$ é o comutador entre $\rho(t)$ e $H(t)$. $H(t)$ é a hamiltoniana do sistema que descreve a interação do campo eletromagnético (KIEN; HAKUTA, 2004):

$$H(t) = H_0 + H_1(t) = H_0 + \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t). \quad (1.17)$$

O operador momento de dipolo da transição atômica é representado por $\vec{\mu}$ e a hamiltoniana não perturbada do sistema, H_0 , satisfaz a seguinte equação de autovalores, na representação da energia

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18)$$

Os autoestados na representação da energia satisfazem as relações de ortogonalidade e fechamento, respectivamente, isto é,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (1.19)$$

$$\sum_{i=1}^3 |i\rangle \langle i| = 1. \quad (1.20)$$

A matriz densidade tem a seguinte propriedade

$$Tr\rho(t) = \sum_n \rho_{ii}(t) = 1, \quad (1.21)$$

onde $Tr\rho(t)$ representa o traço na matriz, já que a soma das probabilidades de ocupação dos estados é unitária para o sistema de 3 níveis sob análise. Os elementos da matriz densidade satisfazem a seguinte equação de movimento, obtida a partir da equação (1.16) (DESURVIRE, 1990):

$$i\hbar \frac{d\rho_{nm}}{dt} = \hbar\omega_{nm}\rho_{nm} + \sum_{k=1}^3 (\rho_{nk}\mu_{km} - \mu_{nk}\rho_{km})E(r, z, t) \quad m, n = 1, 2 \text{ e } 3, \quad (1.22)$$

onde $E(r, z, t)$ é a soma dos campos eletromagnéticos de bombeamento, na frequência, $\omega_p \cong \omega_{13}$, e do sinal, na frequência, $\omega_s \cong \omega_{32}$. A frequência angular, ω_{nm} , associada à transição óptica é dada por

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}. \quad (1.23)$$

Uma vez que os elementos da matriz densidade tenham sido determinados, a polarização macroscópica induzida sobre o ensemble de íons de itérbio, com uma distribuição de níveis

de energia mostrados da Fig. 2, é calculada segundo: (MARCUSE, 2012) (KIEN; HAKUTA, 2004),

$$\mathcal{P}(t) = T_r(\mu\rho), \quad (1.24)$$

que, para o modelo em pauta, pode ser escrita como:

$$\mathcal{P} = 2\Re_e[\mu_{31}\rho_{12}] + 2\Re_e[\mu_{32}\rho_{33}] = \mathcal{P}(\omega_p) + \mathcal{P}(\omega_s), \quad (1.25)$$

onde \Re_e é a parte real da grandeza complexa.

Finalmente, comparando-se com a equação (1.4) transformada por Fourier (YARIV, 1989) (DESURVIRE, 1990)

$$\mathcal{P}(\omega) = \Re_e[\varepsilon_0\chi(\omega)E(r, z, \omega)], \quad (1.26)$$

obtém-se a expressão para a susceptibilidade elétrica complexa.

Para lasers bombeados opticamente, como aquele sob análise, o calor é gerado no núcleo da fibra óptica dopada com íons de terras raras devido, principalmente, ao defeito quântico entre os fótons de bombeamento e os fótons do sinal laser. Se a densidade volumétrica de potência térmica ao longo da direção axial for representada por $Q(z)$, então a distribuição radial de temperatura na fibra óptica, $T(r)$, pode ser determinada pela solução da equação da condução de calor (KARIMI, 2018), (LI et al., 2008):

$$\frac{d^2T(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{Q(z)}{\kappa}, \quad (1.27)$$

onde κ é a condutividade térmica da sílica. A densidade de potência térmica, $Q(z)$, se relacionada com o defeito quântico, λ_s/λ_p ,

$$Q(z) = \frac{\alpha(z)}{\pi a^2} P_p(z) \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right), \quad (1.28)$$

onde $\alpha(z)$ representa as perdas distribuídas ao longo da direção axial no núcleo da fibra, $P_p(z)$ é a distribuição axial da potência de bombeamento e λ_s e λ_p são os comprimentos de onda do sinal e do bombeamento, respectivamente.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em sete Capítulos. O Capítulo 1 introduz o trabalho, onde a relevância, a formulação do problema que foi investigado, em conjunto com a fundamentação teórica são apresentadas. No Capítulo 2 desenvolve-se um modelo para a susceptibilidade elétrica do meio ativo, utilizando um formalismo da mecânica quântica estatística, por meio do emprego da matriz densidade.

O problema da propagação do campo eletromagnético sustentado por uma fibra óptica de seção transversal circular é discutido no Capítulo 3, em particular, para os modos linearmente polarizados (LP).

No Capítulo 4 o modelo da susceptibilidade, desenvolvido no Capítulo 2, é utilizado para desenvolver uma solução para a equação de onda não homogênea e, desta forma, possibilitando obter-se uma descrição quantitativa do oscilador laser. O problema térmico é, também, tratado nesse Capítulo.

A metodologia empregada para implementar a análise do oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional é apresentada no Capítulo 5 e, os resultados obtidos dos cálculos dos parâmetros desse oscilador são apresentados no Capítulo 6.

Por fim, a conclusão do trabalho é apresentada no Capítulo 7.

Foram incluídos cinco Apêndices. No Apêndice A é detalhado o desenvolvimento matemático para a determinação dos elementos da matriz densidade; no Apêndice B a equação geral do coeficiente R como função dos parâmetros do sistema atômico é desenvolvida; no Apêndice C é detalhada a solução para a obtenção da relação de dispersão para uma fibra óptica com duplo revestimento; o Apêndice D demonstra o desenvolvimento das funções auxiliares do valor médio da densidade de população iônica e, por fim; no Apêndice E, são apresentadas as condições de Contorno na Rede de Bragg do oscilador laser.

2 MODELO PARA A SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA DO MEIO ATIVO DO OSCILADOR LASER

2.1 Introdução ao Capítulo

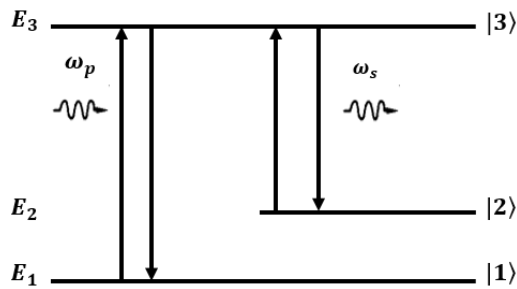
A real vantagem da utilização do formalismo da matriz densidade semiclássica é que ela fornece uma descrição completa da susceptibilidade atômica complexa e do índice de refração associados com o meio de ganho. Essa descrição estabelece as bases para a compreensão das propriedades ópticas do sistema, como absorção, emissão estimulada e amplificação. Por meio da análise da matriz densidade, é possível obter informações sobre a resposta do meio ativo do laser às condições de excitação e determinar as características de emissão do laser, permitindo a otimização de sua eficiência e coerência. Em particular para um processo com dois fótons.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Seção 2.2, onde é apresentado o modelo para a susceptibilidade elétrica para os íons de itérbio sob a interação de dois campos; Seção 2.3, onde é descrita a inclusão dos termos referentes aos processos colisionais e de emissão espontânea; Seção 2.4, que traduz a relação entre a polarização induzida e a susceptibilidade; Seção 2.5 onde é apresentada a análise dos resultados e, por fim, a Seção 2.6, onde conclui-se o capítulo.

2.2 Modelo para a susceptibilidade elétrica para os íons de itérbio sob a interação de dois campos

Nesta seção o formalismo da matriz densidade será empregado para a determinação de uma expressão para a susceptibilidade elétrica para um *ensemble* de íons de itérbio, Yb^{+3} , sob a interação de dois campos eletromagnéticos, do bombeamento e da emissão laser. Neste modelo os íons de Yb^{+3} serão descritos por um sistema quântico de três níveis, onde as transições ópticas permitidas ocorrem entre os níveis $1 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 2$. A transição óptica entre os níveis $2 \rightarrow 1$ é proibida (PENNYBACKER, 2009). A Fig. 3 ilustra o diagrama de níveis de energia utilizado no modelo.

Figura 3 – Diagrama de absorção e de emissão do laser de três níveis, $E_3 > E_2 > E_1$, onde ω_p e ω_s denotam as frequências dos campos de bombeamento e do sinal, respectivamente.



Fonte: autor da dissertação.

Na apresentação da energia, a hamiltoniana não perturbada H_0 , satisfaz a seguinte equação de autovalores,

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Os autoestados na representação de energia, satisfazem a relação de ortogonalidade e fechamento,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^3 |i\rangle \langle i| = 1. \quad (2.3)$$

A matriz densidade $\rho(t)$ para o sistema satisfaz uma equação de movimento do tipo Heisenberg

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H], \quad (2.4)$$

onde $[\rho, H]$ é o comutador entre ρ e H , e H é a hamiltoniana do sistema que descreve a interação com o campo eletromagnético

$$H(t) = H_0 + H_1(t). \quad (2.5)$$

A matriz densidade satisfaz a propriedade

$$Tr(\rho) = \sum_n \rho_{nn} = 1, \quad (2.6)$$

Uma vez que a soma das probabilidades de ocupação sobre os estados é unitária para o sistema de 3 níveis em análise, (2.6), se reduz (MARCUSE, 2012) (PENNYBACKER, 2009)

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1. \quad (2.7)$$

A hamiltoniana da perturbação $H_1(t)$ será escrita na forma

$$H_1(t) = \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t), \quad (2.8)$$

onde $\vec{\mu}$ é o operador do momento de dipolo elétrico da transição óptica induzida. Tendo em vista a paridade desta transição, a representação da matriz de $\vec{\mu}$ é dada por

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

e deve ser observado que

$$\mu_{ii} = 0. \quad (2.10)$$

Além disto $\mu_{ij} = \mu_{ji}^*$, onde * denota o complexo conjugado.

Por outro lado, o campo elétrico $\vec{E}(t)$ pode ser escrito na forma

$$E(t) = E_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) + E_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (2.11)$$

onde E_p e E_s são amplitudes reais dos campos de bombeamento e do sinal, respectivamente. O campo elétrico pode ser expresso utilizando a notação complexa (KIEN; HAKUTA, 2004)

$$E(t) = \frac{A_p}{2} e^{i\omega_p t} + \frac{A_s}{2} e^{i\omega_s t} + c.c., \quad (2.12)$$

onde

$$A_p = E_p e^{i\varphi_p}, \quad (2.13)$$

$$A_s = E_s e^{i\varphi_s}, \quad (2.14)$$

onde A_s e A_p são amplitudes complexas independentes do campo, e *c.c.* é o complexo conjugado.

2.2.1 Elementos da matriz densidade

As equações que descrevem a evolução temporal dos elementos de matriz densidade (1.22) são descritas como (YARIV, 1989), (DESURVIRE, 1990), (DESURVIRE, 1995), (MARCUSE, 2012):

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{33}) = \frac{i}{\hbar} [2(\mu_{13}\rho_{31} - \rho_{13}\mu_{31}) - (\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})]E(t), \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{33} - \rho_{22}) = \frac{i}{\hbar} [(\mu_{31}\rho_{13} - \mu_{13}\rho_{31}) + 2(\mu_{32}\rho_{23} - \rho_{32}\mu_{23})]E(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = i\omega_{21}\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}(\rho_{32}\mu_{13} - \mu_{32}\rho_{13})E(t), \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = i\omega_{31}\rho_{13} - \frac{i}{\hbar}[\mu_{13}(\rho_{11} - \rho_{33}) - \rho_{12}\mu_{23}]E(t), \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{32} = -i\omega_{32}\rho_{32} - \frac{i}{\hbar}[\mu_{32}(\rho_{33} - \rho_{22}) - \mu_{31}\rho_{12}]E(t). \quad (2.19)$$

O desenvolvimento das equações para os elementos da matriz densidade está apresentado no Apêndice A.

2.3 Inclusão do Termos Referentes aos Processos Colisionais e de Emissão Espontânea

As equações que descrevem a evolução temporal da matriz densidade devem incluir os termos colisionais (elástico e inelástico) e, também, o fenômeno da emissão espontânea, já que no tratamento semi-clássico anteriormente descrito da interação da radiação com o sistema atômico de três níveis de energia a emissão espontânea não é descrita. Desta forma, as equações (2.15) e (2.16) passam a incluir, respectivamente, os termos (YARIV, 1989), (DESURVIRE, 1990), (MARCUSE, 2012)

$$\frac{(\rho_{11} - \rho_{33}) - (\rho_{11} - \rho_{33})_0}{T_{31}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{(\rho_{33} - \rho_{22}) - (\rho_{33} - \rho_{22})_0}{T_{32}}, \quad (2.21)$$

onde as taxas T_{31} e T_{32} são dadas segundo

$$T_{31} = A_{31} + \Gamma_{31}, \quad (2.22)$$

$$T_{32} = A_{32} + \Gamma_{32}, \quad (2.23)$$

onde Γ_{ij} representa a taxa que descreve os mecanismos colisionais elástico e inelástico, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{(e)} + \Gamma_{ij}^{(i)}$, referente à transição $i \rightarrow j$ ($i > j$). A_{31} e A_{32} descrevem as taxas do mecanismo de emissão espontânea entre os níveis, respectivamente.

O termo $(\rho_{ii} - \rho_{jj})_0$, $i \neq j$, representa a diferença das probabilidades de ocupação na ausência de campos de radiação internos. O valor $(\rho_{ii} - \rho_{jj})_0$, em geral, no equilíbrio térmico obedece a estatística de Boltzmann.

Para os termos da matriz densidade fora da diagonal principal, ρ_{12} , ρ_{13} e ρ_{32} , as equações (2.17)-(2.19) devem incluir os termos

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\tau_{12}}, \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = -\frac{\rho_{13}}{\tau_{13}}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{32} = -\frac{\rho_{32}}{\tau_{32}}. \quad (2.26)$$

As constantes de taxas τ_{ij} , $i \neq j$ incluem as colisões elástica, inelástica e a emissão espontânea. Evidentemente, as constantes de taxa T_{ij} e τ_{ij} , são diferentes. Contudo, sob a hipótese de que o alargamento espectral seja homogêneo, pode-se considerar que

$$\tau_{12} \approx \tau_{13} \approx \tau_{32} \approx T_{31} \approx T_{32} \approx \tau. \quad (2.27)$$

Este ponto será discutido com maior profundidade à luz dos resultados do modelo.

Sob estas hipóteses, as equações que descrevem a evolução temporal da matriz densidade para o sistema atômico de três níveis podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{33}) = -\frac{(\rho_{11} - \rho_{33}) - (\rho_{11} - \rho_{33})_0}{\tau} + \frac{i}{\hbar} [2(\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) - (\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})] E(t), \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{33} - \rho_{22}) = -\frac{(\rho_{33} - \rho_{22}) - (\rho_{33} - \rho_{22})_0}{\tau} + \frac{i}{\hbar} [(\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) + 2(\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})] E(t), \quad (2.29)$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21}\right)\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}(\mu_{13}\rho_{32} - \mu_{32}\rho_{13})E(t), \quad (2.30)$$

$$\frac{d\rho_{13}}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} - i\omega_{31}\right)\rho_{13} - \frac{i}{\hbar}[\mu_{13}(\rho_{11} - \rho_{33}) + \mu_{23}\rho_{12}]E(t) \quad (2.31)$$

$$\frac{d\rho_{32}}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + i\omega_{32}\right)\rho_{32} - \frac{i}{\hbar}[\mu_{32}(\rho_{33} - \rho_{22}) - \mu_{31}\rho_{12}]E(t). \quad (2.32)$$

A solução do sistema (2.28)-(2.32) é obtida sob a hipótese de que a diferença das probabilidades de ocupação seja independente do tempo, isto é,

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{33}) = \frac{d}{dt}(\rho_{33} - \rho_{22}) = 0. \quad (2.33)$$

Por outro lado, as equações, (2.30)-(2.32), que descrevem a evolução temporal, consistem em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para desenvolver a solução o campo elétrico pode ser escrito na forma, (2.12).

$$E(t) = \frac{A_p}{2}e^{i\omega_p t} + \frac{A_s}{2}e^{i\omega_s t} + c.c. \quad (2.34)$$

Esta dependência com a frequência sugere que as soluções para ρ_{13} , ρ_{32} e ρ_{12} podem ser escritas na forma

$$\rho_{13} = \Lambda e^{i\omega_p t}, \quad (2.35)$$

$$\rho_{32} = \lambda e^{-i\omega_s t}, \quad (2.36)$$

$$\rho_{12} = D e^{i(\omega_p - \omega_s)t}, \quad (2.37)$$

onde Λ , λ e D são valores complexos independentes do tempo. Sob a hipótese (2.35), a solução de (2.31) é

$$\frac{d\rho_{13}}{dt} = i\omega_p \Lambda e^{i\omega_p t} = -\left(\frac{1}{\tau} + i\omega_{31}\right) \Lambda e^{i\omega_p t} + \Lambda_1, \quad (2.38)$$

onde

$$\Lambda_1 = -\frac{i}{\hbar} \left[\mu_{13} (\rho_{11} - \rho_{33}) + \mu_{23} D e^{i(\omega_p - \omega_s)t} \right] \left(\frac{A_p}{2} e^{i\omega_p t} + \frac{A_s}{2} e^{i\omega_s t} + \frac{A_p^*}{2} e^{-i\omega_p t} + \frac{A_s^*}{2} e^{-i\omega_s t} \right). \quad (2.39)$$

Agrupando os termos de (2.38) que multiplicam $e^{i\omega_p t}$, obtém-se

$$\left\{ i \left[(\omega_p - \omega_{31}) - \frac{i}{\tau} \right] \Lambda + \frac{iA_p}{2\hbar} \mu_{13} (\rho_{11} - \rho_{33}) + \frac{iA_s}{2\hbar} \mu_{32} D \right\} e^{i\omega_p t} = 0, \quad (2.40)$$

que resulta em

$$\Lambda \left[(\omega_p - \omega_{31}) - \frac{i}{\tau} \right] = -\frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} (\rho_{11} - \rho_{33}) - \frac{\mu_{32} A_s}{2\hbar} D. \quad (2.41)$$

De modo análogo, a substituição (2.36) em (2.32) resulta,

$$-i\omega_s \lambda e^{-i\omega_s t} = -\left(\frac{1}{\tau} + i\omega_{32}\right) \lambda e^{-i\omega_s t} + \lambda_1, \quad (2.42)$$

onde

$$\lambda_1 = -\frac{i}{\hbar} \left[\mu_{32} (\rho_{33} - \rho_{22}) - \mu_{31} D e^{i(\omega_p - \omega_s)t} \right] \left(\frac{A_p}{2} e^{i\omega_p t} + \frac{A_s}{2} e^{i\omega_s t} + \frac{A_p^*}{2} e^{-i\omega_p t} + \frac{A_s^*}{2} e^{-i\omega_s t} \right). \quad (2.43)$$

Agrupando os termos de (2.42) que multiplicam $e^{-i\omega_s t}$, obtém-se

$$\left\{ i \left[(\omega_s - \omega_{32}) + \frac{i}{\tau} \right] \lambda - \frac{iA_s^*}{2\hbar} \mu_{32} (\rho_{33} - \rho_{22}) + \frac{i\mu_{31} A_p^*}{2\hbar} D \right\} e^{-i\omega_s t} = 0, \quad (2.44)$$

que resulta

$$\lambda \left[(\omega_s - \omega_{32}) + \frac{i}{\tau} \right] = \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} (\rho_{33} - \rho_{22}) + \frac{\mu_{31} A_p^*}{2\hbar} D. \quad (2.45)$$

Por fim, a substituição de (2.37) em (2.30), resulta

$$i(\omega_p - \omega_s) e^{i(\omega_p - \omega_s)t} = - \left(\frac{1}{\tau} - i\omega_{21} \right) D e^{i(\omega_p - \omega_s)t} + D_1, \quad (2.46)$$

onde

$$D_1 = \frac{i}{\hbar} [\mu_{13}\lambda e^{-i\omega_s t} - \mu_{32}\Lambda e^{i\omega_p t}] \left(\frac{A_p}{2} e^{i\omega_p t} + \frac{A_s}{2} e^{i\omega_s t} + \frac{A_p^*}{2} e^{-i\omega_p t} + \frac{A_s^*}{2} e^{-i\omega_s t} \right). \quad (2.47)$$

Agrupando os termos em (2.46) que multiplicam $e^{i(\omega_p - \omega_s)t}$, obtém-se

$$\left\{ i \left[(\omega_p - \omega_s - \omega_{21}) - \frac{i}{\tau} \right] D + \frac{i\mu_{13}A_p}{2\hbar} \lambda - \frac{i\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \Lambda \right\} e^{i(\omega_p - \omega_s)t} = 0 \quad (2.48)$$

que resulta em

$$D \left[(-\omega_p + \omega_s + \omega_{21}) + \frac{i}{\tau} \right] = -\frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \lambda + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \Lambda. \quad (2.49)$$

O termo do lado esquerdo entre os colchetes da equação (2.49) pode ser escrito com $(-\omega_p + \omega_s + \omega_{31} - \omega_{32}) = (\omega_{31} - \omega_p) + (\omega_s - \omega_{32})$. Portanto (2.49) pode ser reescrita como consistindo em contribuições de dois diferentes fótons, ou seja

$$D \left[(\omega_{31} - \omega_p) + (\omega_s - \omega_{32}) + \frac{i}{\tau} \right] = -\frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \lambda + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \Lambda. \quad (2.50)$$

Na equação (2.49) foi utilizado $\omega_{21} = \omega_{31} - \omega_{32}$. O desenvolvimento das soluções (2.41), (2.45) e (2.50) está mostrado no Apêndice B.

As equações (2.41) e (2.45) podem ser resolvidas em termos das diferenças de população, resultando em:

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \frac{1}{L_{32}} \left\{ (\rho_{33} - \rho_{22}) - \frac{|\mu_{31}|^2 |A_p|^2}{4\hbar^2} R \left[\frac{(\rho_{11} - \rho_{33})}{L_{13}} - \frac{(\rho_{33} - \rho_{22})}{L_{32}} \right] \right\}, \quad (2.51)$$

$$\Lambda = \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \frac{1}{L_{13}} \left\{ (\rho_{11} - \rho_{33}) + \frac{|\mu_{32}|^2 |A_s|^2}{4\hbar^2} R \left[\frac{(\rho_{11} - \rho_{33})}{L_{13}} - \frac{(\rho_{33} - \rho_{22})}{L_{32}} \right] \right\}, \quad (2.52)$$

onde,

$$L_{32} = \omega_s - \omega_{32} + \frac{i}{\tau} = \Delta_s + \frac{i}{\tau}, \quad (2.53)$$

$$L_{13} = \omega_{31} - \omega_p + \frac{i}{\tau} = -\Delta_p + \frac{i}{\tau}, \quad (2.54)$$

onde Δ_s e Δ_p representam os desvios de frequência ou as perdas de sintonias entre os campos de bombeamento e do sinal, com as transições atômicas, respectivamente.

A expressão para R pode ser escrita na forma

$$R = (R_{re} - iR_{im})\tau, \quad (2.55)$$

onde,

$$R_{re} = (1 + \Delta_s^2 \tau^2) (1 + \Delta_p^2 \tau^2) \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad (2.56)$$

$$R_{im} = \frac{B}{A} R_{re}. \quad (2.57)$$

As expressões para A e B podem ser escritas na forma:

$$A = \Delta_s \tau (1 + \Delta_p^2 \tau^2) (1 + \Delta_s^2 \tau^2 - \beta_{13}^2 \tau^2) - \Delta_p \tau (1 + \Delta_s^2 \tau^2) (1 + \Delta_p^2 \tau^2 - \beta_{23}^2 \tau^2), \quad (2.58)$$

$$B = (1 + \Delta_p^2 \tau^2) (1 + \Delta_s^2 \tau^2) + \beta_{13}^2 \tau^2 (1 + \Delta_p^2 \tau^2) + \beta_{32}^2 \tau^2 (1 + \Delta_s^2 \tau^2), \quad (2.59)$$

onde

$$\beta_{13} = \frac{|\mu_{13}| |A_p|}{2\hbar}, \quad (2.60)$$

$$\beta_{23} = \frac{|\mu_{32}| |A_s|}{2\hbar}. \quad (2.61)$$

O desenvolvimento das expressões (2.56)-(2.59) está detalhado no Apêndice B. Substituindo (2.51)-(2.52) em (2.41) e (2.45), obtém-se

$$\rho_{13} = \frac{\mu_{13}}{2\hbar} \frac{1}{L_{13}} \left\{ (\rho_{11} - \rho_{33}) + \beta_{32}^2 R \left[\frac{(\rho_{11} - \rho_{33})}{L_{13}} - \frac{(\rho_{33} - \rho_{22})}{L_{32}} \right] \right\} A_p e^{i\omega_p t}, \quad (2.62)$$

$$\rho_{23} = \frac{\mu_{32}}{2\hbar} \frac{1}{L_{32}} \left\{ (\rho_{33} - \rho_{22}) - \beta_{13}^2 R \left[\frac{(\rho_{11} - \rho_{33})}{L_{13}} - \frac{(\rho_{33} - \rho_{22})}{L_{32}} \right] \right\} A_s^* e^{-i\omega_s t}. \quad (2.63)$$

Utilizando as equações (2.62) e (2.63) em (2.28) e (2.29), pode-se escrever as seguintes expressões para as diferenças de população, na hipótese de regime permanente estacionário:

$$(\rho_{11} - \rho_{33}) = (\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{\Gamma_4}{\Gamma_1 \Gamma_4 - \Gamma_2 \Gamma_3}, \quad (2.64)$$

$$(\rho_{33} - \rho_{22}) = (\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1 \Gamma_4 - \Gamma_2 \Gamma_3}, \quad (2.65)$$

$$(\rho_{11} - \rho_{22}) = (\rho_{11} - \rho_{33}) + (\rho_{33} - \rho_{22}). \quad (2.66)$$

Além disso, deve ser observado que $(\rho_{33} - \rho_{22})_0 = 0$. As expressões para Γ_i e os α_i são dados segundo

$$\Gamma_1 = 1 + \frac{4\beta_{13}^2\tau^2}{1 + \Delta_p^2\tau^2} \left\{ 1 - \beta_{32}^2\tau^2 \left[\frac{\alpha_1}{1 + \Delta_p^2\tau^2} + \frac{\alpha_2}{2(1 + \Delta_s^2\tau^2)} \right] \right\}, \quad (2.67)$$

$$\Gamma_2 = \frac{2\beta_{32}^2\tau^2}{1 + \Delta_s^2\tau^2} \left\{ 1 + 2\beta_{13}^2\tau^2 \left[-\frac{\alpha_2}{1 + \Delta_p^2\tau^2} + \frac{\alpha_3}{2(1 + \Delta_s^2\tau^2)} \right] \right\}, \quad (2.68)$$

$$\Gamma_3 = \frac{2\beta_{13}^2\tau^2}{1 + \Delta_p^2\tau^2} \left\{ 1 - \beta_{32}^2\tau^2 \left[\frac{2\alpha_2}{1 + \Delta_s^2\tau^2} + \frac{\alpha_1}{(1 + \Delta_p^2\tau^2)} \right] \right\}, \quad (2.69)$$

$$\Gamma_4 = 1 + \frac{4\beta_{32}^2\tau^2}{1 + \Delta_s^2\tau^2} \left\{ 1 + \beta_{13}^2\tau^2 \left[\frac{\alpha_3}{1 + \Delta_p^2\tau^2} - \frac{\alpha_2}{2(1 + \Delta_p^2\tau^2)} \right] \right\}, \quad (2.70)$$

$$\alpha_1 = (1 - \Delta_p^2\tau^2) R_{im} + 2\Delta_p\tau R_{re}, \quad (2.71)$$

$$\alpha_2 = (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_{re} + (1 + \Delta_p\Delta_s\tau^2) R_{im}, \quad (2.72)$$

$$\alpha_3 = 2\Delta_s\tau R_{re} - (1 - \Delta_s^2\tau^2) R_{im}. \quad (2.73)$$

2.4 Relação entre a Polarização Induzida e a Susceptibilidade

A polarização induzida pelo campo elétrico nas equações (2.11) e (2.12) sobre o *ensemble* de íons de Yb^{+3} é calculada no domínio da frequência, segundo

$$\mathcal{P}(\omega) = T_r [\mu\rho(\omega)], \quad (2.74)$$

que, para o modelo em pauta, pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = 2\Re_e [\mu_{31}\rho_{12}] + 2\Re_e [\mu_{32}\rho_{33}], \quad (2.75)$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\omega_p) + \mathcal{P}(\omega_s). \quad (2.76)$$

Assim, o primeiro termo descreve a polarização do sistema devido à interação com o campo eletromagnético da frequência ω_p de bombeamento e $\mathcal{P}(\omega_s)$ devido a interação na frequência ω_s do sinal laser. Como a susceptibilidade complexa é $\chi = \chi' + i\chi''$, então

$$\mathcal{P}(\omega) = \Re_e (\varepsilon_0\chi A e^{i\omega t}), \quad (2.77)$$

Pode-se observar que a parte imaginária da susceptibilidade é responsável pela atenuação ou amplificação do campo eletromagnético. A equação (2.75) nada mais é do que uma afirmação de que a polarização induzida é a soma de polarizações induzidas na frequência de bombeamento ω_p e na frequência do sinal ω_s . As soluções para a parte imaginária da susceptibilidade $\chi''(\omega)$ nas frequências ω_s e ω_p são dadas por:

$$\chi''(\omega_s) = \frac{|\mu_{23}|^2}{\hbar} \frac{\tau}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} \left\{ (\rho_{33} - \rho_{22}) \left[1 + \beta_{13}^2 \tau^2 \left(\frac{\alpha_3}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} - \frac{\alpha_2}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \right) \right] + \zeta_s \right\}, \quad (2.78)$$

$$\chi''(\omega_p) = -\frac{|\mu_{23}|^2}{\hbar} \frac{\tau}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \left\{ (\rho_{11} - \rho_{33}) \left[1 - \beta_{32}^2 \tau^2 \left(\frac{\alpha_1}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} + \frac{\alpha_2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} \right) \right] + \zeta_p \right\}, \quad (2.79)$$

onde,

$$\zeta_s = (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{13}^2 \tau^2 \frac{\alpha_2}{1 + \Delta_p^2 \tau^2}, \quad (2.80)$$

$$\zeta_p = (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{32}^2 \tau^2 \frac{\alpha_2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2}. \quad (2.81)$$

Pode ser observado por meio da análise das equações (2.78) e (2.79) que estas expressões podem ser divididas em termos que representam processos dependentes de um único fóton e processos com contribuição de dois fótons. Os termos $(\rho_{33} - \rho_{22})$ em (2.78) e $(\rho_{11} - \rho_{33})$ em (2.79) são contribuições do processo de dois fótons.

A expressão para a parte real da susceptibilidade nas frequências ω_s e ω_p são escritas, respectivamente, como

$$\chi'(\omega_s) = \frac{2\pi|\mu_{23}|^2}{\hbar} \frac{\tau}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} \zeta_{\omega_s}, \quad (2.82)$$

$$\chi'(\omega_p) = -\frac{2\pi|\mu_{13}|^2}{\hbar} \frac{\tau}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \zeta_{\omega_p}, \quad (2.83)$$

onde

$$\zeta_{\omega_s} = \left\{ (\rho_{33} - \rho_{22}) \left[\Delta_s \tau - \beta_{13}^2 \tau^2 \left(\frac{\alpha_4}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} - \frac{\alpha_5}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \right) \right] - (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{13}^2 \tau^2 \frac{\alpha_5}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \right\}, \quad (2.84)$$

$$\zeta_{\omega_p} = \left\{ (\rho_{11} - \rho_{33}) \left[\Delta_p \tau - \beta_{23}^2 \tau^2 \left(\frac{\alpha_6}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} + \frac{\alpha_5}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} \right) \right] + (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{32}^2 \tau^2 \frac{\alpha_5}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} \right\}, \quad (2.85)$$

$$\alpha_4 = 2\Delta_s \tau R_{im} + (1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_{re}, \quad (2.86)$$

$$\alpha_5 = (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_{im} - (1 + \Delta_p \Delta_s \tau^2) R_{re}, \quad (2.87)$$

$$\alpha_6 = 2\Delta_p \tau R_{im} - (1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_{re}. \quad (2.88)$$

2.5 Análise Numérica com o Modelo Apresentado da Susceptibilidade Elétrica

Consideremos, inicialmente, os resultados para a emissão e absorção de 1 fóton para o caso de pequena intensidade de emissão estimulada, isto é,

$$\beta_{32} \tau \ll 1. \quad (2.89)$$

No limite $\beta_{32} \tau$, as expressões (2.64) e (2.65) se reduzem a

$$\rho_{11} - \rho_{33} = (\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{1 + \Delta_p^2 \tau^2}{1 + \Delta_p^2 \tau^2 + 4\beta_{13}^2 \tau^2}, \quad (2.90)$$

$$\rho_{33} - \rho_{22} = (\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{2\beta_{13}^2 \tau^2}{1 + \Delta_p^2 \tau^2}. \quad (2.91)$$

Utilizando as equações (2.79) e (2.90), a expressão para a parte imaginária da susceptibilidade na frequência de bombeamento ω_p se reduz a

$$\chi''(\omega_p) = -\frac{|\mu_{13}|^2}{\hbar} \frac{(\rho_{11} - \rho_{33})_0}{1 + \Delta_p^2 \tau^2 + 4\beta_{13}^2 \tau^2}. \quad (2.92)$$

Pode ser demonstrado que este resultado é, exatamente, aquele para um sistema de dois níveis, com uma largura de linha de absorção $\Delta\omega$,

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau} (1 + 4\beta_{13}^2 \tau^2)^{1/2}. \quad (2.93)$$

Agora, utilizando (2.78) e (2.91), obtém-se a seguinte expressão para a susceptibilidade para a frequência do sinal

$$\chi''(\omega_s) = \frac{|\mu_{23}|^2}{4\hbar} \tau (\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{\beta_{13}^2}{\gamma^2} \xi_{\omega_s}, \quad (2.94)$$

onde,

$$\xi_{\omega_s} = \left\{ \left[\frac{1}{1 + (\gamma - \Omega)^2 \tau^2} + \frac{1}{1 + (\gamma + \Omega)^2 \tau^2} + \frac{2(\gamma^2 - \Omega^2) \tau^2 (1 + 2\gamma^2 \tau^2) - 2}{(1 + 4\gamma^2 \tau^2) [1 + (\gamma - \Omega)^2 \tau^2] [1 + (\gamma + \Omega)^2 \tau^2]} \right] \right\}, \quad (2.95)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \Delta_p - \Delta_s, \quad (2.96)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\Delta_p^2 + 4\beta_{13}^2)^{1/2}. \quad (2.97)$$

Na condição de $\beta_{32}\tau \ll 1$, a equação (2.82) assume a seguinte forma:

$$\chi'(\omega_s) = \frac{-\pi|\mu_{23}|^2}{2\hbar}\tau(\rho_{11} - \rho_{33})_0 \frac{\beta_{13}^2}{\gamma^2} \zeta_{\omega_{sm}}, \quad (2.98)$$

onde

$$\zeta_{\omega_{sm}} = \frac{(\Omega - \gamma)\tau}{1 + (\Omega - \gamma)^2\tau^2} + \frac{(\Omega + \gamma)\tau}{1 + (\Omega + \gamma)^2\tau^2} + \frac{2\Omega\tau [4\gamma^2\tau^2 + (\gamma^2 - \Omega^2)\tau^2 - 1]}{(1 + 4\gamma^2\tau^2) [1 + (\Omega - \gamma)^2\tau^2] [1 + (\Omega + \gamma)^2\tau^2]}. \quad (2.99)$$

A parte real da susceptibilidade complexa, $\chi'(\omega_s)$, associada à transição atômica, contribui para o índice de refração do meio, e a sua parte imaginária, $\chi''(\omega_s)$, contribui para o coeficiente de absorção linear. O coeficiente de absorção linear pode contribuir para o ganho (amplificação laser) ou para a perda do sinal laser (atenuação do sinal laser). O ganho por unidade de comprimento, na frequência ω , do bombeamento ou do sinal laser, pode ser calculado por (YARIV, 1989):

$$\frac{dI(\omega)}{dz} = \frac{1}{2}\omega|A|^2\chi''(\omega). \quad (2.100)$$

2.6 Conclusão do Capítulo

A principal realização consistiu em desenvolver um modelo para a suscetibilidade $\chi(\omega)$ que leva em consideração os desvios de frequência de bombeamento e de sinal, Δ_p e Δ_s , em um processo de dois fótons. Esse modelo é essencial para entender e descrever adequadamente as propriedades e comportamentos dos íons de itérbio sob a interação de dois campos.

3 PROPAGAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM UMA FIBRA ÓPTICA

3.1 Introdução ao Capítulo

As equações e as condições que traduzem a propagação do feixe óptico na estrutura do guia de onda óptico serão descritas neste Capítulo, assim como os modos propagantes do campo eletromagnético no guia óptico e a relação do fluxo com a densidade de potência transportada pelos modos propagantes.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Seção 3.2, onde é apresentada o desenvolvimento da solução para a propagação do campo eletromagnético na estrutura da fibra óptica; Seção 3.3, onde descrevem-se os Modos TE, TM, híbridos e os modos linearmente polarizados (LP); Seção 3.4, que apresenta a relação do fluxo e densidade de potência dos campos propagantes na estrutura do guia de ondas óptico; Seção 3.5 onde é apresentada a carta dos modos LP; e pela Seção 3.6 onde é realizada a conclusão do capítulo.

3.2 Desenvolvimento da Solução

A estrutura mais simples que pode sustentar a propagação do campo eletromagnético em frequências ópticas é aquela formada por dois meios dielétricos de seção circular de raio a e índice de refração n , sendo $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0$, onde ε e ε_0 são, respectivamente, a permissividade absoluta do meio dielétrico e a permissividade no vácuo. O índice de refração n desta estrutura deve satisfazer a condição (MARCUSE, 1974) (CHERIN, 1983)

$$n = \begin{cases} n_1 & r \leq a, \\ n_2 & r > a, \\ n_1 > n_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

É possível obter uma solução para as equações de Maxwell para a estrutura, satisfazendo as seguintes condições de contorno para os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$:

- os campos devem ser finitos na origem, isto é, para $r = 0$;
- os campos devem se anular para $r \Rightarrow \infty$; e
- as componentes tangenciais dos campos devem ser contínuas na interface entre os dois meios, isto é para $r = a$,

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \times \hat{a}_n = 0, \quad (3.2)$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \times \hat{a}_n = 0, \quad (3.3)$$

onde \hat{a}_n é o vetor unitário normal à superfície $r = 0$. $(\vec{E}_{1,2}, \vec{H}_{1,2})$ denotam os campos para $r \leq a$, $r > a$, respectivamente.

Tendo em vista a geometria circular da estrutura, as equações de Maxwell devem ser escritas em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , que na ausência de cargas elétricas ($\rho = 0$) e correntes de condução ($\vec{J} = \vec{0}$) se escrevem (CHERIN, 1983) (SNYDER; LOVE, 1986),

$$\nabla \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} = 0. \quad (3.7)$$

A lei de Faraday é escrita como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) + \hat{a}_\theta \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \hat{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \\ &= -\mu_0 \hat{a}_r \frac{\partial H_r}{\partial t} - \mu_0 \hat{a}_\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial t} - \mu_0 \hat{a}_z \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo.

A lei de Gauss para o campo elétrico é expressa como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (3.9)$$

A lei de Ampère-Maxwell é escrita da seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \hat{a}_\theta \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \hat{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right], \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 n^2 \left(\hat{a}_r \frac{\partial E_r}{\partial t} + \hat{a}_\theta \frac{\partial E_\theta}{\partial t} + \hat{a}_z \frac{\partial E_z}{\partial t} \right), \quad (3.11)$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo.

A lei de Gauss para o campo magnético é escrita por:

$$\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (3.12)$$

onde as componentes dos campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ foram escritos em termos de suas componentes escalares como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_r(\vec{r}, t)\hat{a}_r + E_\theta(\vec{r}, t)\hat{a}_\theta + E_z(\vec{r}, t)\hat{a}_z, \quad (3.13)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = H_r(\vec{r}, t)\hat{a}_r + H_\theta(\vec{r}, t)\hat{a}_\theta + H_z(\vec{r}, t)\hat{a}_z, \quad (3.14)$$

onde $(\hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_z)$ representam os vetores unitário no sistema de coordenadas cilíndricas e satisfazem:

$$\hat{a}_i \times \hat{a}_j = \hat{a}_k, \quad (3.15)$$

$$\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.16)$$

As leis de Faraday e Ampère-Maxwell escritas em termos das componentes escalares resultam em:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} = n^2 \epsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = n^2 \epsilon_0 \frac{\partial E_\theta}{\partial t}, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = n^2 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (3.22)$$

As transformadas inversas de Fourier para os campos elétrico e magnético são descritas, respectivamente, conforme as equações (3.23) e (3.25), enquanto as transformadas de Fourier desses campos são expressas pelas equações (3.24) e (3.26).

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(r, \theta, \beta, \omega) e^{i(\beta z - \omega t)} d\beta d\omega, \quad (3.23)$$

$$\vec{E}(r, \theta, \beta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(r, \theta, z, t) e^{-i(\beta z - \omega t)} dz dt, \quad (3.24)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(r, \theta, \beta, \omega) e^{i(\beta z - \omega t)} d\beta d\omega, \quad (3.25)$$

$$\vec{H}(r, \theta, \beta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(r, \theta, z, t) e^{-i(\beta z - \omega t)} dz dt. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.24) em (3.23) encontra-se que

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(r, \theta, z', t') e^{-j(\beta z' - \omega t')} dz' dt' \right] e^{i(\beta z - \omega t)} d\beta d\omega, \quad (3.27)$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(r, \theta, z', t') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\beta(z-z')} d\beta \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right] dz' dt'. \quad (3.28)$$

A relação de ortogonalidade é descrita pelas equações (3.29)-(3.30).

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\beta - \beta')z} dz = \delta(\beta - \beta'), \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega = \delta(t - t'), \quad (3.30)$$

empregando a relações de ortogonalidade na equação (3.28), tem-se que

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(r, \theta, z', t') \delta(\beta - \beta') \delta(t - t') dz' dt'. \quad (3.31)$$

As equações (3.17)-(3.22) estão escritas no domínio do tempo. Uma técnica para o desenvolvimento das soluções é utilizar uma abordagem espectral e, para tal, é conveniente utilizar a técnica da transformada de Fourier definida segundo (3.24) e (3.26). Esta representação dos campos é conhecida como representação de ondas planas ($\phi = \omega t - \beta z$), com velocidade de fase $v_f = dz/dt = \omega/\beta$ sendo $\beta = \beta(\omega)$ a relação de dispersão, em vista do kernel da equação integral. A substituição da transformada integral na componente radial da lei de Faraday (3.17) resulta em:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + i\beta E_\theta + i\omega\mu_0 H_r \right) e^{i(\omega t - \beta z)} dz dt = 0 \quad (3.32)$$

que implica em:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + i\beta E_\theta + i\omega\mu_0 H_r = 0, \quad (3.33)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + i\beta E_\theta = -i\omega\mu_0 H_r, \quad (3.34)$$

onde agora os campos estão escritos no espaço transformado, isto é $\vec{E}(r, \theta, \beta, \omega)$. As demais equações são escritas no espaço transformado resultando nas formas:

$$-i\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu_0 H_\theta, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -i\omega\mu_0 H_z, \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + i\beta H_\theta = i\omega n^2 \varepsilon_0 E_r, \quad (3.37)$$

$$-i\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = i\omega \varepsilon_0 n^2 E_\theta, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = i\omega n^2 \varepsilon_0 E_z. \quad (3.39)$$

Este sistema de equações (3.34)-(3.39) pode ser resolvido para as componentes axiais dos campos E_z e H_z . Aplicando a lei de Gauss,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} - i\beta E_z = 0, \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - i\beta H_z = 0. \quad (3.41)$$

Pode ser observado do sistema de equações que as componentes transversais dos campos podem ser obtidas a partir das componentes axiais, isto é,

$$\begin{cases} i\beta E_\theta + i\omega\mu_0 H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ i\omega n^2 \varepsilon_0 E_\theta + i\beta H_r = -\frac{\partial H_z}{\partial r} \end{cases}, \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} -i\beta E_r + i\omega\mu_0 H_\theta = \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ i\omega n^2 \varepsilon_0 E_r - i\beta H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \end{cases}, \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} i\beta & i\omega\mu_0 \\ i\omega n^2 \varepsilon_0 & i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\theta \\ H_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\Delta = -\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2, \quad (3.45)$$

onde $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$.

$$\begin{bmatrix} -i\beta & i\omega\mu_0 \\ i\omega n^2 \varepsilon_0 & -i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ H_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\Delta = -\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2 = n^2 k^2 - \beta^2. \quad (3.47)$$

Resolvendo os sistemas, obtém-se (OKAMOTO, 2006):

$$E_r = -\frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right], \quad (3.48)$$

$$H_\theta = -\frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \omega n^2 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right], \quad (3.49)$$

$$E_\theta = -\frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right], \quad (3.50)$$

$$H_r = -\frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega n^2 \varepsilon_0}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right]. \quad (3.51)$$

O próximo passo é determinar a equação diferencial a ser satisfeita pelas componentes axiais. Ou seja,

$$\frac{\partial H_r}{\partial \theta} = \frac{1}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[-i\beta \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} + i \frac{\omega n^2 \varepsilon_0}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} \right], \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} H_\theta + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = i\omega n^2 \varepsilon_0 E_z. \quad (3.53)$$

Substituindo, respectivamente, as componentes radial e azimutal do campo magnético nas equações (3.52) e (3.53), são obtidos os seguintes resultados:

$$-\frac{1}{r} \frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \omega^2 n^2 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] - \frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} + \omega^2 n^2 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} \right] - \frac{1}{r} \frac{1}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[-i \beta \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} + i \frac{\omega n^2 \varepsilon_0}{r} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} \right] = i \omega n^2 \varepsilon_0 E_z, \quad (3.54)$$

$$-\frac{i \omega^2 n^2 \varepsilon_0}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{i \omega^2 n^2 \varepsilon_0}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{i \omega^2 n^2 \varepsilon_0}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{i}{n^2 k^2 - \beta^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \beta r \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} + \beta \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} \right] = i \omega n^2 \varepsilon_0 E_z, \quad (3.55)$$

$$-\frac{1}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{1}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{1}{n^2 k^2 - \beta^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} - E_z = 0. \quad (3.56)$$

Após realizadas as devidas manipulações algébricas, é encontrada a equação de Helmholtz para a componente axial do campo elétrico (E_z):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (n^2 k^2 - \beta^2) E_z = 0. \quad (3.57)$$

Utilizando o mesmo procedimento matemático, é obtida a equação para H_z ,

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (n^2 k^2 - \beta^2) H_z = 0, \quad (3.58)$$

onde $k_c^2 = n_2 k^2 - \beta^2$ e $k_c^2 > 0$.

A equação (3.57) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = -(n^2 k^2 - \beta^2) E_z, \quad (3.59)$$

ou,

$$\nabla^2 E_z = -(n^2 k^2 - \beta^2) E_z. \quad (3.60)$$

A equação (3.60) é uma equação de autovalores do problema de Sturm–Liouville, onde $k_0^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ é o autovalor. Uma vez que ela seja resolvida, será determinada a relação de dispersão, isto é, $\beta = \beta(\omega)$ e, também, o espectro de autovalores do problema.

A equação (3.60) pode ser resolvida pela técnica de separação de variáveis e, para tal, admitamos:

$$E_z(r, \theta) = f(r)g(\theta). \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.60), tem-se:

$$g \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{g}{r} \frac{df}{dr} + \frac{f}{r^2} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + k_c^2 f g = 0. \quad (3.62)$$

Dividindo (3.62) por $f.g$, tem-se que:

$$\frac{r^2}{f} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + k_c^2 r^2 = 0, \quad (3.63)$$

ou ainda,

$$\frac{r^2}{f} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + k_c^2 r^2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \nu^2. \quad (3.64)$$

Tendo em vista que o campo E_z deve ser invariante para uma rotação de 2π , isto é,

$$E_z(r, \theta) = E_z(r, \theta + 2\pi), \quad (3.65)$$

a solução de g deve ser harmônica, ou seja:

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \nu^2, \quad (3.66)$$

onde ν é inteiro, que implica em:

$$g(\theta) = e^{j\nu\theta}, \nu = 0, 1, 2, 3... \quad (3.67)$$

A equação radial é descrita por:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left[k_c^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] f(r) = 0. \quad (3.68)$$

Fazendo a substituição:

$$x = k_c r \rightarrow dx = k_c dr, \quad (3.69)$$

$$\frac{d}{dr} = k_c \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d^2}{dr^2} = k_c^2 \frac{d^2}{dx^2}. \quad (3.70)$$

A equação (3.68) se escreve da seguinte forma (WEBER; ARFKEN, 2013):

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left[1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right] f(x) = 0, \quad (3.71)$$

que é a equação diferencial de Bessel ordinária. As soluções para $f(x)$ são (OKOSHI, 2012) (WEBER; ARFKEN, 2013):

$$f(x) = AJ_\nu(k_c r) + BN_\nu(k_c r), \quad (3.72)$$

onde J_ν é a função de Bessel do primeiro tipo, de ordem ν e N_ν é a função de Bessel do segundo tipo, de ordem ν , também chamada de função de Neumann. Tendo em vista que os campos devem ser finitos na origem e que a função de Neumann diverge para $r = 0$, a constante B deve ser nula. A solução para $r \leq a$ é, então, escrita:

$$E_{z1}(r, \theta) = Ae^{i\nu\theta} J_\nu(k_c r), \quad (3.73)$$

onde ν é um inteiro, e o autovalor

$$k_c^2 = k_{c1}^2 = n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2. \quad (3.74)$$

Para $r \geq a$, $n_2 < n_1$, então, por hipótese,

$$k_c^2 = k_{c2}^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2. \quad (3.75)$$

Para que a estrutura atue como um guia de ondas óptico, a energia eletromagnética deverá ficar confinada no núcleo da fibra, isto é, em $r < a$. Portanto, para $r > a$, a equação (3.66) deverá ter soluções que se anulam quando $r \rightarrow 0$. Para que isto seja possível, deve-se substituir $k_c^2 = -h^2$ ou $k_{c2} = ih$, que resultará na equação (3.90), cuja soluções são as funções de Bessel modificadas, de ordem ν do primeiro e segundo tipos.

Resta discutir o que implicará a hipótese de $k_{c2}^2 = -h^2$, sendo $h > 0$. Então, seja escrever:

Para $r < a$:

$$k_{c1}^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 > 0. \quad (3.76)$$

Para $r > a$:

$$-h^2 = n_2^2 k_0^2 - \beta^2 < 0, \quad (3.77)$$

ou

$$\beta^2 = n_1^2 k_0^2 - k_{c1}^2, \quad (3.78)$$

$$\beta^2 = n_2^2 k_0^2 + h^2. \quad (3.79)$$

Subtraindo (3.78) pela (3.79), tem-se que:

$$n_1^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2 = (n_1^2 - n_2^2) k_0^2 = h^2 + k_{c1}^2 > 0, \quad (3.80)$$

o que implica em

$$(n_1^2 - n_2^2) k_0^2 > 0, \quad (3.81)$$

então

$$n_1^2 k_0^2 > n_2^2 k_0^2, \quad (3.82)$$

$$n_1 k_0 > n_2 k_0, \quad (3.83)$$

$$n_1 > n_2. \quad (3.84)$$

Portanto, a condição $n_1 > n_2$ é necessária para o guiamento.

Pode-se, também, definir o conceito de índice de refração efetivo n_{eff} , a partir da seguinte restrição:

$$k_{c1}^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 > 0 \rightarrow n_1^2 k_0^2 > \beta^2 \rightarrow n_1 k_0 > \beta, \quad (3.85)$$

$$h^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 > 0 \rightarrow \beta^2 > n_2^2 k_0^2 \rightarrow \beta > n_2 k_0, \quad (3.86)$$

o que resulta em $n_1 k_0 > \beta > n_2 k_0$ ou $n_1 > \beta/k_0 > n_2$. O termo β/k_0 se comporta como um índice de refração efetivo n_{eff} , que satisfaz a condição $n_1 > n_{eff} > n_2$.

Para que a estrutura possa sustentar a propagação do campo eletromagnético é necessário que β , a constante de propagação axial seja a mesma, tanto para $r \leq a$ e $r \geq a$. Logo:

$$k_{c1}^2 - n_1^2 k_0^2 = k_{c2}^2 - n_2^2 k_0^2, \quad (3.87)$$

$$\kappa_{c1}^2 - n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n, \quad (3.88)$$

ou

$$k_{c1}^2 - k_{c2}^2 = (n_1^2 - n_2^2) \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (3.89)$$

com $n_1 > n_2$. O que implica que $k_{c2} = ih$, $k_{c2}^2 = -h^2$ e $k_{c1}^2 + h^2 > 0$. Portanto, para $r \geq a$ tem-se que:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left[h^2 + \frac{\nu^2}{r^2} \right] f(r) = 0. \quad (3.90)$$

Substituindo $x = ihr$ em (3.90), resulta em:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \left[1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right] f(x) = 0, \quad (3.91)$$

que é a equação modificada de Bessel. As soluções para a equação (3.91) são:

$$f(x) = CI_\nu(hr) + DK_\nu(hr), \quad (3.92)$$

onde I_ν e K_ν são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipos, respectivamente. Tendo em vista que para $r \rightarrow \infty$ os campos devem ser nulos (para que a energia fique confinada no núcleo da fibra), $C = 0$ e $r \geq a$. Logo,

$$f(hr) = De^{j\nu\theta} N_\nu(hr). \quad (3.93)$$

A fim de determinar o espectro dos autovalores e as correspondentes autofunções, deve-se aplicar as condições de contorno na interface $r = a$. Desta forma, as seguintes condições são estabelecidas:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \times \hat{a}_n = 0, \quad (3.94)$$

$$E_{\theta 1} = E_{\theta 2}, \quad (3.95)$$

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad (3.96)$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \hat{a}_n = 0, \quad (3.97)$$

$$H_{\theta 1} = H_{\theta 2}, \quad (3.98)$$

$$H_{z1} = H_{z2}. \quad (3.99)$$

A condição de guiamento é assegurada para $n_1 > n_2$. Desenvolvendo as demais componentes dos campos:

para $r \leq a$:

$$E_{z1}(r, \theta) = AJ_\nu(k_c r)e^{i\nu\theta}, \quad (3.100)$$

$$H_{z1}(r, \theta) = BJ_\nu(k_c r)e^{i\nu\theta}. \quad (3.101)$$

Para $r > a$:

$$E_{z2}(r, \theta) = CK_\nu(hr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.102)$$

$$H_{z2}(r, \theta) = DK_\nu(hr)e^{i\nu\theta}. \quad (3.103)$$

As demais componentes são obtidas utilizando as equações, para $r < a$:

$$E_r(r, \theta) = -\frac{i\beta}{k_c^2} \left[Ak_c J'_\nu(k_c r) + i\frac{\omega\mu_0\nu}{\beta r} BJ_\nu(k_c r) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.104)$$

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{i\beta}{k_c^2} \left[i\frac{\nu}{r} AJ_\nu(k_c r) - \frac{\omega\mu_0\nu}{\beta} BJ'_\nu(k_c r) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.105)$$

$$H_r(r, \theta) = -\frac{i\beta}{k_c^2} \left[Bk_c J'_\nu(k_c r) - \frac{i\omega\varepsilon_1\nu}{\beta r} AJ_\nu(k_c r) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.106)$$

$$H_\theta(r, \theta) = -\frac{i\beta}{k_c^2} \left[i\frac{\nu}{r} BJ_\nu(k_c r) + \frac{\omega\varepsilon_1\nu}{\beta} A\nu J'_\nu(k_c r) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.107)$$

onde

$$J'_\nu(k_c r) = \frac{d}{d(k_c r)} J_\nu(k_c r). \quad (3.108)$$

Para $r \geq a$:

$$E_r(r, \theta) = \frac{i\beta}{h^2} \left[ChK'_\nu(hr) + i\frac{\omega\mu_0\nu}{\beta r} DK_\nu(hr) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.109)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{i\beta}{h^2} \left[i\frac{\nu}{r} CK_\nu(hr) - \frac{\omega\mu_0\nu}{\beta} DK'_\nu(hr) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.110)$$

$$H_r(r, \theta) = \frac{i\beta}{h^2} \left[DhK'_\nu(hr) - \frac{i\omega\varepsilon_1\nu}{\beta r} CK_\nu(hr) \right] e^{i\nu\theta}, \quad (3.111)$$

$$H_\theta(r, \theta) = \frac{i\beta}{h^2} \left[i\frac{\nu}{r} DK_\nu(hr) + \frac{\omega\varepsilon_2}{\beta} ChK'_\nu(hr) \right] e^{i\nu\theta}. \quad (3.112)$$

onde

$$K'_\nu(hr) = \frac{d}{d(hr)} K_\nu(hr) \quad (3.113)$$

Aplicando a condição de contorno em $r = a$, isto é, a continuidade das componentes tangenciais dos campos na interface entre dois meios dielétricos, obtém-se o seguinte sistema homogêneo (CHERIN, 1983) (OKAMOTO, 2006):

$$\begin{bmatrix} J_\nu(k_c a) & 0 & -K_\nu(ha) & 0 \\ \frac{i\nu}{k_c^2 a} J_\nu(k_c a) & -\frac{\omega\mu_0}{k_c\beta} J'_\nu(k_c a) & \frac{i\nu}{h^2 a} K_\nu(ha) & -\frac{\omega\mu_0}{h\beta} K'_\nu(ha) \\ 0 & J_\nu(k_c a) & 0 & -K_\nu(ha) \\ -\frac{\omega\varepsilon_1}{k_c\beta} J'_\nu(k_c a) & \frac{i\nu}{k_c^2 a} J_\nu(k_c a) & \frac{\omega\varepsilon_2}{h\beta} K'_\nu(ha) & \frac{i\nu}{h^2 a} K_\nu(ha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (3.114)$$

O sistema de equações (3.114) fornece uma solução não trivial para A , B , C e D se o determinante dos seus coeficientes for nulo. O desenvolvimento do determinante (Apêndice C) resulta na equação de dispersão (3.115) para os modos eletromagnéticos sustentados pela estrutura (OKAMOTO, 2006):

$$\left(\frac{1}{k_c a} \cdot \frac{J'_\nu(k_c a)}{J_\nu(k_c a)} + \frac{1}{ha} \cdot \frac{K'_\nu(ha)}{K_\nu(ha)} \right) \left(\frac{n_1^2}{k_c a} \cdot \frac{J'_\nu(k_c a)}{J_\nu(k_c a)} + \frac{n_2^2}{ha} \cdot \frac{K'_\nu(ha)}{K_\nu(ha)} \right) = \nu^2 \left[\left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 + \left(\frac{1}{ha} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_c} \right)^2. \quad (3.115)$$

Uma vez que o espectro de autovalores tenha sido obtido, isto é, $\beta = \beta(\omega)$, o sistema (3.114) pode ser utilizado para resolver as razões das amplitudes, correspondendo a cada valor de β :

$$\frac{C}{A} = \frac{J_\nu(k_c a)}{K_\nu(ha)}, \quad (3.116)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{j\beta\nu}{\omega\mu_0} \left(\frac{1}{k_c^2 a^2} + \frac{1}{h^2 a^2} \right) \left(\frac{J'_\nu(k_c a)}{k_c a J_\nu(k_c a)} + \frac{K'_\nu(ha)}{ha K_\nu(ha)} \right)^{-1}, \quad (3.117)$$

$$\frac{D}{A} = \frac{J_\nu(k_c a)}{K_\nu(ha)}. \quad (3.118)$$

3.3 Os Modos TE, TM, Híbridos e os Modos LP

Da equação (3.115), fazendo:

$$x = \frac{1}{(k_c a)} \frac{J'_\nu(k_c a)}{J_\nu(k_c a)}, \quad (3.119)$$

$$y = \frac{K'_\nu(ha)}{(ha) K_\nu(ha)}. \quad (3.120)$$

Substituindo (3.119) e (3.120) em (3.115), tem-se que:

$$(x + y) (n_1^2 x + n_2^2 y) = \nu^2 \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2, \quad (3.121)$$

Aplicando a distributiva em (3.121), resulta em:

$$n_1^2 x^2 + n_2^2 xy + n_1^2 yx + n_2^2 y^2 = n_1^2 x^2 + y(n_1^2 + n_2^2)x + n_2^2 y. \quad (3.122)$$

Logo tem-se que:

$$x^2 + y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} \right) x + \frac{n_2^2}{n_1^2} y^2 = \frac{\nu^2}{n_1^2} \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2, \quad (3.123)$$

$$x^2 + y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} \right) x + \left\{ \frac{n_2^2}{n_1^2} y^2 - \frac{\nu^2}{n_1^2} \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \right\} = 0. \quad (3.124)$$

Calculando as raízes da equação (3.124). Considerando que os seus coeficientes sejam $a' = 1$,

$$b = y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} \right), \quad (3.125)$$

$$c = \left\{ \frac{n_2^2}{n_1^2} y^2 - \frac{\nu^2}{n_1^2} \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \right\}, \quad (3.126)$$

tem-se que:

$$x = \frac{1}{2} \left\{ -y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} \right) \pm \left\{ \xi + 4 \frac{\nu^2}{n_1^2} \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(k_c a)^2} \right)^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \right\}^{1/2} \right\}, \quad (3.127)$$

onde:

$$\xi = \left[\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2} \right)^2 - 4 \frac{n_2^2}{n_1^2} \right] = \frac{n_1^4 + 2n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{n_1^4} - 4 \frac{n_2^2}{n_1^2}. \quad (3.128)$$

Desenvolvendo ξ , tem-se que:

$$\xi = \frac{n_1^4 - 2n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{n_1^4} = \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \right)^2. \quad (3.129)$$

Retornando à equação (3.127) e fazendo a substituição de ξ , obtemos:

$$x = \left\{ -y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right) \pm \left[y^2 \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 + \frac{\nu^2}{n_1^2} \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(k_c a)^2} \right)^2 \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.130)$$

Simplificando a equação (3.130), obtemos:

$$x = -y \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 \pm R, \quad (3.131)$$

onde

$$R = \left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 y^2 + \left(\frac{\nu\beta}{n_1 k_0} \right)^2 \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(k_c a)^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.132)$$

Das relações de recorrência para as funções de Bessel com argumento $x = k_c a$, tem-se:

$$J'_\nu(x) = -J'_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (3.133)$$

$$J'_\nu(x) = -J'_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (3.134)$$

Realizando algumas manipulações algébricas com essas relações de recorrência, obtemos:

$$\frac{J'_\nu(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} = \frac{-J_{\nu+1}(k_c a) + \frac{\nu}{k_c a} J_\nu(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} = -\frac{J_{\nu+1}(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} + \frac{\nu}{(k_c a)^2}, \quad (3.135)$$

$$\frac{J'_\nu(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} = \frac{J_{\nu-1}(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} - \frac{\nu}{(k_c a)^2}. \quad (3.136)$$

Igualando a equação (3.131), individualmente, com as equações (3.135) e (3.136) e substituindo y (3.120) resultam, respectivamente, em (3.137) e (3.138), que são os modos híbridos elétricos EH .

$$\frac{J_{\nu+1}(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\nu(ha)}{(ha) K_\nu(ha)} + \left[\frac{\nu}{(k_c a)^2} - R \right], \quad (3.137)$$

$$\frac{J_{\nu-1}(k_c a)}{(k_c a) J_\nu(k_c a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\nu(ha)}{(ha) K_\nu(ha)} + \left[\frac{\nu}{(k_c a)^2} - R \right], \quad (3.138)$$

onde $(ha)^2 = (n_1^2 + n_2^2)k_0^2 - (k_c a)^2$. Seja o caso especial $\nu = 0$, isso implica em $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, e todas as componentes dos campos dos modos são radialmente simétricas (MARCUSE, 1974) (CHERIN, 1983) (SNYDER; LOVE, 1986) (OKAMOTO, 2006).

- 1º caso:

$$\frac{J_1(k_c a)}{(k_c a) J_0(k_c a)} = -\frac{K_1(ha)}{(ha) K_0(ha)}, \quad (3.139)$$

onde $K'_0(x = ha) = -K_1(x = ha)$. Neste caso, A e C são nulos, e pode-se observar que as componentes H_r , H_z e E_θ são diferentes de zero ($\neq 0$) e, portanto, tem-se os modos TE . As soluções são denotadas TE_{0m} , para $m = 1, 2, 3, \dots$, correspondem aos autovalores p_{0m} .

- 2º caso:

$$\frac{J_1(k_c a)}{(k_c a) J_0(k_c a)} = -\frac{n_2^2}{han_1^2} \frac{K_1(ha)}{K_0(ha)}, \quad (3.140)$$

onde $J_{-1}(x = k_c a) = -J_1(x = k_c a)$. Neste caso, B e D são nulos, e pode-se observar que somente as componentes não nulas são E_r , E_z e H_θ e tem-se os modos TM . As soluções são denotadas TM_{0m} .

3.3.1 Soluções para guiamento fraco: modos LP

Uma boa aproximação para as componentes dos campos é a condição de guiamento, que pode ser obtida quando o índice de refração do núcleo é ligeiramente maior que aquele do revestimento, que é o caso encontrado na prática, isto é (MARCUSE, 1974):

$$n_1 - n_2 \ll 1. \quad (3.141)$$

Nestas condições, a condição de continuidade imposta sobre as componentes tangenciais de \vec{H} na interface entre n_1 e n_2 torna-se idêntica àquela das componentes tangenciais de \vec{E} . Isto leva a uma grande simplificação no casamento das componentes dos campos na interface núcleo-revestimento. No limite, $n_1 - n_2 \ll 1$, todos os números de ondas transversais (k_0, h) são pequenos comparados com a constante de propagação axial β , ou seja:

$$k_c, h \ll \beta. \quad (3.142)$$

Consideremos agora a solução da equação de onda para as componentes tangenciais dos campos em coordenadas retangulares, isto é, E_x, E_y, H_x e H_y . Adicionalmente, deseja-se procurar soluções onde ou a componente x ou a y do campo elétrico é nula. Observando que:

$$E_\theta = -E_x \sin(\theta) + E_y \cos(\theta). \quad (3.143)$$

Então, o campo elétrico \vec{E} de uma solução com polarização- y tem a forma,

$$E_x = 0, \quad (3.144)$$

$$E_y = \begin{cases} AJ_\nu(k_c r) e^{i\nu\theta} & r < a \\ BK_\nu(hr) e^{i\nu\theta} & r > a \end{cases}. \quad (3.145)$$

Considerando que $E_z \ll E_y$, as componentes do campo magnético são, então, expressas,

$$H_x = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y, \quad (3.146)$$

$$H_y \approx 0, \quad (3.147)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3.148)$$

A componente axial de \vec{E} está relacionada com \vec{H}_x segundo a lei de Faraday:

$$E_z = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{j\beta}{\omega^2\mu_0\epsilon} \frac{\partial E_y}{\partial y}. \quad (3.149)$$

Deve ser observado que as componentes dos campos E_x e H_y são nulas nesta solução. As outras quatro componentes dos campos podem ser expressas em termos de E_y . Para tal deve-se observar as seguintes transformações entre as variantes independentes $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.151)$$

Lembrando que $r^2 = x^2 + y^2$ e $\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$, segue que:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta), \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \text{sen}(\theta), \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \text{sen}(\theta), \quad (3.154)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos(\theta). \quad (3.155)$$

Finalmente, para $r < a$:

$$E_x = 0, \quad (3.156)$$

$$E_y = AJ_\nu(k_c r) e^{i\nu\theta}, \quad (3.157)$$

$$E_z = \frac{k_c A}{\beta} \frac{A}{2} \left[J_{\nu+1}(k_c r) e^{i(\nu+1)\theta} - J_{\nu-1}(k_c r) e^{i(\nu-1)\theta} \right], \quad (3.158)$$

$$H_x = -\frac{\beta A}{\omega \mu} J_\nu(k_c r) e^{i\nu\theta}, \quad (3.159)$$

$$H_y \approx 0, \quad (3.160)$$

$$H_z = -\frac{ik_c A}{\omega \mu_0} \frac{A}{2} \left[J_{\nu+1}(k_c r) e^{i(\nu+1)\theta} - J_{\nu-1}(k_c r) e^{i(\nu-1)\theta} \right]. \quad (3.161)$$

Para isso foram empregadas as relações de recorrência de Bessel:

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)], \quad (3.162)$$

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)]. \quad (3.163)$$

Para $r > a$:

$$E_x = 0, \quad (3.164)$$

$$E_y = BK_\nu(hr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.165)$$

$$E_z = \frac{hB}{\beta} \frac{1}{2} \left[K_{\nu+1}(hr)e^{i(\nu+1)\theta} - K_{\nu-1}(hr)e^{i(\nu-1)\theta} \right], \quad (3.166)$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} BK_\nu(hr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.167)$$

$$H_y = 0, \quad (3.168)$$

$$H_z = \frac{ih}{\omega\mu_0} \frac{B}{2} \left[K_{\nu+1}(hr)e^{i(\nu+1)\theta} - K_{\nu-1}(hr)e^{i(\nu-1)\theta} \right]. \quad (3.169)$$

onde foram utilizadas as relações de recorrência de Bessel:

$$K'_\nu(x) = -\frac{1}{2} [K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)], \quad (3.170)$$

$$\frac{\nu}{x} K_\nu(x) = -\frac{1}{2} [K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)]. \quad (3.171)$$

Como aproximação adicional, $\beta = n_1 k_0 \approx n_2 k_0$. Tendo em vista que $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ e $n_2 \rightarrow n_1$. Deve-se ainda observar que E_y e H_x são os campos dominantes, pois no limite $\beta \gg k_c, h$, traduzindo que o campo é inicialmente transversal. A constante B é dada por:

$$B = \frac{J_\nu(k_c a)}{K_\nu(ha)} A. \quad (3.172)$$

Sejam agora determinadas as componentes dos campos para a polarização $-x$.

Neste caso:

$$E_x = \begin{cases} AJ_\nu(k_c r)e^{i\nu\theta} & r < a \\ BK_\nu(hr)e^{i\nu\theta} & r > a \end{cases}, \quad (3.173)$$

$$E_y = 0. \quad (3.174)$$

As demais componentes são obtidas segundo:

$$E_z = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{i\beta}{\omega^2\mu_0\epsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x}, \quad (3.175)$$

$$H_x = 0, \quad (3.176)$$

$$H_y = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_x, \quad (3.177)$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (3.178)$$

Lembrando que $E_z \ll E_x$. Na solução polarização- x , $E_y = 0$ e $H_x = 0$. As expressões para o campos podem ser escritas para $r < a$:

$$E_x = AJ_\nu(k_cr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.179)$$

$$E_y = 0, \quad (3.180)$$

$$E_z = \frac{ik_c A}{\beta} \frac{1}{2} \left[J_{\nu+1}(k_cr)e^{i(\nu+1)\theta} - J_{\nu-1}(k_cr)e^{i(\nu-1)\theta} \right], \quad (3.181)$$

$$H_x = 0, \quad (3.182)$$

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu_0} BJ_\nu(k_cr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.183)$$

$$H_z = \frac{k_c A}{\omega\mu_0} \frac{1}{2} \left[J_{\nu+1}(k_cr)e^{i(\nu+1)\theta} + J_{\nu-1}(k_cr)e^{i(\nu-1)\theta} \right]. \quad (3.184)$$

Para $r > a$:

$$E_x = BK_\nu(hr)e^{i\nu\theta}, \quad (3.185)$$

$$E_y = 0, \quad (3.186)$$

$$E_z = i\frac{h B}{\beta} \frac{1}{2} \left[K_{\nu+1}(hr)e^{i(\nu+1)\theta} + K_{\nu-1}(hr)e^{i(\nu-1)\theta} \right], \quad (3.187)$$

$$H_x = 0, \quad (3.188)$$

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu_0} BK_\nu(hr), \quad (3.189)$$

$$H_z = \frac{h B}{\omega\mu_0} \frac{1}{2} \left[K_{\nu+1}(hr)e^{i(\nu+1)\theta} - K_{\nu-1}(hr)e^{i(\nu-1)\theta} \right]. \quad (3.190)$$

Mais uma vez, $\beta \simeq n_1 k_0 \approx n_2 k_0$, e deve ser observado que E_x e H_y são as componentes dominantes na polarização quando o modo é transversal e linearmente polarizado na direção x . Além disto,

$$B = \frac{J_\nu(k_ca)}{K_\nu(ha)} A. \quad (3.191)$$

Para os modos LP , seguem as relações de dispersão, da condição de continuidade das componentes tangenciais em $r = a$:

$$k_c \frac{J_{\nu+1}(k_ca)}{J_\nu(k_ca)} = h \frac{K_{\nu+1}(ha)}{K_\nu(ha)}, \quad (3.192)$$

$$k_c \frac{J_{\nu-1}(k_ca)}{J_\nu(k_ca)} = h \frac{K_{\nu-1}(ha)}{K_\nu(ha)}. \quad (3.193)$$

Para obtenção das relações de recorrência para os modos LP , x -polarizados, tem-se o seguinte:

$$E_{z1}(r = a) = E_{z2}(r = a), \quad (3.194)$$

$$i \frac{k_c A}{\beta} \frac{1}{2} \left[J_{\nu+1}(k_c a) e^{i(\nu+1)\theta} - J_{\nu-1}(k_c a) e^{i(\nu-1)\theta} \right] = i \frac{h B}{\beta} \frac{1}{2} \left[K_{\nu+1}(h a) e^{i(\nu+1)\theta} + K_{\nu-1}(h a) e^{i(\nu-1)\theta} \right], \quad (3.195)$$

$$\left[i \frac{k_c A}{\beta} \frac{1}{2} J_{\nu+1}(k_c a) - i \frac{h B}{\beta} \frac{1}{2} K_{\nu+1}(h a) \right] e^{i(\nu+1)\theta} - \left[i \frac{k_c A}{\beta} \frac{1}{2} J_{\nu-1}(k_c a) - i \frac{h B}{\beta} \frac{1}{2} K_{\nu-1}(h a) \right] e^{i(\nu-1)\theta} = 0. \quad (3.196)$$

Os coeficientes que multiplicam $e^{i(\nu+1)\theta}$ no conjunto de equações imediatamente acima são nulos, e $e^{i(\nu+1)\theta}$ formam um conjunto linearmente independentes:

$$i \frac{k_c A}{\beta} \frac{1}{2} J_{\nu+1}(k_c a) - i \frac{h B}{\beta} \frac{1}{2} K_{\nu+1}(h a) = 0, \quad (3.197)$$

$$k_c A J_{\nu+1}(k_c a) = h B K_{\nu+1}(h a). \quad (3.198)$$

A segunda equação gera :

$$k_c A J_{\nu-1}(k_c a) = h B K_{\nu-1}(h a). \quad (3.199)$$

No entanto:

$$B = \frac{J_{\nu}(k_c a)}{K_{\nu}(h a)} A. \quad (3.200)$$

Então, resulta em:

$$k_c \frac{J_{\nu+1}(k_c a)}{J_{\nu}(k_c a)} = h \frac{K_{\nu+1}(h a)}{K_{\nu}(h a)}, \quad (3.201)$$

e, também, obtém-se a equação característica para os modos linearmente polarizados:

$$k_c \frac{J_{\nu-1}(k_c a)}{J_{\nu}(k_c a)} = -h \frac{K_{\nu-1}(h a)}{K_{\nu}(h a)}. \quad (3.202)$$

3.4 Fluxo e Densidade de Potência

O vetor de Poynting ao longo da direção do guia óptico é dado por (OKAMOTO, 2006)

$$S_z(r, \theta) = \frac{1}{2} \Re [E_x H_y^* - E_y H_x^*]. \quad (3.203)$$

Substituindo as equações (3.158) e (3.169) para $r < a$ e as equações (3.170) e (3.174), obtém-se o seguinte resultado:

$$S_z(r, \theta) = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} |A|^2 J_{\nu}^2(k_c r) \quad r < a, \quad (3.204)$$

$$S_z(r, \theta) = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} |B|^2 K_{\nu}^2(h r) \quad r > a. \quad (3.205)$$

A quantidade de potência no núcleo (P_n) e no revestimento (P_r) é calculada por:

$$P_n = \oint_s S_z ds = \int_0^{2\pi} \int_0^a S_z r dr d\theta, \quad (3.206)$$

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S_z r dr d\theta. \quad (3.207)$$

Para integrar $\int_0^a J_\nu(k_c r) r dr$, pode-se utilizar a relação

$$\int_0^a r J_\nu^2(k_c r) dr = \frac{a^2}{2} [J_\nu^2(k_c a) - J_{\nu-1}(k_c a) J_{\nu+1}(k_c a)], \quad (3.208)$$

e para o revestimento

$$\int_0^{\infty} r K_\nu^2(hr) dr = \frac{a^2}{2} [-K_\nu^2(ha) + K_{\nu-1}(ha) K_{\nu+1}(ha)]. \quad (3.209)$$

Portanto, substituindo estas integrais (3.208) e (3.209), respectivamente, em (3.206) e (3.207), obtém-se o seguinte resultado:

$$P_n = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \pi a^2 |A|^2 [J_\nu^2(k_c a) - J_{\nu-1}(k_c a) J_{\nu+1}(k_c a)], \quad (3.210)$$

$$P_r = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \pi a^2 |A|^2 [-K_\nu^2(ha) + K_{\nu-1}(ha) K_{\nu+1}(ha)], \quad (3.211)$$

ou ainda

$$P_r = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \pi a^2 |A|^2 \left[-J_\nu^2(k_c a) - \left(\frac{k_c}{h} \right)^2 J_{\nu-1}(k_c a) J_{\nu+1}(k_c a) \right]. \quad (3.212)$$

O fluxo total de potência P_t é dado pela soma de P_n com P_r , ou seja

$$P_t = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \pi a^2 |A|^2 \left[-J_\nu^2(k_c a) - \left(\frac{k_c}{h} \right)^2 J_{\nu-1}(k_c a) J_{\nu+1}(k_c a) \right]. \quad (3.213)$$

A grandeza $\Gamma_2 = P_r/P_t$ mede a fração da potência modal que flui no revestimento da fibra óptica. Γ_2 é descrita pela relação

$$\Gamma_2 = \frac{1}{V^2} \left[(k_c a)^2 + \frac{(ha)^2 J_\nu^2(k_c a)}{J_{\nu-1}(k_c a) J_{\nu+1}(k_c a)} \right], \quad (3.214)$$

onde V é a frequência normalizada ou o número V da fibra óptica, expressa por

$$V^2 = (ha)^2 + (k_c a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 + n_2^2). \quad (3.215)$$

3.5 Carta dos Modos Linearmente Polarizados

A equação característica para os modos LP , (3.202), foi utilizada na obtenção das constantes de propagação radiais dos modos propagantes no núcleo da fibra óptica empregada nesta análise. Tomando alguns parâmetros de projeto como o comprimento de onda da radiação de sinal, a abertura numérica e o raio do núcleo da fibra, foi calculado o parâmetro V da fibra, sendo este de fundamental importância para encontrar as soluções da equação característica.

Nesse contexto, foi utilizado o método gráfico e, com o auxílio do MATLAB, foram obtidas as curvas das equações características. Foi observada a existência de solução em apenas três situações, e nas demais os gráficos não se interceptam (J^- e K^-). As soluções encontradas são as constantes radiais do núcleo para os modos LP_{01} ($k_{ca} = 1,92$), o LP_{02} ($k_{ca} = 4,01$) e o LP_{11} ($k_{ca} = 3,15$), e os modos de ordem superior ao modo LP_{02} não se propagam nessa fibra. As Figs. 4 e 5 apresentam as soluções gráficas utilizadas. Em especial, pode-se observar na Fig. 5 que os gráficos não se interceptam.

Figura 4 – (a) Perfil da relação de dispersão para os modos LP_{01} e LP_{02} (b) Perfil da relação de dispersão para o modo LP_{11}

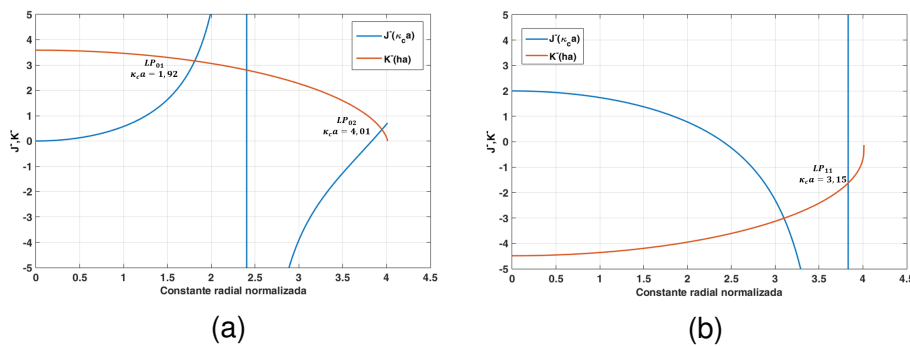
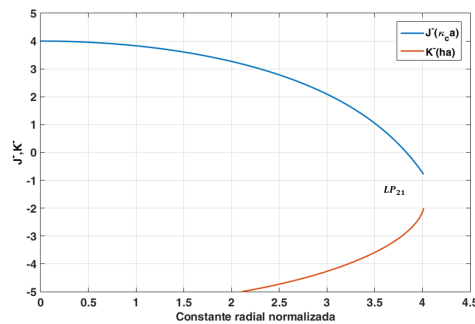
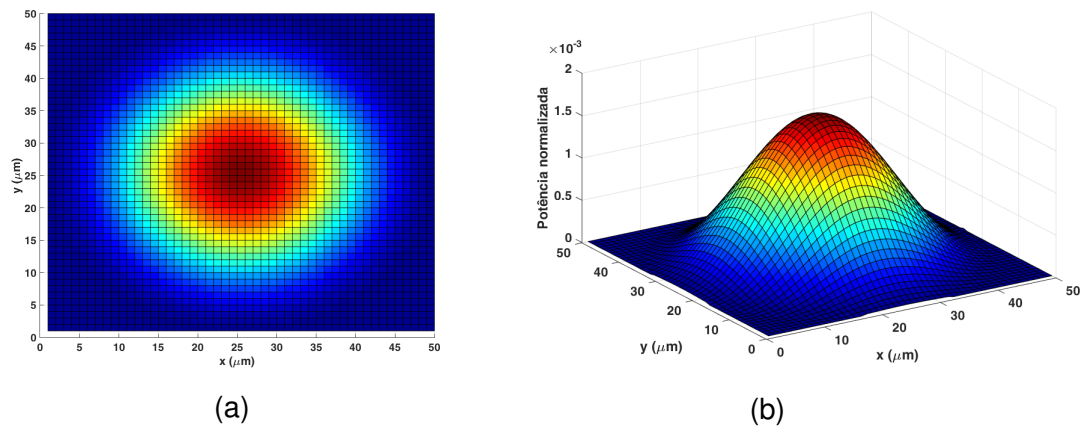


Figura 5 – Perfil da relação de dispersão para o modo LP_{21}



Obtidas as constantes, podemos determinar completamente os campos modais que se propagam na fibra. A Fig. 6a mostra a distribuição transversal da potência do modo LP_{01} na fibra óptica e na Fig. 6b pode-se observar sua curva de nível.

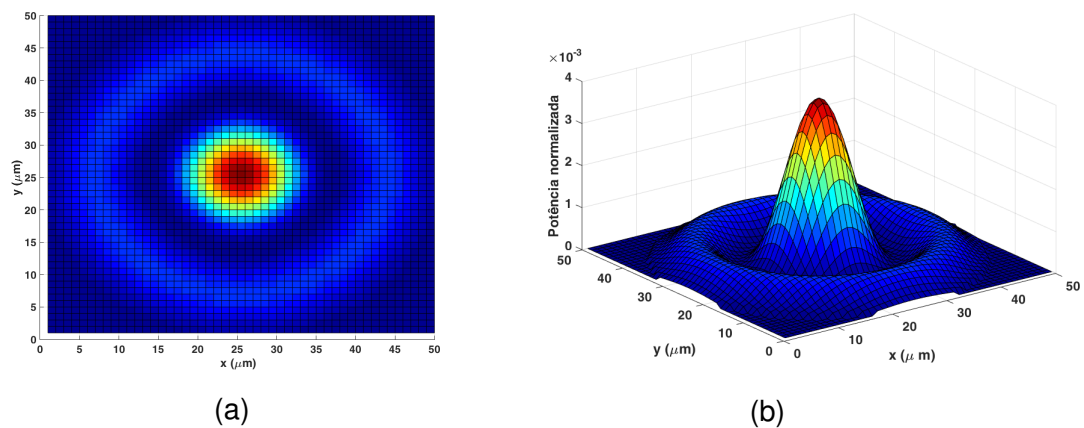
Figura 6 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{01} (b) Curva de nível do modo LP_{01}



Fonte: autor da dissertação.

De modo semelhante, as figuras 7a e 7b apresentam a distribuição de potência do modo LP_{02} .

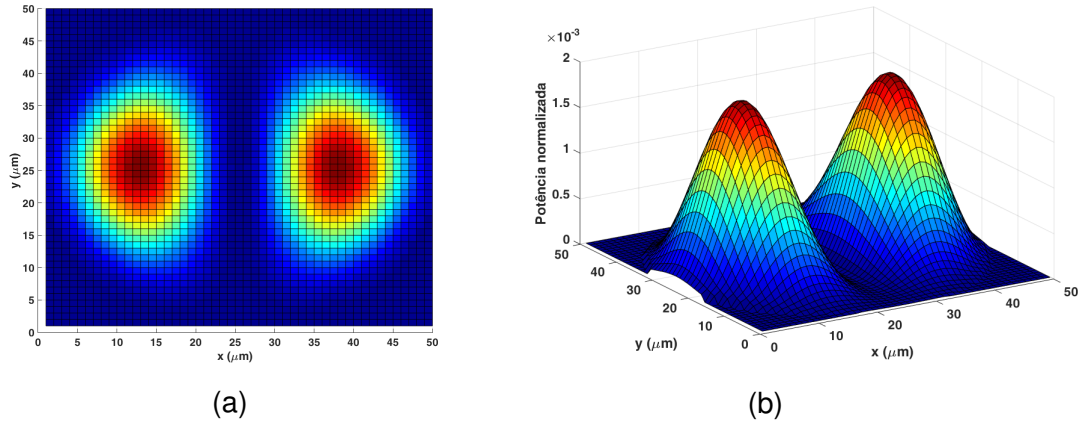
Figura 7 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{02} (b) Curva de nível do modo LP_{02}



Fonte: autor da dissertação.

Por fim, as figuras 8a e 8b apresentam a distribuição de potência do modo LP_{11} .

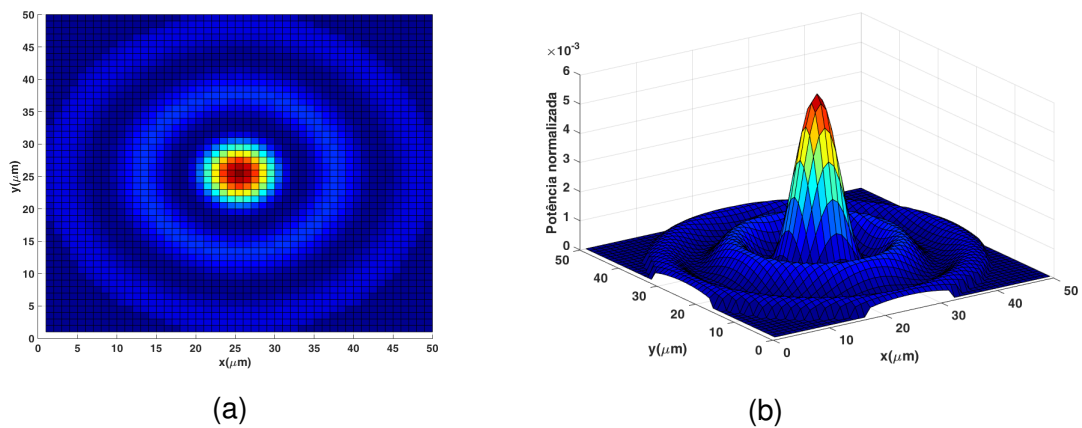
Figura 8 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{11} (b) Curva de nível do modo LP_{11}



Fonte: autor da dissertação.

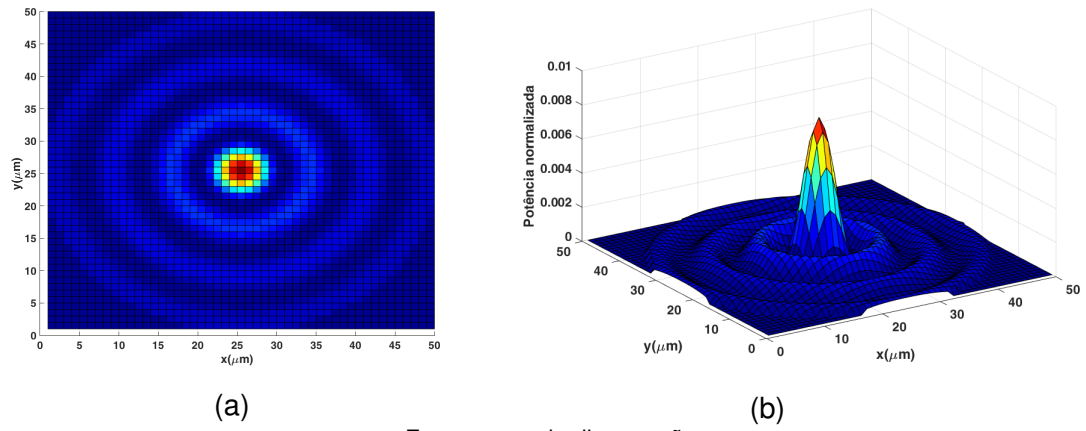
As figuras 9 a 13 mostram, ao pares, a distribuição transversal e a curva de nível para alguns modos que não se propagam na fibra em questão.

Figura 9 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{03} (b) Curva de nível do modo LP_{03}



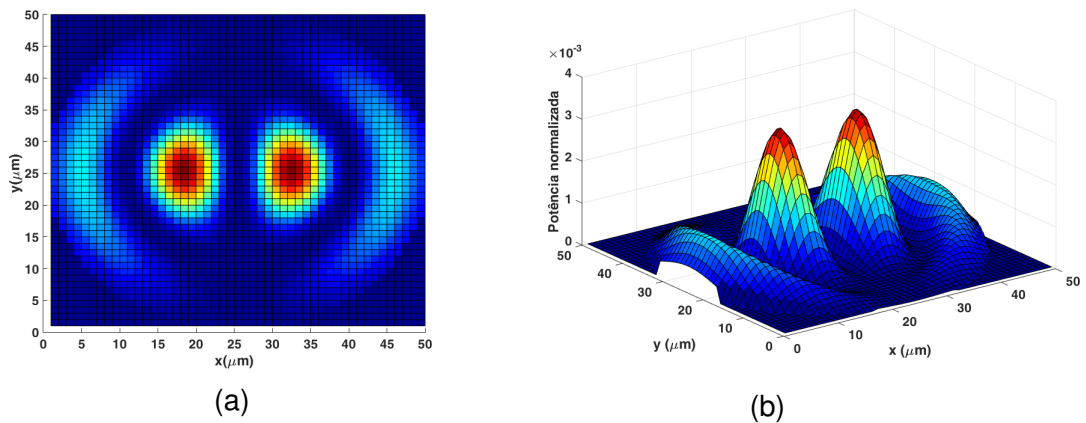
Fonte: autor da dissertação.

Figura 10 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{04} (b) Curva de nível do modo LP_{04}



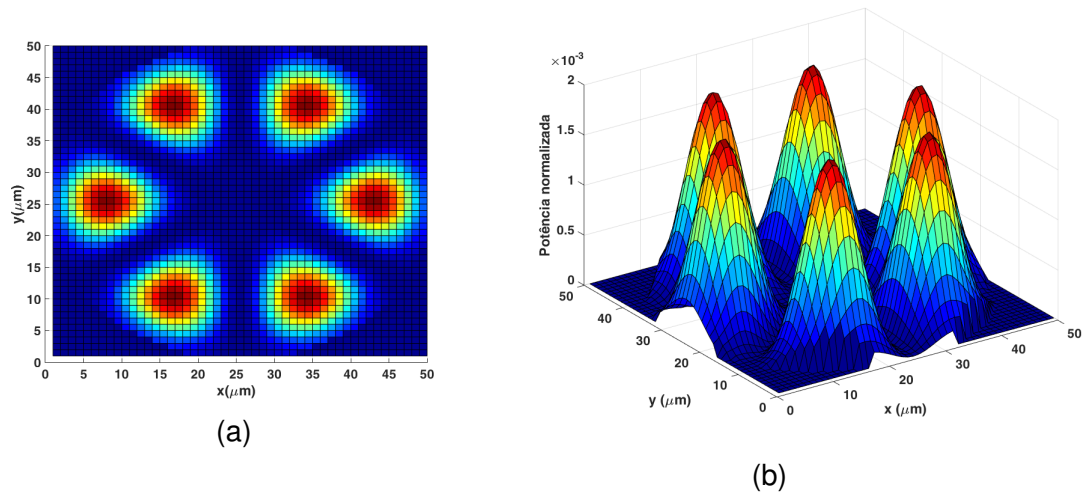
Fonte: autor da dissertação.

Figura 11 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{12} (b) Curva de nível do modo LP_{12}



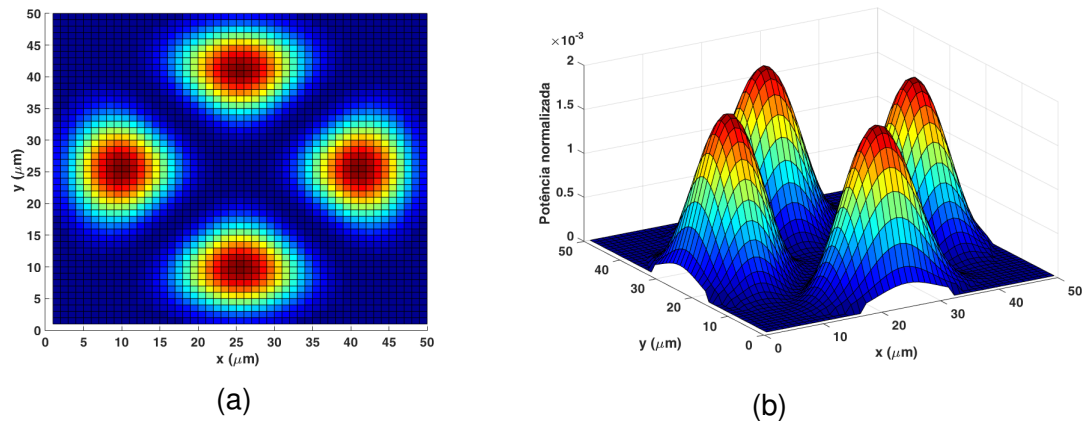
Fonte: autor da dissertação.

Figura 12 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{13} (b) Curva de nível do modo LP_{13}



Fonte: autor da dissertação.

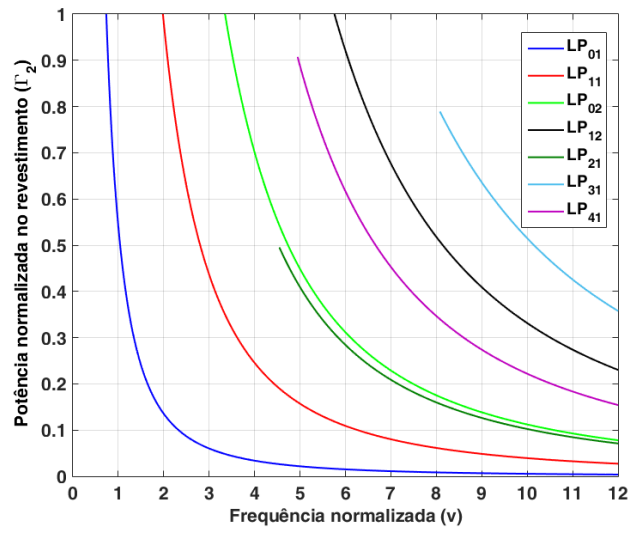
Figura 13 – (a) Distribuição transversal da potência do modo LP_{21} (b) Curva de nível do modo LP_{21}



Fonte: autor da dissertação.

A Fig. 14 mostra a relação $\Gamma_2 = P_r/P$ para alguns modos LP como função do número V da fibra óptica. A figura permite observar que a potência de cada modo está concentrada no núcleo da fibra. No entanto, a medida que os modos se aproximam das suas respectivas constantes de corte, a potência dos modos de baixa ordem ($\nu = 0, 1$) recua para o revestimento, enquanto os modos com $\nu \geq 2$ mantêm uma relação fixa de $(\nu - 1)$ entre a potência no núcleo e do revestimento no corte. O modo LP_{01} é o único que transporta a maior parte da potência no revestimento da fibra por uma maior distância.

Figura 14 – Fração da potência modal



Fonte: autor da dissertação.

3.6 Conclusão do Capítulo

A condição para a propagação da radiação eletromagnética no interior da estrutura da fibra ótica de revestimento duplo foi apresentada neste capítulo. Observou-se que, para garantir essa propagação, é necessário que o índice de refração do núcleo seja maior que o índice de refração do revestimento da fibra ótica.

4 DESCRIÇÃO QUANTITATIVA DO OSCILADOR LASER ATRAVÉS DO MODELO DA SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA COMPLEXA

4.1 Introdução ao Capítulo

A relação entre a polarização induzida $P(t)$ e o campo externo $\vec{E}(t)$ é descrita pela susceptibilidade atômica $\chi(\omega)$. A susceptibilidade atômica depende das propriedades do átomo ou molécula, bem como das características do campo externo, como a sua intensidade, frequência e polarização. Através dessa relação, é possível entender como o campo externo influencia a polarização do sistema laser de três níveis e, conseqüentemente, o comportamento do laser.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Seção 4.2, onde relaciona-se o ganho e índice de refração para o sistema de três níveis de energia e o desenvolvimento da solução para o campo elétrico; Seção 4.3, onde é apresentado o conceito do íon de itérbio; e nas Seções 4.4 a 4.11 são realizadas, respectivamente, as seguintes abordagens: os processos de absorção atômica, emissão espontânea e estimulada segundo o tratamento de Einstein, o princípio do laser, desempenho do laser, descrição do oscilador laser utilizando as equações de taxa, determinação do comprimento ótimo do oscilador laser, o modelamento do mecanismo de transferência de calor no oscilador laser e os efeitos não-lineares no oscilador laser.

4.2 Ganho e Índice de Refração para o Sistema de Três níveis de Energia

Nesta seção, será apresentado o desenvolvimento teórico do ganho e do índice de refração de um sistema laser de três níveis de energia. Em sistemas laser de três níveis, diferentes níveis de energia são explorados para alcançar a inversão de população necessária para a amplificação da luz. O ganho, como medida da intensificação do sinal óptico, desempenha um papel crucial no desempenho e na eficiência laser. Além disso, o índice de refração influencia a velocidade e a trajetória da luz dentro do meio amplificador, tendo um impacto direto na propagação do feixe laser. Nesta seção, serão explorados em detalhes os aspectos teóricos e práticos relacionados ao ganho e ao índice de refração em sistemas de três níveis. Ao compreender essas propriedades, pode-se avançar no projeto e no desenvolvimento de lasers mais eficientes e adaptáveis para diversas aplicações na área da física do laser.

4.2.1 Desenvolvimento da solução para o campo elétrico

Consideremos uma onda se propagando na direção $z > 0$, linearmente polarizada na direção \hat{a}_x , confinada em uma envoltória, cuja dependência radial é descrita pela função $f(r)$, que corresponde ao modo fundamental de uma fibra óptica.

O campo elétrico ao se propagar ao longo da fibra óptica irá polarizar a matriz dielétrica. A polarização induzida pelo meio dielétrico pode ser descrita por sua susceptibilidade elétrica χ_H , de forma que

$$\mathcal{P}_H(r, z, t) = \chi_H E(r, z, t) = \varepsilon_0 (n^2 - 1) E(r, z, t), \quad (4.1)$$

onde $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0$ é o índice de refração do núcleo da fibra óptica onde o campo ficará concentrado.

Consideremos agora a polarização $\mathcal{P}_A(r, z, t)$ induzida pelos íons de itérbio que dopam a fibra.

Devido à dispersão, a polarização $\mathcal{P}_A(r, z, t)$ se relaciona com o campo elétrico segundo

$$\mathcal{P}_A(r, z, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi_A(\tau) E(r, z, t - \tau) d\tau. \quad (4.2)$$

A equação de onda devida à polarização:

$$\mathcal{P}_t(r, z, t) = \mathcal{P}_H(r, z, t) + \mathcal{P}_A(r, z, t). \quad (4.3)$$

é descrita por

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_t}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_H}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_A}{\partial t^2}, \quad (4.4)$$

Substituindo (4.1) em (4.4), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_A}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Para o desenvolvimento da solução de (4.5) deve-se considerar

$$E(r, z, t) = \Re_e \left[E_0 f(r) g(z, t) e^{i(\omega\tau - \beta z)} \right]. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) no lado esquerdo de (4.5) e efetuando as derivadas,

$$E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \left\{ g(z, t) \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + f(r) \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - i2\beta \frac{\partial g}{\partial z} - \beta^2 g \right) - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + i2\omega \frac{\partial g}{\partial t} - \omega^2 g \right) \right] \right\}, \quad (4.7)$$

que sob a hipótese de que a amplitude $g(z, t)$ varia lentamente, quando comparada com a onda portadora $e^{i(\omega t - \beta z)}$, justifica as desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right| &\ll \left| \beta \frac{\partial g}{\partial z} \right| \\ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right| &\ll \left| \omega \frac{\partial g}{\partial t} \right| \\ \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| &\ll |\beta g| \\ \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| &\ll |\omega g| \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sob estas condições (4.7) passa a ser escrita

$$E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \left\{ g(z, t) \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + f(r) \left[2i\omega \left(\frac{\beta}{\omega} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial g}{\partial t} \right) \right] \right\}. \quad (4.9)$$

Consideremos que $f(r) = 1$, isto é, o campo elétrico não depende das coordenadas transversais, e nestas condições (4.9), passa a ser escrita, com $\beta = n\omega/c$:

$$E_0 e^{i(\omega t - \frac{n\omega z}{c})} \left[2i \frac{\omega}{v} \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial t} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Desenvolvendo agora o lado direito de (4.5):

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) E(z, t - \tau) d\tau &= \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) E_0 g(z, t - \tau) e^{i\omega(\tau - \frac{z}{v})} d\tau \\ &= \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) g(z, t - \tau) e^{i\omega[(t-\tau) - \frac{z}{v}]} d\tau E_0 \\ &= \mu_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) g(z, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega z}{v}} E_0 \\ &= E_0 e^{-i\frac{\omega z}{v}} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty \chi(\tau) g(z, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

o termo $E_0 e^{-i\frac{\omega z}{v}}$ pode ser cancelado em ambos os lados de (4.10) e (4.11)

$$2 \frac{i\omega}{v} e^{i\omega t} \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial t} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty \chi(\tau) g(z, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t}, \quad (4.12)$$

multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt$ em ambos os lados, e integrando no intervalo $(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial t} \right) e^{i\omega t} dt = \frac{dg(z, \omega)}{dz} - \frac{i\omega}{v} g(z, \omega). \quad (4.13)$$

No lado direito

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty \chi(\tau) g(z, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} dt = -\omega^2 \chi(\omega) g(z, \omega), \quad (4.14)$$

que resulta em

$$\frac{dg}{dz} - \frac{i\omega}{v} g = \frac{iv}{2\omega} (-\omega^2) \chi(\omega) g, \quad (4.15)$$

ou ainda

$$\frac{dg}{dz} = \frac{i\omega}{2v} \chi(\omega) g, \quad (4.16)$$

mas $\chi(\omega) = \chi' - i\chi''$, então

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{\omega}{2v} (\chi'' + i\chi') g. \quad (4.17)$$

A Equação (4.17) pode ser integrada em $z \in [0, L]$,

$$\frac{dg}{g} = -\frac{\omega}{2v} (\chi'' + i\chi') dz, \quad (4.18)$$

$$\ln g|_0^L = -\frac{\omega}{2v} \int_0^L (\chi'' + i\chi') dz, \quad (4.19)$$

$$g(\omega) = e^{-\frac{\omega}{2v} \int_0^L (\chi'' + i\chi') dz}, \quad (4.20)$$

$$g(z, \omega) = e^{-\frac{\omega}{2v} \int_0^L \chi''(z, \omega) dz} e^{\frac{i\omega}{2v} \int_0^L \chi'(z, \omega) dz}. \quad (4.21)$$

O campo elétrico pode ser escrito na forma

$$E(z, \omega) = E_0 e^{-\frac{\omega}{2v} \int_0^L \chi''(z, \omega) dz} e^{\frac{i\omega}{2v} \int_0^L \chi'(z, \omega) dz} e^{i(\omega t - \frac{\omega z}{v})}. \quad (4.22)$$

O ganho pode ser escrito como (DESURVIRE, 1995)

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega}{2v} \int_0^L \chi''(z, \omega) dz}, \quad (4.23)$$

e a mudança no índice de refração $\delta n(\omega)$ (DESURVIRE, 1995)

$$\delta n(\omega) = \frac{1}{2nL} \int_0^L \chi'(z, \omega) dz, \quad (4.24)$$

que pode ser escrita como

$$e^{-i\delta n \frac{\omega L}{c}} = e^{-i\frac{\omega L}{c} \delta n(\omega)} = e^{-i\frac{\omega L}{c} \frac{1}{2nL} \int_0^L \chi'(z, \omega) dz}, \quad (4.25)$$

$$e^{-i\delta n(\frac{\omega L}{c})} = e^{-i\frac{\omega}{c} \int_0^L \chi'(z, \omega) dz}, \quad (4.26)$$

onde n é o índice de refração a fibra sem o dopante.

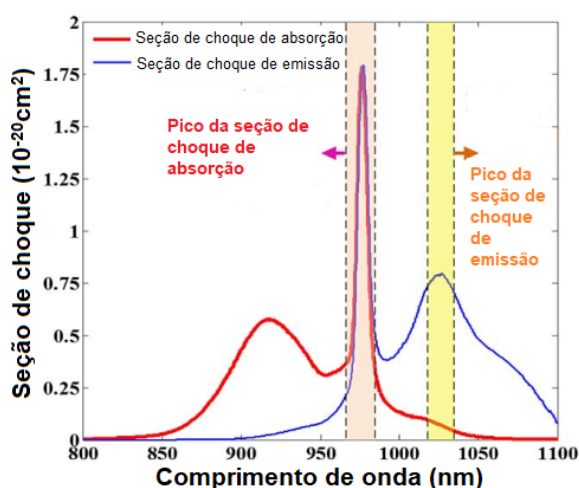
4.3 O Íon de Itérbio

Como um íon ativo em lasers de estado sólido, como em cristais e em vidros com a sílica, o Yb^{+3} oferece várias vantagens em comparação com os tradicionais íons de Neodímio (Nd^{+3}). Essas vantagens incluem um tempo de vida mais longo no estado superior de energia, um menor defeito quântico (que resulta em menor carga térmica por unidade de potência do bombeamento), ausência da absorção do estado excitado e de perdas por conversão ascendente devido a um diagrama mais simples de níveis de energia (DONG; BASS; WALTERS, 2004).

A sílica dopada com Yb^{+3} tem bandas de absorção intensas e amplas perto de 915 e 976 nm, que são adequadas para bombeamento utilizando laser de diodo, como aqueles de InGaAs. Além disso, a sílica dopada com Yb^{+3} possui bandas de emissão largas e suficientemente intensas na faixa espectral entre 950 e 1.200 nm. O tempo de vida do estado excitado à temperatura ambiente é em torno de 1 ms. Devido às largas linhas de emissão, a sílica dopada com Yb^{+3} (em particular, lasers de fibra) demonstra ação de laser sintonizável em uma ampla faixa espectral, de 980 a mais que 1.150 nm (JACQUIER, 1997), (TER-MIKIRTYCHEV, 2014).

Os espectros de absorção e emissão de uma matriz de sílica dopada com Yb^{+3} são mostrados na Fig. 15.

Figura 15 – Seções de choque de absorção e de emissão do Yb^{+3} em sílica.



Fonte: Yan et al. (2017)

Existem dois picos principais de absorção de Yb^{+3} na sílica, em 915 e 976 nm, que correspondem à transição do subnível Stark mais baixo do estado fundamental $^2F_{7/2}$ para o segundo e o primeiro (o mais baixo) subnível Stark do $^2F_{5/2}$, respectivamente (Fig.

15) (PASK et al., 1995), (PASCHOTTA et al., 1997). Pode-se visualizar que a sílica dopada com Yb^{+3} é um laser de quase três níveis à temperatura ambiente. Foi por este motivo que utilizou-se um sistema atômico de três níveis, para a construção da susceptibilidade complexa do Capítulo 2.

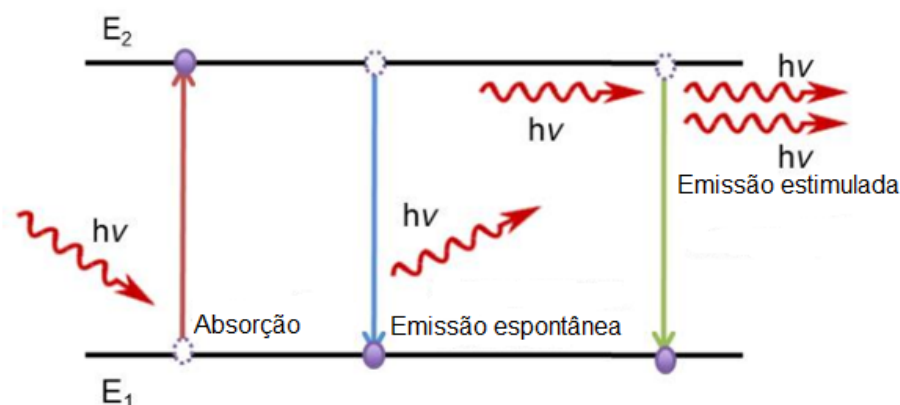
Robinson e Fournier (ROBINSON; FOURNIER, 1970) determinaram a intensidade dos osciladores de íons Yb^{+3} em vários vidros a partir de espectros de absorção à temperatura ambiente. Eles descobriram que os espectros de Yb^{+3} (exceto para a largura da linha) são quase idênticos, incluindo intensidades relativas das bandas. Os autores concluíram, portanto, que os íons Yb^{+3} residem em locais semelhantes nesses três tipos de vidro (ou seja, silicato, germanato e fosfato).

4.4 Os Processos de Absorção Atômica, Emissão Espontânea e Estimulada Segundo o Tratamento de Einstein

De acordo com a hipótese de Einstein existem três processos envolvidos na formação de linhas espectrais, que são a absorção, a emissão espontânea e a emissão estimulada. Para quantificar esses três processos, Einstein introduziu três coeficientes, que desde então são conhecidos como coeficientes de Einstein. Esses coeficientes podem ser derivados seguindo vagamente a derivação original de Einstein obtida simplesmente considerando um material ideal com apenas dois níveis de energia não-degenerados E_1 e E_2 com populações iônicas N_1 e N_2 , respectivamente. Como existem apenas dois níveis de energia, a população total deste sistema permanecerá constante e será a soma de N_1 e N_2 (EICHHORN, 2014) (MEYER; SOMPO; SOLMS, 2022).

A transferência de energia radiativa entre um sistema laser de dois níveis é permitida se a variação de energia for igual a $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu_{21}$. Três cenários diferentes de troca de energia podem ocorrer neste sistema. No primeiro cenário, o átomo pode emitir um fóton ao decair do nível de energia E_2 para o nível de energia E_1 . No segundo cenário, o sistema pode absorver um fóton e ser promovido a um nível de energia mais alto. No entanto, deve-se atentar para o fato de que a emissão de um fóton, portanto, a perda de energia, pode ser espontânea ou estimulada. Portanto, a interação entre luz e matéria pode ser de três tipos, como ilustrada na Fig. 16: absorção, emissão espontânea e emissão estimulada (SVELTO; HANNA, 1998).

Figura 16 – Esquema de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada em um sistema de dois níveis.



Fonte: Durairaj et al. (2013)

4.4.1 Absorção

A absorção ocorre quando um fóton incidente de energia $E = h\nu$ (onde ν é a frequência do fóton e h é a constante de Planck) é absorvido por um átomo ou íon. Ao absorver o fóton, o íon ou átomo ganha energia e um elétron é promovido a um nível de energia mais alto. Se uma onda eletromagnética quase-monocromática feita de muitos fótons de frequência ν_{21} se propaga em um material feito de múltiplos átomos com N_1 e N_2 como populações de níveis de energia mais baixos (inferior) e mais altos (superior) então o nível de energia mais baixo será despovoado a uma taxa proporcional à densidade de radiação $\rho(\nu)$ bem como à sua população N_1 . Isso é dado pela seguinte equação:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = B_{12}\rho(\nu)N_1, \quad (4.27)$$

onde B_{12} é uma constante de proporcionalidade com dimensões $cm^3/s^2 J$.

Fisicamente, o produto $B_{12}\rho(\nu)$ pode ser pensado como a probabilidade de que a transição ocorra.

4.4.2 Emissão espontânea

Consideremos o sistema anterior (Fig. 16), que absorveu energia e tem alguns de seus átomos promovidos ao nível de energia E_2 . Esses átomos, no entanto, não permanecem indefinidamente no estado excitado. Após um certo período de tempo correspondente ao tempo de vida τ_{21} do nível de energia E_2 , os átomos vão relaxar para o nível de energia E_1 liberando a energia acumulada. Esse processo é conhecido como emissão espontânea e sua taxa é proporcional à população do nível E_2 , bem como uma taxa de proporcionalidade

dada pela equação (4.28):

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = A_{21}N_2, \quad (4.28)$$

onde $A_{21} = \frac{1}{\tau_{21}}$ é uma constante de proporcionalidade com dimensão s^{-1} . Fisicamente, a quantidade A_{21} expressa a probabilidade de um átomo relaxar para o estado de energia mais baixo dentro de um determinado período de tempo. Esta quantidade depende fortemente dos dois níveis de energia envolvidos na transição.

A emissão espontânea é um processo aleatório e, portanto, é caracterizada por uma total ausência de fase entre os fótons emitidos. Em outras palavras, a radiação eletromagnética emitida é incoerente. Resolvendo a equação (4.28) encontraremos:

$$N_2(t) = N_2(0)e^{(-t/\tau_{21})}. \quad (4.29)$$

4.4.3 Emissão estimulada

Se um sistema atômico com vários átomos excitados para um nível de energia superior sofre a ação de radiação eletromagnética de frequência apropriada (que corresponde à diferença de energia entre os dois níveis de energia envolvidos na transição), seus átomos excitados decairão para o nível de energia inferior E_1 , liberando fótons com a mesma frequência e fase dos fótons incidentes. Este processo é conhecido como emissão estimulada definida pela equação (4.30).

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -B_{21}\rho(\nu_{21})N_2, \quad (4.30)$$

onde B_{21} é uma constante de proporcionalidade. Ao contrário do caso de emissão espontânea, esta constante de proporcionalidade depende de N_2 , a população do nível de energia superior envolvida na transição, bem como da radiação incidente. É fácil entender que a radiação total emitida é composta de contribuições de emissão espontânea e estimulada. O parâmetro benéfico para a operação do amplificador e do laser é o coeficiente B_{21} , enquanto o coeficiente A_{21} é prejudicial porque representa um termo de perda. O parâmetro de emissão espontânea representa uma fonte de ruído tanto para amplificadores quanto para lasers.

4.4.4 Seção de choque

A seção de choque de um íon é um parâmetro importante, pois quantifica a capacidade do íon de absorver ou emitir fótons. Matematicamente, a seção de choque de uma transição de absorção ou emissão pode ser entendida como a probabilidade dessa transição ocorrer. Mais precisamente, se uma transição envolvendo dois níveis de energia E_2 e E_1 ,

com $E_2 > E_1$, está ocorrendo, a probabilidade dessa transição será diretamente proporcional à seção de choque de absorção ou emissão dependendo da direção da transição. A seção de choque tem dimensão de área. Para um determinado sistema de dois níveis como o representado na Fig. 16, onde os níveis de energia são E_2 e E_1 para os níveis 2 e 1 respectivamente, pode-se mostrar que a probabilidade de transição para a emissão ou absorção de um fóton com energia $h\nu = E_2 - E_1$ é diretamente proporcional à seção de choque de absorção ou emissão (σ_{12} e σ_{21}), bem como à intensidade da luz incidente (MEYER; SOMPO; SOLMS, 2022).

Todos os amplificadores de fibra dopada com terras raras intensificam a luz do sinal da semente (seed) através da emissão estimulada. As equações de taxa local descrevem a dinâmica dos processos de emissão e absorção de íons de dopagem dentro de seu material hospedeiro, fazendo uso de sua estrutura de energia atômica bem como propriedades espectroscópicas (EILCHI; PARVIN, 2016). A relação entre as seções de choque de emissão e absorção pode ser determinada usando a teoria de McCumber, que satisfaz a seguinte fórmula (MCCUMBER, 1964):

$$\sigma_e(\nu) = \sigma_a(\nu) \exp\left[\frac{\varepsilon(T) - h\nu}{K_B T}\right], \quad (4.31)$$

onde $\sigma_a(\nu)$ e $\sigma_e(\nu)$ são as seções de choque de absorção e emissão, e K_B e T representam a constante de Boltzmann e a temperatura absoluta em Kelvin, respectivamente.

Além disso, $\varepsilon(T)$ mostra a energia média de transição entre duas variedades na temperatura T . Esta quantidade, que depende da temperatura, mas não da frequência óptica, pode ser calculada a partir das energias dos níveis únicos de Stark (EILCHI; PARVIN, 2016).

De maneira geral, a teoria de McCumber é uma ferramenta poderosa nas mãos dos pesquisadores para calcular parâmetros espectroscópicos essenciais de centros ópticos ativos a lasers, sendo amplamente empregada no campo da física de laser. Uma fórmula adicional é fornecida pela análise de McCumber, que relaciona o tempo de vida radiativo e a seção de choque de emissão (4.32) (EILCHI; PARVIN, 2016):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{8\pi n^2}{c^2} \int \nu^2 \sigma_e(\nu) d\nu, \quad (4.32)$$

onde, τ indica o tempo de vida do nível de estado excitado dos íons do dopante, n é o índice de refração do meio de ganho e c denota a velocidade da luz no vácuo.

4.5 Defeito quântico no fenômeno laser

Existem várias vantagens do meio ativo dopado com Yb^{+3} . Uma das vantagens mais importantes é que apenas um nível do estado excitado é composto por transições laser. Comparando com outros íons materiais de terras raras, o Yb^{+3} tem menor largura de banda de energia entre os estados fundamental e excitado, levando a defeitos quânticos pequenos. Geralmente, o comprimento de onda dos fótons laser é maior que o dos fótons do bombeamento, o que significa que a energia dos fótons laser é menor que a dos fótons do bombeamento. É o chamado deslocamento de Stokes. O defeito quântico pode ser explicado como a diferença de energias (q) dos fótons que é dada na equação (4.33) (PONSODA et al., 2013):

$$q = h\nu_p - h\nu_s = h\nu_p \left(1 - \frac{h\nu_s}{h\nu_p}\right) = h\nu_p \left(1 - \frac{\lambda_p}{\lambda_s}\right). \quad (4.33)$$

Também é frequentemente especificado como uma porcentagem da energia do fóton do bombeamento, efetivamente usando apenas os parênteses na equação acima (4.33), ou seja (DRAGIC; CAVILLON; BALLATO, 2018):

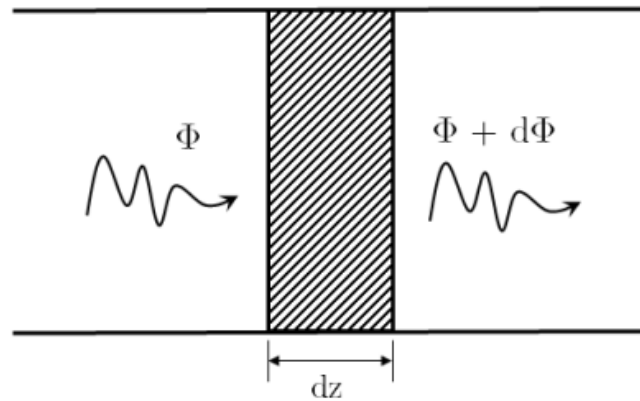
$$QD = 1 - \frac{\lambda_p}{\lambda_s}. \quad (4.34)$$

Em qualquer caso, estabelece um limite inferior para a perda na conversão da potência do bombeamento para a potência do laser, ou seja, um limite superior para a eficiência energética. O meio ativo dopado com Yb^{+3} tem um pequeno defeito quântico, em outras palavras, tem uma pequena porcentagem da energia do fóton do bombeamento, de modo que os dispositivos a laser dopado com Yb^{+3} têm maior eficiência de energia e baixa geração de calor. Neste trabalho o $QD = 4,13\%$.

4.6 O Princípio do Laser

Com relação ao fenômeno do laser e, em termos de fótons, os processos que governam um laser podem ser brevemente caracterizados da seguinte forma (Fig. 17): Durante a emissão espontânea, o átomo transita do nível 2 para o nível 1 liberando um fóton no processo e durante o processo estimulado, o fóton incidente estimula a transição do nível 2 para o nível 1 liberando um fóton de adição ao fóton incidente. Quanto à absorção, o fóton incidente é absorvido, excitando assim o átomo, que transita do nível 1 para o nível 2. Finalmente, $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Isso mostra que as probabilidades de emissão estimulada e absorção são iguais, como previsto por Einstein.

Figura 17 – Variação infinitesimal $d\Phi$ no fluxo de fótons Φ para uma onda eletromagnética percorrendo uma distância dz através do material.



Fonte: Svelto e Hanna (1998)

Agora, consideremos um material com níveis de energia E_1 e E_2 e sejam N_1 e N_2 as populações atômicas dos níveis E_1 e E_2 , respectivamente. Sendo os níveis de energia considerados não degenerados. Supondo que uma onda eletromagnética com uma intensidade caracterizada por seu fluxo de fótons Φ se propague ao longo da direção z no material. A mudança infinitesimal deste fluxo considerando a contribuição de ambos os processos de emissão e absorção estimulada (região hachurada (dz) da figura 17), pode ser descrita como:

$$d\Phi = \sigma\Phi(N_2 - N_1)dz. \quad (4.35)$$

A Equação (4.35) explica o comportamento do material em condições normais e excitadas, ou seja, quando $N_2 < N_1$, o material se comporta como um absorvedor (condição normal), e quando $N_2 > N_1$ o material se comporta como um amplificador (condição excitada). No caso de equilíbrio térmico, o comportamento do material é caracterizado pela estatística de Boltzmann. Então, se N_2^{eq} , N_1^{eq} representam as populações do nível E_2 e nível E_1 em equilíbrio térmico, respectivamente, então temos que:

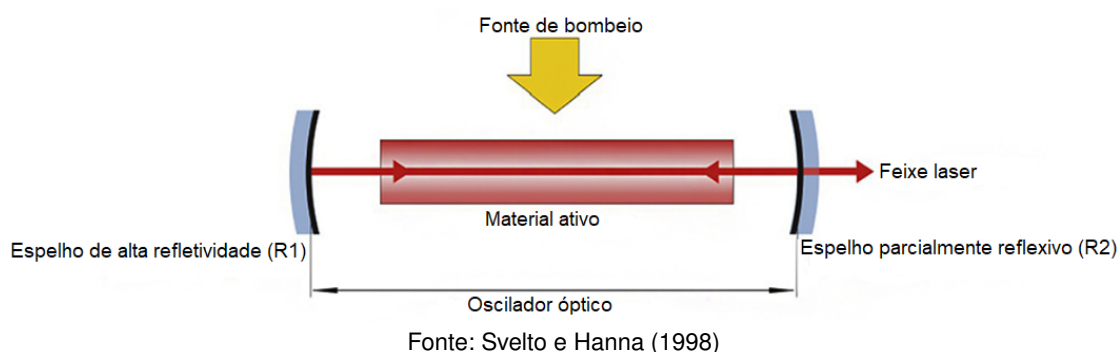
$$\frac{N_2^{eq}}{N_1^{eq}} = e^{\left[-\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)\right]}. \quad (4.36)$$

Nas condições de equilíbrio térmico é observado que $N_2 < N_1$, implicando que o material atua como um absorvedor. No entanto, se uma condição de não equilíbrio, onde $N_2 > N_1$, é estabelecida, então o material atua como um amplificador e a inversão de população atômica é alcançada e a frequência de transição ν é dada como na equação (4.37).

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}. \quad (4.37)$$

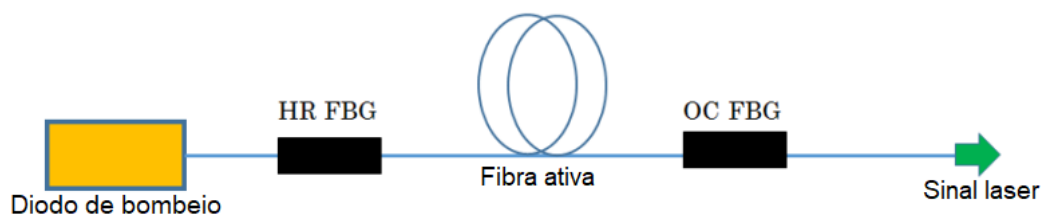
Para obter a oscilação de um amplificador é necessário a introdução de uma realimentação positiva adequada. Isso pode ser realizado situando o meio de ganho (material ativo) entre dois espelhos altamente refletores. Assim, uma onda eletromagnética viajando em uma direção ortogonal aos espelhos saltará para frente (avanço) e para trás (reverso) entre os dois espelhos e pode ser amplificada em cada passagem pelo meio de ganho como ilustrado na Fig. (18), se neste haver inversão de população.

Figura 18 – Esquema genérico de um laser.



Uma maneira de extrair um feixe de laser útil é tornar um dos dois espelhos de alta reflexão parcialmente transparente. No caso de lasers de fibra, o meio ativo é uma fibra ativa. Uma fibra ativa é geralmente uma fibra normal dopada com elementos de terras raras, e a quantidade de dopantes na fibra tem efeitos em sua função. As redes de Bragg em fibra (FBG) funcionam como espelhos (R_1 e R_2 na Fig. 19). Na maioria dos casos, um laser de fibra tem a fibra ativa colocada entre a rede de Bragg altamente refletora (HRFBG) e a parcialmente refletora. A FBG parcialmente refletora também é chamada de acoplador de saída FBG (OCFBG).

Figura 19 – Esquema de um laser de fibra com FBGs como espelhos.



Fonte: Efunbajo (2017)

É importante ressaltar para que a oscilação ocorra, uma certa condição deve ser

alcançada. Por exemplo, em um laser, a oscilação começará quando o ganho do material ativo compensar as perdas no laser (SVELTO; HANNA, 1998). Da equação (4.35), o ganho por passagem no material ativo, ou seja, a razão entre a saída (Φ_o) e o fluxo de fótons de entrada (Φ_i) é descrito por:

$$\frac{\Phi_o}{\Phi_i} = e^{[\sigma(N_2 - N_1)L]}, \quad (4.38)$$

onde L é o comprimento do meio de ganho (ou meio ativo). Assumindo que as únicas perdas presentes na cavidade são as perdas de transmissão, então o limite será alcançado quando

$$R_1 R_2 e^{[\sigma(N_2 - N_1)L]} = 1. \quad (4.39)$$

onde R_1 e R_2 são as refletividades dos dois espelhos (Fig. 18). A partir da equação (4.38) pode-se mostrar que a condição limiar é alcançada quando a inversão de população atinge um valor crítico $(N_2 - N_1)_c$, conhecida como inversão crítica, e é dada por:

$$(N_2 - N_1)_c = -\frac{\ln(R_1 R_2)}{2\sigma L}. \quad (4.40)$$

Após a inversão crítica ser atingida, a oscilação começa a aumentar a partir do processo de emissão espontânea que ocorre na cavidade do laser. A amplificação é então iniciada a partir dos fótons axialmente emitidos espontaneamente na cavidade (PASCHOTTA, 2008). O laser é caracterizado por um grau extremamente alto de monocromaticidade, coerência, direcionalidade e brilho. A estas propriedades pode ser adicionada a curta duração do feixe laser, isso se refere à capacidade de produzir pulsos de luz muito curtos, uma propriedade que, embora talvez menos fundamental, não deixa de ser muito importante (SVELTO; HANNA, 1998).

4.7 Desempenho do Laser

O desempenho do YDCFL de alta potência em aplicações de processamento de materiais é aprimorado por sua alta qualidade de feixe (M^2) com alta potência de saída, o que resulta em alto brilho. A qualidade de um feixe de laser é caracterizada pelo produto do parâmetro de feixe (BPP). O M^2 é um parâmetro importante do laser, embora tenha sido definido de diferentes maneiras. Para a maioria das aplicações industriais de laser, é uma medida da capacidade de focalização do feixe. Comparando dois feixes de laser diferentes com a mesma focagem óptica, os feixes com melhor qualidade permitirão uma focagem em uma menor área, portanto, com maior intensidade. No entanto, diferentes tipos de aberrações ou efeitos de difração, existentes tanto na focagem óptica quanto no meio

ativo do oscilador laser, podem afetar a capacidade de foco do sistema, pois alteram a frente de onda do feixe laser.

Todas as definições de qualidade do feixe laser podem ser divididas em duas categorias principais. Historicamente, o primeiro método foi baseado na comparação do produto do raio do feixe laser na cintura do feixe e o ângulo de divergência do feixe de campo distante do feixe (chamado de produtos de parâmetros do feixe, BPP) com o do feixe gaussiano do modo fundamental. Outro método é baseado no segundo momento do perfil de intensidade do feixe laser. Este método define a qualidade do feixe usando o chamado parâmetro M^2 . Introduzido por Siegman (SIEGMAN, 1990), o parâmetro M^2 tornou-se um importante padrão de qualidade do feixe.

O parâmetro M^2 também denota quantas vezes mais rápido o feixe diverge em comparação com um feixe gaussiano limitado por difração com o mesmo diâmetro de cintura. Portanto, pode ser definido como a razão do produto parâmetro-feixe (BPP_B) do feixe em questão dividido pelo BPP_G de um feixe gaussiano limitado por difração, a saber (ROSS; LATHAM, 2006):

$$M^2 = \frac{BPP_B}{BPP_G} = \frac{\pi}{\lambda} w_B \theta_B, \quad (4.41)$$

onde w_B e θ_B são o raio do campo modal e a divergência do campo distante do feixe, respectivamente. Para feixes gaussianos $M^2 = 1$, enquanto para qualquer outro feixe prático $M^2 > 1$. A qualidade do feixe de uma saída de laser de fibra pode ser ajustada por um projeto de fibra adequado.

Por definição, um feixe gaussiano com divergência limitada por difração (ou seja, modo LP_{01} em fibra óptica circular) tem a maior qualidade do feixe. Correspondentemente, os modos gaussianos de alta ordem demonstram baixa qualidade do feixe.

No esquema de bombeamento no revestimento da fibra, a potência do bombeamento de baixo brilho é lançada no revestimento em vez de no núcleo. Como o revestimento possui maior seção transversal e maior abertura numérica, a energia se propaga em seu interior em diversos modos. Os múltiplos modos se sobrepõem ao núcleo dopado à medida que se propagam pela fibra e a energia é absorvida. A luz gerada, entretanto, é obtida em um comprimento de onda tal que apenas o modo fundamental é excitado. Portanto, ele fica preso apenas no núcleo e não pode se propagar no revestimento. Isso resulta em uma luz de saída de laser altamente intensa e mais brilhante. Nesse aspecto, os lasers de fibra bombeados no cladding podem ser considerados como excelentes conversores de brilho,

conforme explicado pela equação (4.42) que fornece o brilho ou radiância de um feixe.

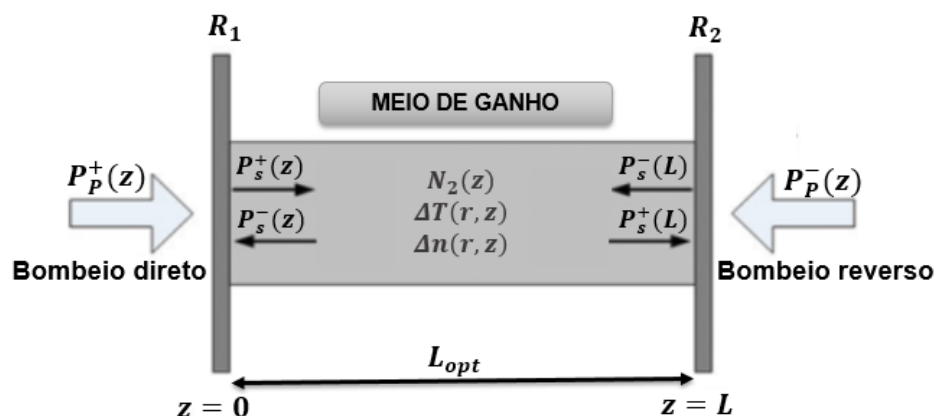
$$B = \frac{P}{\pi^2 B P P^2} = \frac{P}{(M^2 \lambda)^2}. \quad (4.42)$$

4.8 Descrição do Oscilador Laser Utilizando as Equações de Taxa

O esquema do oscilador laser, objeto de estudo deste trabalho, é mostrado na Fig 20. O sistema laser inclui uma região ativa (meio de ganho), formado pela fibra dopada com Yb^{+3} de comprimento $L = L_{opt}$, um refletor de Bragg R_1 na entrada do bombeamento direto, em $z = 0$, e outro refletor Bragg R_2 na saída do oscilador, em $z = L$, onde ocorre o bombeamento reverso. As equações de taxa para os íons Yb^{+3} são baseadas em um sistema de quase-três níveis (PASK et al., 1995). Normalmente, a concentração do dopante $N = N_{total} = N_{Yb}$ é constante, independente da posição ao longo do núcleo da fibra. A potência de bombeamento $P_p^\pm(z)$ é acoplada no revestimento interno em $z = 0$ ou em $z = L$ e se propaga ao longo da direção positiva ou negativa do oscilador, como representada na Fig.20.

Neste projeto foi assumido que a potência de bombeamento é intensa o suficiente para saturar o ganho, e o sinal laser é intenso o suficiente para suprimir as emissões espontâneas. Ambas as suposições são bastante razoáveis em projetos de laser de fibra de alta potência (LI et al., 2008) e (XIAO et al., 2015).

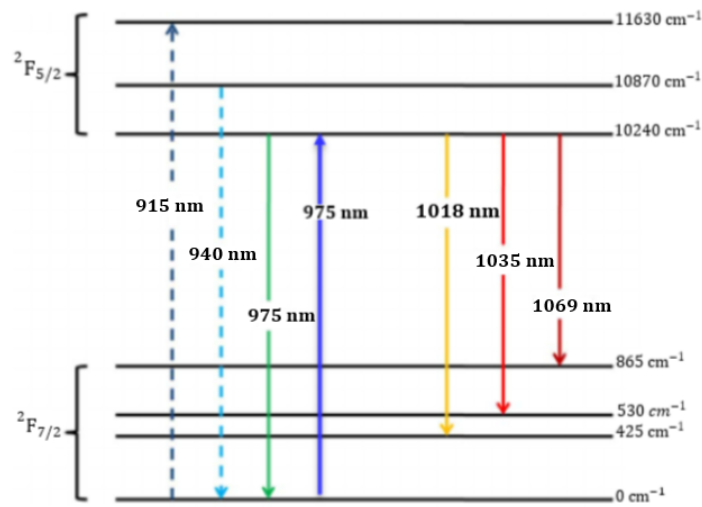
Figura 20 – Sistema físico do oscilador laser



Fonte: autor da dissertação.

4.8.1 Densidade de população iônica do oscilador laser

As densidades das populações iônicas dos níveis laser superior e inferior do Yb^{+3} , de notação espectroscópica $^2F_{7/2}$ e $^2F_{5/2}$, são denotadas por $N_1(z)$ e $N_2(z)$, respectivamente, conforme representados na Fig. 21.

Figura 21 – Diagrama de nível de energia do Yb^{+3} em sílica.

Fonte: Eilchi e Parvin (2016)

Conforme ilustrado na Fig. 21, é possível observar que o diagrama de níveis de energia do Yb^{+3} tem dois estados largos: o estado fundamental ${}^2F_{7/2}$ e o estado metaestável ${}^2F_{5/2}$ (PASK et al., 1995). As transições laser mais importantes desse íon também são mostrados nesse diagrama.

As equações de taxa que traduzem os fenômenos da absorção, emissão espontânea e estimulada de radiação, podem ser escritas de acordo com a equação (4.44) (HARDY; ORON, 1997), enquanto a densidade de população total (N) é dada pela equação (4.43). As equações de taxa para os íons Yb^{+3} são baseadas em um sistema quase-três-níveis (PASK et al., 1995). No entanto, estudos têm demonstrado que o Yb^{+3} se comporta como um sistema laser de quase-quatro-níveis em comprimentos de onda mais longos (MATNIYAZ et al., 2019).

$$N = N_1(r, \phi, z, \lambda, t) + N_2(r, \phi, z, \lambda, t). \quad (4.43)$$

A fibra ativa que forma o meio de ganho do oscilador laser (Fig. 20) é dopada com N íons de Yb^{+3} por unidade de volume. N é independente do tempo (t), da posição (r, ϕ, z) ao longo do eixo longitudinal do oscilador (HARDY; ORON, 1997), e se mantém constante em todo o processo laser do sistema quântico pelo princípio da conservação de energia e das partículas atômicas dentro do oscilador laser, como traduzido pela equação (4.43).

Nesse contexto, a fim de expressar a equação que descreve a densidade de população iônica do nível laser superior $N_2(r, \phi, z, \lambda, t)$, é preciso considerar três hipóteses. A primeira hipótese é que a dopagem de Yb^{+3} é uniforme na direção radial e azimutal (r, ϕ)

da fibra ativa, isto implica que $N_2(r, \phi, z, \lambda, t)$ passa a ser descrita como $N_2(z, \lambda, t)$, ou seja:

$$\frac{\partial N_2(z, \lambda, t)}{\partial t} = B_1 + B_2 + B_3, \quad (4.44)$$

onde B_1 , B_2 e B_3 são expressos na forma:

$$B_1 = \left(\frac{\lambda_p \Gamma_p}{hcA} \right) \sigma_p^a [P_p^+(z, t) + P_p^-(z, t)] N_1(z, t) - \left(\frac{\lambda_p \Gamma_p}{hcA} \right) \sigma_p^e [P_p^+(z, t) + P_p^-(z, t)] N_2(z, t), \quad (4.45)$$

$$B_2 = -\frac{N_2(z, t)}{\tau_2} - \left(\frac{\Gamma_s}{hcA} \right) N_2(z, t) \int \{ \sigma_s^e(\lambda) [P_s^+(z, t, \lambda) + P_s^-(z, t, \lambda)] \lambda \} d\lambda, \quad (4.46)$$

$$B_3 = \left(\frac{\Gamma_s}{hcA} \right) N_1(z, t) \int \{ \sigma_s^a(\lambda) [P_s^+(z, t, \lambda) + P_s^-(z, t, \lambda)] \lambda \} d\lambda. \quad (4.47)$$

Como pode ser observado, os parâmetros B_2 e B_3 da equação (4.44) são integrados na faixa de comprimento de onda do sinal laser ($\lambda = \lambda_s$). A segunda hipótese é a consideração de que a largura de banda da emissão laser seja estreita, então teremos que $N_2(z, t, \lambda) = N_2(z, t)$, $\lambda = \lambda_s$, a seção de choque de emissão laser $\sigma_s(\lambda = \lambda_s) = \sigma_s$ alcança o seu pico (Fig. 15), e $P_s^\pm(z, t, \lambda) = P_s^\pm(z, t)$. Finalmente, a terceira hipótese é que o oscilador laser em regime *CW* (*continuous wave*) atinge o seu estado estacionário e $N_2(z, t)$ se torna invariante no tempo. Portanto, $N_1(z, t) = N_1(z)$, $N_2(z, t) = N_2(z)$, $P_s^\pm(z, t) = P_s^\pm(z)$ e $P_p^\pm(z, t) = P_p^\pm(z)$. Diante dessas hipóteses, as equações (4.43) e (4.44) passam a ser escritas como:

$$N = N_1(z) + N_2(z), \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial N_2(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (4.49)$$

e, portanto, a equação (4.44) resultará em:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_p \Gamma_p}{hcA} \right) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] N_1(z) \sigma_p^a - \left(\frac{\lambda_p \Gamma_p}{hcA} \right) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] N_2(z) \sigma_p^e - \frac{N_2(z)}{\tau_2} \\ & + \left(\frac{\lambda_s \Gamma_s}{hcA} \right) [P_s^+(z) + P_s^-(z)] N_1(z) \sigma_s^a - \left(\frac{\lambda_s \Gamma_s}{hcA} \right) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] N_2(z) \sigma_s^e = 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

No entanto, recorrendo à equação (4.48) para eliminar $N_1(z)$, e sabendo que a velocidade da luz $c = \lambda v$, a equação (4.50) pode ser escrita de acordo com a equação (4.51) que, para lasers *CW*, traduz a população iônica do nível superior laser e descreve a variação da densidade populacional iônica do nível superior laser dos íons Yb^{+3} ao longo da fibra

dopada através de sua dependência das potências de bombeamento e do sinal laser na direção axial z do oscilador laser, de acordo com a ilustração na Fig. (20):

$$\frac{N_2(z)}{N} = \frac{\left(\frac{\Gamma_p}{hv_p A}\right) \sigma_p^a [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + \left(\frac{\Gamma_s}{hv_s A}\right) \sigma_s^a [P_s^+(z) + P_s^-(z)]}{\left(\frac{\Gamma_p}{hv_p A}\right) (\sigma_p^a + \sigma_p^e) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + \frac{1}{\tau_2} + \left(\frac{\Gamma_s}{hv_s A}\right) (\sigma_s^a + \sigma_s^e) [P_s^+(z) + P_s^-(z)]}, \quad (4.51)$$

onde a potência do sinal de bombeamento é $P_p(z) = P_p^+(z) + P_p^-(z)$ e a potência do sinal laser é $P_s(z) = P_s^+(z) + P_s^-(z)$. $P_p^\pm(z)$ e $P_s^\pm(z)$ são os sinais de avanço e retorno do bombeamento e do laser, respectivamente. σ_p^a e σ_p^e representam, respectivamente, as seções de choque de absorção e de emissão no comprimento de onda do sinal de bombeamento (λ_p). σ_s^a e σ_s^e são as seções de choque de absorção e de emissão do sinal laser no comprimento de onda do sinal laser λ_s . $\tau_2 = \tau_{21}$ é o tempo de vida radiativo do estado excitado (nível 2 ou estado metaestável). Γ_p e Γ_s são os fatores de preenchimento do bombeamento e do sinal laser, respectivamente. h é a constante de planck. v_p e v_s são, respectivamente, as frequências do bombeamento e do sinal laser. $A = A_{eff}$ é a área efetiva do núcleo da fibra dopada com Yb^{+3} .

O fator de preenchimento do bombeamento Γ_p obedece a relação $\Gamma_p \approx A_{eff}/S$ (GONG et al., 2007). S é a área do primeiro revestimento (incluindo a região do núcleo) da fibra dopada de alta potência de revestimento duplo dopada com Yb^{+3} , como ilustrada na Fig. 1. O fator de preenchimento do sinal laser Γ_s pode ser interpretado como a fração da potência do sinal que se sobrepõe à área do núcleo dopado da fibra.

4.8.2 Área efetiva e fator de preenchimento do oscilador laser

A integral de sobreposição $\Gamma(\nu)$ entre a distribuição de intensidade do modo fundamental linearmente polarizado (LP_{01}) e a distribuição transversal da densidade de dopagem de terras raras do núcleo. A área efetiva do núcleo da fibra dopada é expressa como (BARNARD et al., 1994):

$$A_{eff} = \int \frac{N_t(r, \phi, z) dA}{N_t(0)}, \quad (4.52)$$

onde $N_t(0)$ é a concentração total do dopante na fibra ativa em $r \approx 0$ e $N_t(r, \phi, z)$ é a concentração de íons do dopante na região do núcleo da fibra ativa, dada em coordenadas cilíndricas. A integral de sobreposição, também conhecida como fator de preenchimento, pode ser expressa como (GILES; DESURVIRE, 1991):

$$\Gamma_{k,i}(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty i_k(r, \phi) N_i(r, \phi, z) r dr d\phi}{\bar{N}_i}, \quad (4.53)$$

onde os índices k e i representam o sinal k -ésimo (uma dependência do comprimento de onda) e os níveis de energia, respectivamente. \bar{N}_i é o valor médio da densidade de população iônica do nível i dado por (GILES; DESURVIRE, 1991):

$$\bar{N}_i(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} N_i(r, \phi, z) r dr d\phi}{\pi \rho_{eff}^2}, \quad (4.54)$$

onde ρ_{eff} é o raio efetivo da fibra dopada dado por (GILES; DESURVIRE, 1991):

$$\rho_{eff} = \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{N_i(r)}{N_i(0)} r dr d\phi \right]^{1/2}. \quad (4.55)$$

Para o modo fundamental aproximado por um perfil gaussiano, o fator de preenchimento é dado por:

$$\Gamma_t = 1 - e^{-2\rho^2/w_b^2}, \quad (4.56)$$

onde w_b é o raio modal fundamental, ou também conhecido como cintura do feixe. Na aproximação do perfil gaussiano, Marcuse propôs uma relação empírica para calcular o raio modal como (MARCUSE, 1977):

$$w_b = \rho \left(0,65 + \frac{1,65}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \right), \quad (4.57)$$

onde ρ é o raio do núcleo da fibra e V a frequência normalizada (V -number da fibra). Vale ressaltar que a relação de Marcuse (4.57) vale apenas para $1,4 < V < 3$. A aproximação de Marcuse não é única, outras aproximações empíricas para o raio modal também foram propostas por (BARNARD et al., 1994) e (GILES; DESURVIRE, 1991).

4.8.3 Balanço energético no oscilador laser

A propagação do sinal laser, $P_s^+(z)$, que representa a densidade de potência do sinal, por unidade de comprimento de onda, propagando-se na direção \vec{z} positiva, e $P_s^-(z)$ a correspondente propagação na direção \vec{z} negativa, então as equações de propagações para os sinais podem ser escritas de acordo com as equações (4.58) e (4.59). O sinal da potência de bombeamento é lançado em $z = 0$ e o sinal de saída é calculado em $z = L$. R_1 e R_2 são os refletores Bragg (refletividades) distribuídos em $z = 0$ e $z = L$, como representado pela Fig. 20.

As equações diferenciais (4.58) e (4.59) descrevem a propagação do sinal laser de avanço ou direto (XIAO et al., 2004), (GONG et al., 2007) (KARIMI, 2018), $P_s^+(z)$, e a

propagação do sinal laser de retorno ou reverso, $P_s^-(z)$, respectivamente.

$$\frac{dP_s^+(z)}{dz} = \{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} P_s^+(z), \quad (4.58)$$

$$\frac{dP_s^-(z)}{dz} = -\{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} P_s^-(z). \quad (4.59)$$

Nas equações (4.58) e (4.59) foi utilizada a equação (4.43) para eliminar $N_1(z)$. σ_s^a e σ_s^e representam, respectivamente, as seções de choque de absorção e emissão estimulada no comprimento de onda do sinal laser ($\lambda = \lambda_s$). O coeficiente positivo α_s representa a perda por espalhamento no comprimento de onda $\lambda = \lambda_s$.

A luz de bombeamento de potência $P_p(z)$, no comprimento de onda λ_p , é acoplada ao primeiro revestimento interno que envolve o núcleo da fibra dopada com Yb^{+3} , como mostrado na Fig. 20. A sua propagação é governada pelo conjunto de equações diferenciais (4.60) e (4.61) que descrevem a propagação do bombeamento de avanço ou direto ($P_p^+(z)$), e a propagação de bombeamento de retorno ou reverso ($P_p^-(z)$), respectivamente. As equações (4.58) - (4.61) são obtidas a partir da equação (1.14), sob as hipóteses simplificadoras da aproximação paraxial e do fator de preenchimento radial (DESURVIRE, 1990).

$$\frac{dP_p^+(z)}{dz} = \{\Gamma_p[(\sigma_p^e + \sigma_p^a)N_2(z) - \sigma_p^a N] - \alpha_p\} P_p^+(z), \quad (4.60)$$

$$\frac{dP_p^-(z)}{dz} = -\{\Gamma_p[(\sigma_p^e + \sigma_p^a)N_2(z) - \sigma_p^a N] - \alpha_p\} P_p^-(z). \quad (4.61)$$

onde o coeficiente positivo α_p representa a perda por espalhamento no comprimento de onda do sinal de bombeamento ($\lambda = \lambda_p$).

As equações (4.58) a (4.61) devem ser resolvidas sujeitas às condições de contorno nas localizações dos espelhos (PEYSOKHAN; MOBINI; MAFI, 2020), traduzidas pelas equações:

$$P_s^+(z=0) = R_1(\lambda_s)P_s^-(z=0), \quad (4.62)$$

$$P_s^-(z=L) = R_2(\lambda_s)P_s^+(z=L), \quad (4.63)$$

$$P_s^+(z=0)P_s^-(z=0) = P_s^+(z=L)P_s^-(z=L) = R_1P_s^-(z=0)^2, \quad (4.64)$$

onde $R_1(\lambda_s)$ e $R_2(\lambda_s)$ representam, respectivamente, as refletividades das redes de Bragg 1 e 2 que formam a cavidade ressonante (oscilador laser), conforme ilustradas nas Figs. 20 e 25.

Sob a condição de que o sinal de bombeamento é muito maior que a potência de saturação do sinal laser, temos que:

$$P_p^+(z) + P_p^-(z) \gg P_s^{sat}, \quad (4.65)$$

onde P_s^{sat} é a potência de saturação laser que é expressa pela equação (4.66) (PASK et al., 1995) e (PASCHOTTA et al., 1997):

$$P_s^{sat} = \frac{h\nu_s A}{\Gamma_s(\sigma_s^e + \sigma_s^a)\tau}. \quad (4.66)$$

Tendo em vista que o sinal laser total é intenso o suficiente para saturar o ganho em cada posição z , a equação (4.44) combinada com o fato de $\sigma_s^e \gg \sigma_s^a$, implica que $N \gg N_2(z)$. Por simplicidade, considerar-se-á que a reflexão do sinal de bombeamento $P_p^-(z)$ na segunda rede de Bragg é desprezível. Sob estas hipóteses, a equação (4.60) pode ser escrita como:

$$\frac{dP_p^+(z)}{dz} = -[\Gamma_p\sigma_p^e N + \alpha_p] P_p^+(z). \quad (4.67)$$

A sua solução pode ser descrita como:

$$P_p^+(z) = P_p^+(0)e^{-\alpha z}. \quad (4.68)$$

A equação (4.68) é utilizada para a determinação da potência de bombeamento necessária para a obtenção de um determinado nível de potência laser de saída, onde α é o coeficiente de atenuação do sinal de bombeamento e é definido de acordo com:

$$\alpha = \Gamma_p\sigma_p^e N + \alpha_p. \quad (4.69)$$

O próximo passo é a obtenção da equação que descreve a propagação do sinal laser em ambos os sentidos (avanço e reverso). As equações de propagação (4.58) e (4.59) estão sujeitas às seguintes condições de contorno na posição das redes de Bragg:

$$P_s^+(0) = R_1 P_s^-(0), \quad (4.70)$$

$$P_s^-(L) = R_2 P_s^+(L). \quad (4.71)$$

Diante da hipótese, de largura de banda de emissão estreita, e em regime CW, utilizando as equações (4.58) e (4.59), pode-se mostrar, como apresentada no Apêndice E, que:

$$\frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} + \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} = 0. \quad (4.72)$$

É possível demonstrar, por meio da equação (4.72), que a derivada em relação à variável z do produto $P_s^+(z) \cdot P_s^-(z)$ anula-se, e, portanto, é uma constante ao longo de todo o comprimento da fibra. Em outras palavras, pode-se expressar que:

$$\frac{d[P_s^+(z)P_s^-(z)]}{P_s^+(z)P_s^-(z)} = \frac{P_s^-(z)dP_s^+(z) + P_s^+(z)dP_s^-(z)}{P_s^+(z)P_s^-(z)} = \frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} + \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} = 0. \quad (4.73)$$

Temos, portanto, pelas condições de contorno, também demonstradas no Apêndice E, que:

$$P_s^+(0)P_s^-(0) = P_s^+(L)P_s^-(L) = P_s^+(z)P_s^-(z) = R_1[P_s^-(0)]^2. \quad (4.74)$$

Como demonstrado no Apêndice D, a equação (4.51) pode ser escrita na forma:

$$N_2(z) \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A} \right) (\sigma_p^a + \sigma_p^e) P_p(z) + \frac{1}{\tau_2} + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A} \right) (\sigma_s^a + \sigma_s^e) P_s(z) = D, \quad (4.75)$$

onde

$$D = N \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A} \right) \sigma_p^a P_p(z) + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A} \right) \sigma_s^a P_s(z). \quad (4.76)$$

Readequando os termos da equação (4.75), de forma explicitar no lado esquerdo apenas o sinal de bombeamento e, similarmente, no lado direito (D) o sinal laser, resultará em:

$$P_p(z) \left(\frac{\tau_2 \Gamma_p}{h\nu_p A} \right) \left[\sigma_p^a - \frac{N_2(z)}{N} (\sigma_p^a + \sigma_p^e) \right] = \phi_2. \quad (4.77)$$

Mas da equação (4.77) podemos definir as seguintes funções auxiliares:

$$\phi_1 = P_p(z) \left(\frac{\tau_2 \Gamma_p}{h\nu_p A} \right) \left[\sigma_p^a - \frac{N_2(z)}{N} (\sigma_p^a + \sigma_p^e) \right], \quad (4.78)$$

$$\phi_2 = P_s(z) \left(\frac{\tau_2 \Gamma_s}{h\nu_s A} \right) \left[\frac{N_2(z)}{N} (\sigma_s^a + \sigma_s^e) - \sigma_s^a \right]. \quad (4.79)$$

Com essas funções auxiliares podemos, de outra forma, escrever a equação (4.77) como:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{N_2(z)}{N} \quad (4.80)$$

4.8.4 Valor médio da densidade da população iônica do oscilador laser

As funções ϕ_1 e ϕ_2 variam consideravelmente ao longo do comprimento (L) da fibra ativa, enquanto que a variação de $\frac{N_2(z)}{N}$ ao longo do mesmo comprimento é insignificante.

Portanto, é justificado considerar o valor médio, calculado ao longo do comprimento da fibra. No entanto, deve ser observado que esta substituição é somente aplicada ao primeiro termo do lado direito da equação (4.77). O valor médio de $N_2(z)$ ao longo do eixo longitudinal da fibra dopada pode ser expresso como (PEYSOKHAN; MOBINI; MAFI, 2020):

$$\overline{N_2}(z) = \frac{1}{L} \int_0^L N_2(z) dz. \quad (4.81)$$

Entretanto, para calcular a integral do valor médio de $N_2(z)$, um método é utilizar o ganho total do sistema laser de fibra. O ganho total do sistema do laser de fibra é, para cada passagem, dado pela seguinte expressão:

$$G = \int_0^L \frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} + \int_0^L \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)}. \quad (4.82)$$

Substituindo as equações (4.58) e (4.59) em (4.82), obtemos que:

$$G = 2\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a) \int_0^L N_2(z)dz - 2(\Gamma_s\sigma_s^a N + \sigma_s)L]. \quad (4.83)$$

A partir da equação (4.83) combinada com a equação (4.81), pode ser obtida uma expressão para o cálculo do valor médio $\overline{N_2}(z)$, conforme descrito:

$$\overline{N_2}(z) = \frac{1}{L} \int_0^L N_2(z)dz = \left[\frac{\frac{G}{2L} + (\Gamma_s\sigma_s^a N + \sigma_s)L}{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)]} \right]. \quad (4.84)$$

Por outro lado, o parâmetro de ganho G deve ser calculado utilizando as características do laser e, desta forma, para cada passagem pode-se escrever que:

$$R_1 R_2 e^G = 1 \rightarrow G = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \right). \quad (4.85)$$

Combinando as equações (4.84) e (4.85) obtém-se, finalmente, o valor médio $\overline{N_2}(z)$ da densidade da população do nível 2 (nível superior).

$$\overline{N_2}(z) = \left[\frac{\frac{1}{L} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \right) + (\Gamma_s\sigma_s^a N + \sigma_s)L}{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)]} \right]. \quad (4.86)$$

Substituindo, agora, a expressão do valor médio para a densidade de população iônica da equação (4.77), obtém-se

$$X + \Upsilon = 0, \quad (4.87)$$

onde

$$X = P_p(z) \left(\frac{\tau_2 \Gamma_p}{h\nu_p A} \right) \{ N_2(z)(\sigma_p^a + \sigma_p^e) - N\sigma_p^a \} + \langle N_2(z) \rangle, \quad (4.88)$$

$$\Upsilon = P_s(z) \left(\frac{\tau_2 \Gamma_s}{h\nu_s A} \right) \{ N_2(z)(\sigma_s^a + \sigma_s^e) - N\sigma_s^a \} = 0. \quad (4.89)$$

Utilizando as equações (4.58) a (4.61), que descrevem a propagação do sinal e do bombeamento, o seguinte sistema de equações pode ser escrito,

$$\frac{dP_s^+(z)}{dz} - \frac{dP_s^-(z)}{dz} + \alpha_s P_s(z) = \Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)N_2(z) - \sigma_s^a N]P_s(z), \quad (4.90)$$

$$\frac{dP_p^+(z)}{dz} - \frac{dP_p^-(z)}{dz} + \alpha_p P_p(z) = \Gamma_p[(\sigma_p^e + \sigma_p^a)N_2(z) - \sigma_p^a N]P_p(z). \quad (4.91)$$

Inserindo as equações (4.90) e (4.91) no sistema de equação (4.87), obtém-se o seguinte resultado:

$$\Omega_1 + \Omega_2 = 0, \quad (4.92)$$

onde

$$\Omega_1 = \left(\frac{\tau_2}{hv_s A} \right) \left\{ \left[\frac{dP_s^+(z)}{dz} - \frac{dP_s^-(z)}{dz} \right] + \alpha_s P_s(z) \right\} + \overline{N_2}(z), \quad (4.93)$$

$$\Omega_2 = \left(\frac{\tau_2}{hv_p A} \right) \left\{ \left[\frac{dP_p^+(z)}{dz} - \frac{dP_p^-(z)}{dz} \right] + \alpha_p P_p(z) \right\}. \quad (4.94)$$

Empregando a equação (4.68), e o fato de que $P_p^-(z) = 0$, ou seja considerando que o oscilador está sendo bombeado em uma única extremidade ($z = 0$), configuração unidirecional de avanço ou direto, o sistema de equação (4.92) pode ser simplificado para a forma:

$$\left[\frac{dP_s^+(z)}{dz} - \frac{dP_s^-(z)}{dz} \right] + \alpha_s [P_s^+(z) + P_s^-(z)] + \frac{v_s}{v_p} e^{-\alpha z} P_p^+(0)(\alpha_p - \alpha) + hv_s A \frac{\overline{N_2}}{\tau_2} = 0. \quad (4.95)$$

No entanto, a fim de integrar a equação (4.95), será inicialmente considerado que $\alpha_s = 0$ e, então, incluído como uma perturbação. Esta hipótese é válida tendo em vista que a atenuação óptica em fibras ópticas é muito pequena. Na ausência do termo de perdas, a equação (4.95) pode ser integrada, resultando em:

$$P_s^+(z) - P_s^+(0) - P_s^-(z) + P_s^-(0) + \left[\frac{v_s}{v_p} P_p^+(0)(\alpha_p - \alpha) \right] \left(\frac{e^{-\alpha z} - 1}{-\alpha} \right) + hv_s A \frac{\overline{N_2}}{\tau_2} z = 0. \quad (4.96)$$

Utilizando as condições de contorno, equações (4.62) a (4.64), a equação (4.96) pode ser escrita na seguinte forma,

$$P_s^+(z)^2 + \left[(1 - R_1)P_s^-(0) - \frac{v_s}{v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha z}) + hv_s A \frac{\overline{N_2}}{\tau_2} z \right] P_s^+(z) - R_1 P_s^-(0)^2 = 0. \quad (4.97)$$

É possível observar que a equação (4.97) é uma equação polinomial quadrática em $P_s^+(z)$, sendo prontamente resolvida. Portanto, a fim de tornar a equação (4.97) mais compacta, definimos que:

$$2b(z) = (1 - R_1)P_s^-(0) - \frac{v_s}{v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha z}) + hv_s A \frac{\overline{N_2}}{\tau_2} z, \quad (4.98)$$

$$d = R_1 P_s^-(0)^2. \quad (4.99)$$

Com estas definições, a equação (4.96) pode ser escrita de uma forma ainda mais compacta, como se segue:

$$P_s^+(z)^2 + 2bP_s^+(z) - d = 0. \quad (4.100)$$

A solução de interesse para o oscilador laser no esquema de bombeamento direto ($P_p^-(z) = 0$) é aquela expressa por:

$$P_s^+(z) = -b + \sqrt{b^2 + d}. \quad (4.101)$$

Mas, da equação (4.64), da condição de contorno, segue que $P_s^+(z)P_s^-(z) = R_1P_s^-(z=0)^2 = d$. Desta forma,

$$P_s^+(z) = \frac{d}{P_s^-(z)}. \quad (4.102)$$

Voltando na equação (4.100) e inserindo nela a equação (4.102), teremos como solução de relevância o seguinte resultado:

$$P_s^-(z) = b + \sqrt{b^2 + d}. \quad (4.103)$$

As equações (4.101) e (4.103) descrevem as propagações dos sinais laser nas direções direta e reversa e, em conjunto com as equações (4.51) e (4.68), fornecem a completa solução para o problema do laser de fibra óptica dopada com Yb^{+3} . Contudo, ainda será necessária a determinação de $P_s^-(0)$, que aparece na equação (4.98), para o cálculo de $b(z)$ baseado nos parâmetros de projeto do laser. Para isto, deve-se calcular o valor para as potências do sinal laser, para $z = L$. Aplicando as condições de contorno, representadas pelas equações a seguir:

$$P_s^+(L)P_s^-(L) = P_s^+(0)P_s^-(0), \quad (4.104)$$

$$P_s^-(L) = R_2P_s^+(L), \quad (4.105)$$

$$P_s^+(0) = R_1P_s^-(0). \quad (4.106)$$

Obtemos o seguinte resultado:

$$P_s^+(L) = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} [P_s^-(0)], \quad (4.107)$$

e, desse modo, resulta em uma equação quadrática para $P_s^+(L)$, expressa por

$$P_s^+(L)^2 + 2b(z=L)P_s^+(L) - d = 0. \quad (4.108)$$

Segundo a equação (4.107), a equação (4.108) pode ser escrita na forma:

$$\frac{R_1}{R_2} P_s^-(0)^2 + 2b(z=L) \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} P_s^-(0) - R_1 P_s^-(0)^2 = 0, \quad (4.109)$$

ou ainda, substituindo a equação (4.98) para a expressão de $b(z)$, a equação (4.109) se escreverá conforme se segue:

$$\frac{R_1}{R_2} P_s^-(0)^2 + 2 \left[\frac{(1-R_1)}{2} P_s^-(0) + f(L) \right] \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} P_s^-(0) - R_1 P_s^-(0)^2 = 0, \quad (4.110)$$

onde temos que

$$f(L) = -\frac{v_s}{2v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha z}) + hv_s A \frac{\overline{N_2}}{2\tau_2} L. \quad (4.111)$$

Realizando a divisão da equação (4.110) por $P_s^-(0)$, e realizando algumas manipulações algébricas, resulta em:

$$\left[\frac{R_1}{R_2} + (1-R_1) \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - R_1 \right] P_s^-(0) + 2\sqrt{R_1 R_2} f(L) = 0. \quad (4.112)$$

Explicitando $P_s^-(0)$ de (4.112) e substituindo (4.111), resultará em:

$$P_s^-(0) = \frac{\sqrt{R_2}}{[\sqrt{R_1}(1-R_2) + \sqrt{R_2}(1-R_1)]} \left[\frac{v_s}{v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha L}) - hv_s A \frac{\overline{N_2}}{\tau_2} L \right]. \quad (4.113)$$

Diante desses resultados, realizando a substituição da equação 4.86, para o valor médio de $N_2(z)$, na equação (4.113), finalmente, obtemos:

$$P_s^-(0) = \tilde{R}_a \left[\frac{v_s}{v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha L}) - hv_s A \frac{1}{\tau_2} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\right) + (\Gamma_s \sigma_s^a N + \sigma_s) L}{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)]} \right) \right], \quad (4.114)$$

onde

$$\tilde{R}_a = \frac{\sqrt{R_2}}{[\sqrt{R_1}(1-R_2) + \sqrt{R_2}(1-R_1)]}. \quad (4.115)$$

Um procedimento similar pode ser aplicado a fim de obter uma expressão para $P_s^+(L)$, ou aplicar a equação (4.107) na equação (4.113), que resulta em,

$$P_s^+(L) = \tilde{R}_b \left[\frac{v_s}{v_p} P_p^+(0) \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha}\right) (1 - e^{-\alpha L}) - hv_s A \frac{1}{\tau_2} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\right) + (\Gamma_s \sigma_s^a N + \sigma_s) L}{\Gamma_s[(\sigma_s^e + \sigma_s^a)]} \right) \right], \quad (4.116)$$

onde

$$\tilde{R}_b = \frac{\sqrt{R_1}}{[\sqrt{R_1}(1-R_2) + \sqrt{R_2}(1-R_1)]}. \quad (4.117)$$

O modelo construído, conforme a fundamentação analítica realizada, contempla a configuração de bombeamento direto, bombeamento sendo injetado pelo espelho de maior refletividade do oscilador laser. No entanto, a fim de incluir o bombeamento bidirecional (injetando potência em ambas extremidades do oscilador, em $z = 0$ e $z = L$), como apresentado na Fig. 20, a equação 4.98 se modifica e $b(z)$ passa a ser escrita como $b_b(z)$. A equação do sinal de bombeamento passa a ser descrita de acordo com a equação (4.119). Nesse sentido, o bombeamento bidirecional é incluído por meio das seguintes expressões:

$$b_b(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - R_1)P_s^-(0) - \frac{v_s}{v_p}(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha})[P_p^+(0)(1 - e^{-\alpha z}) + P_p^-(L)(e^{-\alpha(L-z)} - e^{-\alpha L})]}{h v_s A \frac{N_2}{\tau_2} z} \right], \quad (4.118)$$

$$P_p(z) = P_p^+(0)e^{-\alpha z} + P_p^-(L)e^{-\alpha(L-z)}. \quad (4.119)$$

4.8.5 Análise da teoria da perturbação de primeira ordem no oscilador laser

A fim de incluir a atenuação referente às perdas por espalhamento do sinal laser (α_s), a equação (4.95) pode ser descrita pela equação (4.120).

$$P_s^+(z) - P_s^+(0) - P_s^-(z) + P_s^-(0) + \frac{v_s}{v_p} P_p^+(0)(\alpha_p - \alpha) \left(\frac{e^{-\alpha z} - 1}{-\alpha} \right) + h v_s A \frac{N_2}{\tau_2} z + \alpha_s \int P_s(z) dz = 0. \quad (4.120)$$

Em seguida, definimos $\delta(z)$ como:

$$\delta(z) = \left(\frac{\alpha_s}{2} \right) \int_0^z [P_s^+(z') - P_s^-(z')] dz'. \quad (4.121)$$

Com esta definição, as equações (4.100) e (4.103) passam a ser escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$P_{s\delta}^+(z) = -(b + \delta) + \sqrt{(b + \delta)^2 + d_\delta}, \quad (4.122)$$

$$P_{s\delta}^-(z) = (b + \delta) + \sqrt{(b + \delta)^2 + d_\delta}. \quad (4.123)$$

Para encontrar a expressão para $\delta(z)$ na teoria da perturbação de primeira ordem, deve-se utilizar as equações (4.102) e (4.103) para determinar $P_s^+(z)$ e $P_s^-(z)$, que substituídos na equação (4.121) resulta em:

$$\delta(z) = \alpha_s \int_0^z \sqrt{b(z')^2 + R_1 [P_s^-(0)]^2} dz'. \quad (4.124)$$

Em geral, $b(z')$ é uma função complicada de z e a integral na equação (4.124) não pode ser simplificada analiticamente. Para prosseguir analiticamente, podemos implementar a regra do ponto médio para a integração e aproximar $\delta(z)$ da seguinte forma:

$$\delta(z) \approx \alpha_s \left(\sqrt{b(z/2)^2 + R_1 [P_s^-(0)]^2} \right) z. \quad (4.125)$$

A expressão obtida da equação (4.125) é utilizada nas equações (4.122) e (4.123) para a obtenção de $P_{s\delta}^+(z)$ e $P_{s\delta}^-(z)$ que, por sua vez, permitem calcular, admitindo que $P_{s\delta}^-(0) = P_s^-(0)$. Uma vez que $P_{s\delta}^-(z)$ tem sido obtido, um novo valor para $P_{s\delta}^-(0)$, e o processo é repetido mais uma vez, a fim de concluir a aproximação de primeira ordem.

4.8.6 Emissão espontânea amplificada no oscilador laser

Nas EDO (4.58) e (4.59) que descrevem, respectivamente, a propagação do sinal laser no sentido direto e reverso, pode ser inserida a ASE (HARDY; ORON, 1997):

$$P_{ASE}(\lambda_s) = \Gamma_s \sigma_s^e(\lambda_s) N_2(z) P_0(\lambda_s). \quad (4.126)$$

A ASE é considerada um ruído para o sistema laser. $P_0(\lambda_s)$ é dada por:

$$P_0(\lambda_s) = \frac{2hc^2}{\lambda_s^3}. \quad (4.127)$$

4.9 Determinação do Comprimento Ótimo do Oscilador Laser

O comprimento ótimo do oscilador laser é obtido quando a potência do sinal próximo ao espelho de saída não aumenta nem diminui quando o comprimento é levemente alterado. Ou seja, para o bombeamento injetado em $z = 0$, com base na equação (4.58), o comprimento ótimo (L_{opt}) é obtido quando, em $z = L = L_{opt}$ (Fig. 20). Nessas condições a equação (4.60) se tornará a equação (4.128):

$$\left. \frac{dP_s^+}{dz} \right|_{z=L_{opt}} = [g_s(L_{opt}) - \alpha_s] P_s^+(L_{opt}) = 0, \quad (4.128)$$

e $g_s(z)$ é o ganho do sinal laser em $\lambda = \lambda_s$ e $\alpha(z) \equiv \alpha(z, \lambda_s)$, que é definido pela equação (4.129).

$$g_s(z) \cong \frac{g_0(z)}{1 + \frac{[P_s^+(z) + P_s^-(z)]}{P_{sat}}}, \quad (4.129)$$

sendo $g_0(z)$ descrito pela equação (4.130).

$$g_0(z) = \frac{N\Gamma_p \sigma_p^a P_p(z)}{(\nu_p/\nu_s) P_{sat}} - N\Gamma_s \sigma_a(\lambda_s). \quad (4.130)$$

Substituindo (4.129) em (4.128), utilizando a condição de contorno da equação (4.105), assim como (4.130) para $g_0(L_{opt})$ e (4.68) para $P_p(L_{opt})$, obtemos equação (4.131).

$$\frac{[g_0(0) + N\Gamma_s\sigma_a(\lambda_s)]e^{(-FL_{opt})} - N\Gamma_s\sigma_a(\lambda_s)}{1 + [(1 + R_2)P_s^+(L_{opt})/P_{sat}]} = \alpha_s, \quad (4.131)$$

onde $F \equiv \Gamma_p\sigma_p^a N + \alpha_p$.

Pode-se observar que $P_s^+(L_{opt})$ ainda é desconhecida em (4.131). No entanto, podemos usar a equação (4.116) como uma aproximação derivada da solução analítica aproximada que, por si só, não inclui a perda por espalhamento. Para obter uma expressão analítica, desprezamos o termo $N\Gamma_s\sigma_a(\lambda_s)L + \ln(1/\sqrt{R_1R_2})$ da equação (4.116), assumindo forte potência de bombeamento. Fazendo isso, e resolvendo para L_{opt} , finalmente obtemos uma equação (4.132) para o comprimento ótimo do oscilador laser da Fig. (20).

$$L_{opt} = -\frac{1}{F} \ln \left[\frac{\left(\frac{F}{\alpha_s}\right) \left[\frac{\alpha_s + N\Gamma_s\sigma_a(\lambda_s)}{g_0(0) + N\Gamma_s\sigma_a(\lambda_s)} + \tilde{R} \right]}{F/\alpha_s + \tilde{R}} \right], \quad (4.132)$$

onde \tilde{R} definimos pela equação (4.133).

$$\tilde{R} \equiv \frac{(1 + R_2)\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1}(1 - R_2) + \sqrt{R_2}(1 - R_1)}. \quad (4.133)$$

4.10 Modelamento do Mecanismo de Transferência de Calor do Oscilador Laser

Compreender a difusão térmica em fibras ópticas é muito importante para lasers de fibra de alta potência, onde a remoção do calor depositado no núcleo da fibra devido a defeitos quânticos é fundamental para a operação do laser. Soluções analíticas podem ser encontradas para difusão de calor em fibras ópticas cilíndricas. Assumindo que o calor é gerado apenas no centro do núcleo ativo, a solução indica uma distribuição quadrática de temperatura no núcleo e uma distribuição logarítmica no revestimento (KARIMI, 2018).

A fim de melhorar o desempenho do laser e diminuir os efeitos destrutivos térmicos, a evolução da temperatura deve ser determinada dentro do laser de fibra que depende do perfil de intensidade do feixe do bombeamento, propriedades térmicas (fibra de vidro e materiais de revestimento), geometria e meio de resfriamento (CARDOSO; SAMAD; MOTTA, 2021).

Em todas as fibras ópticas dopadas, os efeitos térmicos estão associados à absorção de uma quantidade finita de potência óptica pelo meio de ganho ativo. Se a relaxação eletrônica do dopante envolve processos não radiativos, calor é gerado. Para regimes de alta potência, os efeitos térmicos podem limitar a potência máxima de bombeamento que

pode ser fornecida à fibra e, portanto, a potência máxima de saída que pode ser extraída. Por sua vez, isso pode mitigar o sinal de semente máximo injetado em amplificadores de reforço e atenuadores de fibra (HANNA; MCCARTHY; SUNI, 1990).

Aqui, expressões explícitas para o comportamento térmico feito pelo bombeamento ou energia laser, bem como o calor depositado tanto dentro quanto fora do núcleo da fibra, são derivadas resolvendo analiticamente a equação de difusão de calor (BROWN; HOFFMAN, 2001), (KARIMI, 2018), (CARDOSO; SAMAD; MOTTA, 2021). Em termos gerais, consideramos apenas o caso em que as regiões do núcleo e do revestimento são concêntricas. Como ilustrado na Fig. 1, existem três regiões distintas para fibras de revestimento duplo que precisam ser abordadas: (I) o núcleo, (II) o revestimento interno e (III) as zonas de revestimento externo. As quantidades a , b e c indicam os raios do núcleo, interno e externo do revestimento, respectivamente.

Comumente, a forma geral da equação de condução de calor em um meio isotrópico para determinar a distribuição de temperatura 3D dependente do tempo pode ser escrita como:

$$\rho_m c_v \frac{\partial T(r, \varphi, z, t)}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T(r, \varphi, z, t) = Q(r, \varphi, z, t), \quad (4.134)$$

onde, T é a temperatura, a coordenada radial/axial é r/z , φ o ângulo azimutal e t denota o tempo. Além disso, κ é a condutividade térmica da fibra e a densidade de calor dissipada por unidade de volume que é criada no núcleo da fibra é exibida como $Q(r, \varphi, z, t)$. ρ_m e c_v são a densidade de massa do material e a capacidade de calor específico a volume constante, respectivamente. E z é a direção de propagação ao longo da fibra.

Em relação à Fig. 1, sob operação em regime estacionário ($\partial/\partial t = 0$), a equação do calor para um meio isotrópico (4.134) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 T(r) = -\frac{Q_0}{\kappa}. \quad (4.135)$$

Portanto, aplicando uma hipótese simplificadora, a equação acima pode ser exposta para três áreas distintas:

para $0 \leq r \leq a$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_1(r)}{\partial r} \right] = -\frac{Q_0}{\kappa_1}. \quad (4.136)$$

para $a \leq r \leq b$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_2(r)}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.137)$$

e para $b \leq r \leq c$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_3(r)}{\partial t} \right] = 0. \quad (4.138)$$

As temperaturas e suas derivadas devem ser contínuas ao longo das fronteiras (WU et al., 2008). Portanto, as condições de contorno multiponto das equações condutoras térmicas são dadas por $T_1(r = a) = T_2(r = a)$ e $T_2(r = b) = T_3(r = c)$. Com isso, teremos que

$$\kappa_1 \frac{dT_1(r)}{dr} \Big|_{r=a} = \kappa_2 \frac{dT_2(r)}{dr} \Big|_{r=a}, \quad (4.139)$$

$$\kappa_2 \frac{dT_2(r)}{dr} \Big|_{r=b} = \kappa_3 \frac{dT_3(r)}{dr} \Big|_{r=b}. \quad (4.140)$$

Além disso, a temperatura no centro do núcleo ($r = 0$) deve satisfazer:

$$\frac{dT_1(r)}{dr} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4.141)$$

Ainda, outra condição de contorno é que para $r = c$, onde a lei de resfriamento de Newton é governante, então $T_3(r)$ é descrita por (BROWN; HOFFMAN, 2001):

$$\kappa_3 \frac{\partial T_3(r)}{\partial r} \Big|_{r=c} = h_c [T_c - T_3(r = c)], \quad (4.142)$$

onde h_c é o total dos coeficientes de transferência de calor por convecção e radiação e T_c indica a temperatura do refrigerante. A solução direta das equações (4.136)–(4.138), sujeita às condições de contorno acima mencionadas, resulta nas seguintes expressões para as temperaturas nas regiões *I*, *II* e *III* (FAN et al., 2011):

para $0 \leq r \leq a$,

$$T_1(r) = T_0 - \frac{Q_0 r^2}{4\kappa_1}, \quad (4.143)$$

para $a \leq r \leq b$,

$$T_2(r) = T_0 - \frac{Q_0 a^2}{4\kappa_1} - \frac{Q_0 a^2}{2\kappa_2} \ln \left(\frac{r}{a} \right), \quad (4.144)$$

para $b \leq r \leq c$,

$$T_3(r) = T_0 - \frac{Q_0 a^2}{4\kappa_1} - \frac{Q_0 a^2}{2\kappa_2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{Q_0 a^2}{2\kappa_3} \ln \left(\frac{r}{b} \right). \quad (4.145)$$

A equação (4.143) mostra que na região do núcleo bombeado, a temperatura decresce com o quadrado de r , enquanto as equações (4.144) e (4.145) revelam que a

temperatura decresce com diferentes funções proporcionais ao logaritmo de r em cada um dos revestimentos. Além disso, T_0 (a temperatura do centro do núcleo), que está relacionada à temperatura do refrigerante, pode ser descrita como (FAN et al., 2011):

$$T_0 = T_c + \frac{Q_0 a^2}{2h_c c} + \frac{Q_0 a^2}{4\kappa_1} + \frac{Q_0 a^2}{2\kappa_2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{Q_0 a^2}{2\kappa_3} \ln\left(\frac{c}{b}\right). \quad (4.146)$$

Os resultados obtidos anteriormente podem ser facilmente estendidos para a deposição de calor não uniforme ou absorção de luz do bombeamento (MOHAMMED; SAGHAFIFAR; SOLTANOLKOTABI, 2014). Portanto, a equação (4.136), para $0 \leq r \leq a$, é modificada para a seguinte forma (XUE, 2011), (ZHANG; LIU; LI, 2013):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_1(r, z)}{\partial r} \right] = -\frac{Q(r, z)}{\kappa_1}, \quad (4.147)$$

A potência absorvida do bombeamento dentro do comprimento da fibra é expressa da seguinte forma:

$$\Delta P_{abs} = P_p(z) - P_p(z + dz) = \frac{dP_p(z)}{dz} \Delta z, \quad (4.148)$$

$$\Delta Q(r, z) = (1 - \eta) \Delta P_{abs}. \quad (4.149)$$

Portanto, utilizando a definição de potências de bombeamento para frente (avanço) e para trás (retorno) (CARDOSO; SAMAD; MOTTA, 2021) (LI et al., 2008), podemos concluir que:

$$Q(r, z) \cong Q(z) = \frac{\alpha(z) P_p(z)}{\pi a^2} (1 - \eta), \quad (4.150)$$

onde

$$\alpha(z) = \alpha_a(z) + \alpha_s, \quad (4.151)$$

$$\alpha(z) = \Gamma_p [\sigma_s N_2(z) - \sigma_a^s N] + \alpha_s, \quad (4.152)$$

onde $Q(z)$ representa a densidade de potência térmica ao longo da direção axial da fibra, $\eta = \frac{\lambda_s}{\lambda_p}$ é a eficiência quântica, $\alpha_a(z)$ denota o coeficiente de absorção e α_s indica a perda de espalhamento do sinal. Portanto, as temperaturas no núcleo e nos revestimentos podem ser derivadas empregando equações condutoras térmicas em estado estacionário sujeitas a condições de contorno, como se seguem (KARIMI, 2018):

para $0 \leq r \leq a$,

$$T_1(r, z) = T_0 - \frac{Q(z) a^2}{4\kappa_1}, \quad (4.153)$$

para $a \leq r \leq b$,

$$T_2(r, z) = T_0 - \frac{Q(z)a^2}{4\kappa_1} - \frac{Q(z)a^2}{2\kappa_2} \ln\left(\frac{r}{a}\right), \quad (4.154)$$

para $b \leq r \leq c$,

$$T_3(r, z) = T_0 - \frac{Q(z)a^2}{4\kappa_1} - \frac{Q(z)a^2}{2\kappa_2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{Q(z)a^2}{2\kappa_3} \ln\left(\frac{r}{b}\right). \quad (4.155)$$

Em termos gerais, os perfis de temperatura são significativamente afetados pela evolução da potência de bombeamento ao longo do comprimento da fibra. Por exemplo, a temperatura conduz ao longo das direções radial e axial da fibra nos modos de bombeamento direto e bidirecional. Portanto, alguns procedimentos de resfriamento ativo devem ser realizados no lado de entrada da fibra. Como seria de esperar, a distribuição radial do perfil de temperatura pode ser ignorada enquanto o calor significativo está se propagando na direção axial da fibra.

Essas mudanças na temperatura no interior da fibra dopada podem causar variações em seu índice de refração (CARDOSO; SAMAD; MOTTA, 2021), de acordo com a equação (4.156).

$$\Delta n(r, z) = \frac{dn}{dT} \Delta T(r, z), \quad (4.156)$$

onde $\frac{dn}{dT} = 1,21 \times 10^{-5} K^{-1}$ é o coeficiente óptico para sílica. As variações das temperaturas $\Delta T(r, z)$ que ocorrem, respectivamente, no núcleo e no revestimento da fibra (Fig. 1), são definidas como:

$$\Delta T_a(r, z) = \frac{Q(z)a^2}{4\kappa} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{2\kappa}{bh_c} \right], 0 \leq r \leq a, \quad (4.157)$$

$$\Delta T_b(r, z) = \frac{Q(z)a^2}{4\kappa} \left[\frac{2\kappa}{bh_c} - 2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right], a < r \leq b. \quad (4.158)$$

4.11 Efeitos Não-Lineares no Oscilador Laser

Efeitos não lineares resultantes de processos de espalhamento inelástico estimulado, como o espalhamento Brillouin estimulado (SBS) e espalhamento Raman estimulado (SRS), são limitações usuais para o dimensionamento de potência de sistemas de fibras dopadas com terras raras. O desempenho de lasers de fibra de frequência única é normalmente limitado pelo SBS. O limiar do SBS aumenta substancialmente com a largura de banda de emissão, de modo que SRS geralmente domina quando a largura de banda espectral excede $0,5 GHz$ (LIMPERT et al., 2007). Em 1972 R. G. Smith publicou seu trabalho seminal

sobre o limiar de espalhamento Raman estimulado em fibras passivas (SMITH, 1972). Nesse trabalho ele obteve uma fórmula simples para a estimativa deste limiar dada por:

$$P_{th} = 16 \frac{A_{eff}}{g_r L_{eff}}, \quad (4.159)$$

onde P_{th} é a potência do espalhamento Raman, A_{eff} é a área efetiva do modo fundamental na fibra conforme equação (4.52), g_r é o coeficiente de ganho Raman ($\approx 10^{-13} \text{ W/m}$ para fibras de sílica e luz polarizada) e L_{eff} , equação (4.160) é o comprimento efetivo de interação não-linear. A definição do limiar Raman implícita nesta fórmula é que o limiar é alcançado quando a luz espalhada Raman tem a mesma potência que o sinal na saída da fibra. Esta fórmula muito conhecida é amplamente utilizada pela comunidade de fibra óptica.

$$L_{eff} = \frac{1}{P_p(0)} \int P_p(z) dz = \int e^{-\alpha z} dz = \frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha}, \quad (4.160)$$

onde $P_p(0)$ é a potência de bombeamento em $z = 0$, $P_p(z)$ é a potência de bombeamento dentro da DCF na posição z do eixo longitudinal da DCF, L é o comprimento total da fibra ativa e α é o coeficiente de atenuação da fibra no comprimento de onda do sinal laser. O comprimento efetivo é próximo a L quando a fibra é curta ou quando a absorção é insignificante ($\alpha_p L \ll 1$). A equação (4.159) pode ser reescrita para calcular o limiar Raman na intensidade I_{th} , o que leva à seguinte expressão (JAUREGUI; LIMPET; TÜNNERMANN, 2011):

$$I_{th} = \frac{16}{g_r L_{eff}}. \quad (4.161)$$

Além disso, um novo parâmetro β será introduzido. Este parâmetro é a relação entre a potência Raman e o sinal na saída da fibra no limiar. Assim, na definição clássica do limiar Raman $\beta = 1$. No entanto, para muitas aplicações de laser de fibra, esse limite pode ser muito alto, porque já teria ocorrido um esgotamento considerável do sinal. Assim, no contexto de lasers de fibra de alta potência pode ser mais conveniente definir $\beta = 0,01$ como proposto em (JAUREGUI; LIMPET; TÜNNERMANN, 2009). Nesse contexto, uma boa aproximação para a potência de limiar SRS é dada por:

$$P_c = \left[\frac{20,3 - \ln(\beta) + \ln\left(\frac{A_{eff}}{g_R L_{eff}}\right)}{g_R L_{eff}} \right] A_{eff}. \quad (4.162)$$

A potência limite para SRS em nosso sistema pode ser estimada com a equação (4.162) como $4,870 \text{ kW}$, que está bem acima do valor de 1 kW .

4.12 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os desenvolvimentos dos modelamentos que abrangem o sistema físico e o mecanismo de transferência de calor do oscilador laser. Foi realizado o equacionamento que descreve o dimensionamento do comprimento ótimo do oscilador (12 m), a potência crítica de operação do oscilador acoplada com os efeitos não-lineares que podem influenciar no desempenho do oscilador. Também foi apresentada a relação da susceptibilidade atômica complexa com o índice de refração e a absorção do sistema, influenciando diretamente as propriedades ópticas da fibra. Além disso, foram discutidos o ganho e o índice de refração do sistema laser. Foi observado que o ganho refere-se à amplificação do feixe laser e está relacionado à inversão populacional, enquanto o índice de refração descreve como a velocidade da luz é modificada no meio.

5 MÉTODOS

5.1 Formalismo Aplicado na Modelagem do Sistema Laser

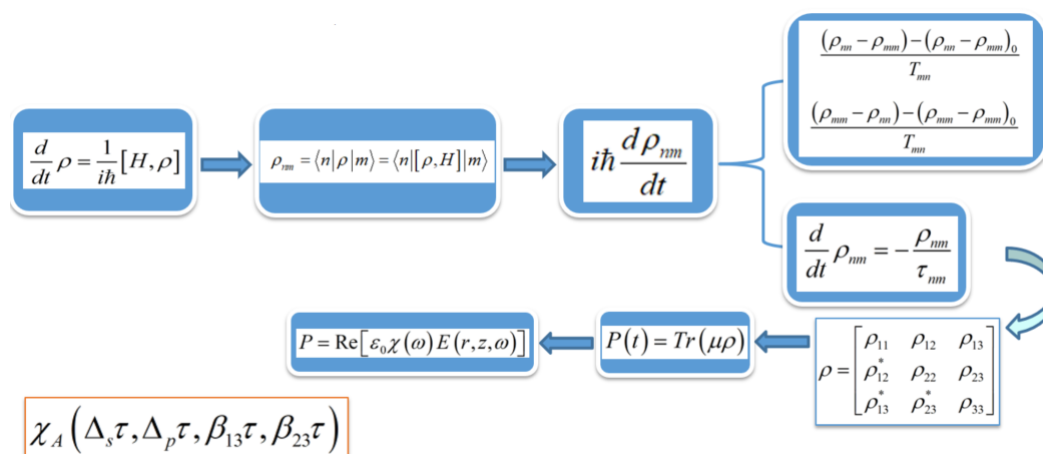
A Fig. 22 mostra o formalismo que foi utilizado na condução deste trabalho para determinar a grandeza macroscópica, $\chi(\omega) = \chi_A$. Este parâmetro traduz o fenômeno da emissão laser do sistema quântico de três níveis de energia formado por um *ensemble* de átomos de itérbio, sendo este o dopante (meio ativo) que encontra-se no núcleo da fibra óptica. Para a descrição desse fenômeno físico foi utilizada uma abordagem semiclássica, na qual o sistema quântico foi descrito pela equação de Schrödinger da mecânica quântica, $\frac{d\rho}{dt}$, e o sistema clássico foi tratado pelas equações de Maxwell. A mecânica quântica foi empregada para descrever o sistema a partir de uma abordagem microscópica. Foi adotada a representação da energia da matriz densidade, $\rho_{nm} = \langle n | \rho | m \rangle$, na qual cada elemento da matriz densidade foi obtido pelo operador hamiltoniano, levando em consideração os auto-estados do sistema não-perturbado ($H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$). Na derivação da equação temporal, $i\hbar \frac{d\rho_{nm}}{dt}$, para os elementos da matriz densidade (ρ_{nm}), tornou-se imperativo incluir os termos associados aos mecanismos colisionais elásticos, inelásticos e à emissão espontânea.

A polarização macroscópica do material desempenha um papel crucial na interação com o campo eletromagnético, podendo resultar em atenuação ou amplificação do feixe laser. Esta polarização está diretamente relacionada ao traço do operador densidade, $T_r(\mu\rho)$. De acordo com os princípios da mecânica estatística quântica, os elementos da matriz densidade, quando multiplicados pelo momento de dipolo μ , estão associados a uma grandeza macroscópica conhecida como susceptibilidade elétrica, que quantifica a polarização macroscópica do meio como resposta ao campo elétrico externo.

A susceptibilidade atômica complexa (χ_A) encontrada está em função de quatro parâmetros do laser. O modelo proposto possibilita prever como o oscilador laser se comportará diante das modificações nesses parâmetros, a saber:

- Desvio de frequência normalizada do sinal laser ($\Delta_s\tau$);
- Desvio de frequência normalizada do sinal de bombeio ($\Delta_p\tau$);
- Intensidade do bombeio normalizada ($|\beta_{13}\tau|^2$); e
- Intensidade do sinal laser normalizada ($|\beta_{23}\tau|^2$).

Figura 22 – Fluxograma do formalismo empregado para encontrar a susceptibilidade elétrica.



Fonte: autor da dissertação.

Na Fig. 23, o par de equações (lado esquerdo) representa o modelo geral dos campos eletromagnéticos em duas frequências distintas que se propagam na fibra óptica, ω_p e ω_s , relacionadas aos sinais de bombeamento e laser, respectivamente. Estes interagem com o sistema atômico por meio da susceptibilidade elétrica. Se na equação do bombeamento (E_p) a parte imaginária de $\chi_A(\omega_p)$ corresponder à absorção, na equação do sinal laser (E_s) espera-se que corresponda ao ganho (ou atenuação) do sinal laser. A partir do par de equações do modelo geral dos campos eletromagnéticos, foi possível encontrar um par de equações (lado direito) para um modelo mais simplificado dos campos eletromagnéticos, considerando como hipóteses a aproximação paraxial e o fator de preenchimento radial do bombeamento e do sinal laser (Γ_p e Γ_s). É possível observar que ambos os pares de equações dependem da grandeza macroscópica (susceptibilidade elétrica) encontrada por meio do formalismo aplicado ao desenvolvimento da solução do processo laser a dois fótons.

Figura 23 – Campos eletromagnéticos dependentes da susceptibilidade atômica nas suas formas geral e simplificada.

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega_p^2}{v^2} + \mu_0 \omega_p^2 \chi_A(\omega_p) \right] \right\} E_p = 0$$

$$\frac{dE_p(z)}{dz} = -\Gamma_p \frac{\omega_p}{2nc} (\chi_p'' + i\chi_p') E_p(z)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega_s^2}{v^2} + \mu_0 \omega_s^2 \chi_A(\omega_s) \right] \right\} E_s = 0$$

$$\frac{dE_s(z)}{dz} = -\Gamma_s \frac{\omega_s}{2nc} (\chi_s'' + i\chi_s') E_s(z)$$

Fonte: autor da dissertação.

As equações de taxa, representadas pelas Eqs. (4.58)-4.61, são encontradas a

partir do modelo mais simplificado dos campos eletromagnéticos. Portanto, conclui-se que o modelo apresentado, utilizando o formalismo da matriz densidade, é mais abrangente, pois pode oferecer duas formas distintas de investigar o sistema laser.

5.2 Parâmetros laser

Na Tabela 3 estão descritos os parâmetros laser da fibra de alta potência dopada com itérbio e seus coeficientes térmicos que foram empregados nas simulações do projeto do oscilador laser.

Tabela 3 – Parâmetros da fibra óptica e térmicos usados para simulação

Símbolo	Parâmetros	Valores
L	Comprimento da fibra ativa	12 m
n_1	Índice de refração do núcleo	1,47
n_2	Índice de refração do revestimento interno	1,46
n_3	Índice de refração do revestimento externo	1,45
a	Raio do núcleo da fibra ativa	20 μm
b	Raio do revestimento interno	300 μm
c	Raio do revestimento externo	400 μm
A_{eff}	Área efetiva do núcleo	$900 \times 10^{-12} m^2$
$P_p^+(z)$	Potência de bombeamento direto	500 W
$P_p^-(z)$	Potência de bombeamento reverso	500 W
λ_s	Comprimento de onda do laser	1.018 μm
λ_p	Comprimento de onda do bombeamento	976 μm
Γ_s	Fator de preenchimento do sinal laser	0,82
Γ_p	Fator de preenchimento do bombeamento	0,01
$N_{Yb} = N$	Concentração de Yb^{3+}	$6 \times 10^{25} m^{-3}$
τ_2	Tempo de vida do Yb^{3+}	1 ms
σ_p^a	Seção de choque de absorção do bombeamento	$6 \times 10^{-25} m^{-2}$
σ_p^e	Seção de choque de emissão do bombeamento	$2,5 \times 10^{-27} m^{-2}$
σ_s^a	Seção de choque de absorção do laser	$1,40 \times 10^{-27} m^{-2}$
σ_s^e	Seção de choque de emissão do laser	$2,0 \times 10^{-25} m^{-2}$
α_p	Coefficiente de perdas do bombeamento	$3,0 \times 10^{-3} m^{-1}$
α_s	Coefficiente de perdas do sinal laser	$5,0 \times 10^{-3} m^{-1}$
R_1	Refletividade da <i>FBG</i> de fundo	0,98
R_2	Refletividade da <i>FBG</i> de saída	0,04
κ	Coefficiente de condução de calor	$1,38 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
h_c	Coefficiente de convecção	$10 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
δ	Constante de Stefan Boltzmann	$5,67 \times 10^{-8} W(m^2K^4)^{-1}$
ε	Emissividade	0,95
T_c	Temperatura ambiente	298 K

5.3 Oscilador Laser nas Configurações Unidirecional e Bidirecional

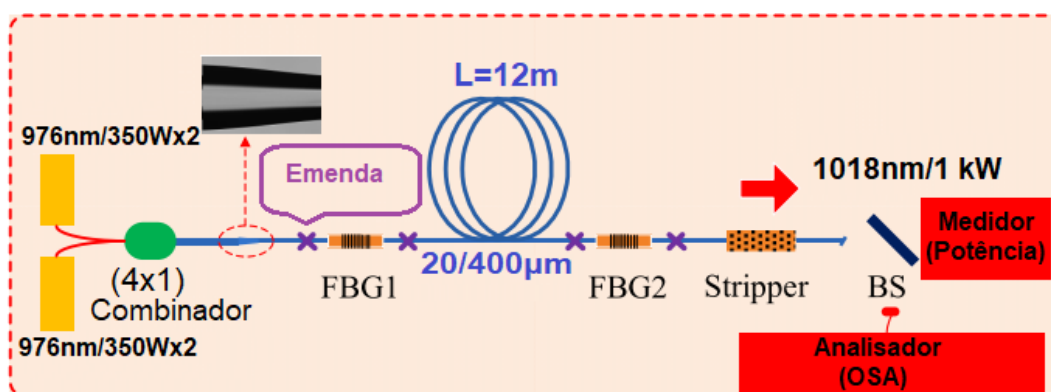
De posse do modelo teórico baseado na matriz densidade, o arranjo experimental poderá ser dimensionado para validar o modelo. Inicialmente deve ser construído um arranjo contemplando somente o bombeamento unidirecional (Fig. 24). No arranjo proposto um combinador de potência 4×1 acoplará os lasers de diodo, com comprimento de onda estabilizado em $\lambda_p = 976$ nm, à rede de Bragg em fibra FBG_1 , dimensionada para reflexão total em $\lambda_s = 1018$ nm e transmissão total para o comprimento do bombeamento. Segue-se então a fibra ativa, cujo comprimento ótimo (12 m) foi determinado pelo modelo teórico a fim de obter o máximo aproveitamento da potência de bombeamento. Na sequência o decapador do revestimento da fibra, em inglês *cladding mode stripper (CMS)*, cuja função é permitir a extração de calor da fibra devido à radiação de bombeamento não absorvida e ao desvio de Stokes, possibilitando, desta forma, a operação estável do laser e, também, um aumento da qualidade do feixe (M^2). A investigação poderá ser conduzida a fim de determinar a contribuição de dois parâmetros para garantir uma elevada potência laser de saída. Estes parâmetros serão o comprimento ótimo da fibra ativa e a refletividade da rede de Bragg de saída, e servirão como parâmetros para realizar os experimentos nas duas configurações de bombeamento, conforme ilustrados nas Figs. (24) e (25).

O oscilador laser poderá composto de uma DCF dopada com Yb^{+3} , um par de redes de Bragg projetadas para $\lambda_s = 1018$ nm, fontes de bombeamento utilizando lasers de diodo com comprimento de onda estabilizado em $\lambda_p = 976$ nm. Estudos preliminares, como mostrado por (XIAO et al., 2012), indicaram que uma fibra óptica com razão núcleo/revestimento de $20/400 \mu m$, e abertura numérica de 0,06 para o núcleo e 0,46 para o revestimento interno deverá atender ao objetivo e servirá de valor inicial.

5.3.1 Oscilador laser em regime de bombeamento unidirecional

Para a montagem do oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional (Fig. 24) serão necessários quatro diodos laser estabilizados em 976 nm e uma potência ajustada em 350 W, para cada diodo, na entrada do combinador (4×1), totalizando uma potência de bombeamento de 1,4 kW, uma fibra dopada com itérbio com comprimento de $L = 12$ m e razão núcleo/revestimento de $20/400 \mu m$, duas redes de Bragg (FBG_1 e FBG_2), com valores de refletividades conforme especificadas na Tabela 3.

Figura 24 – Oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional

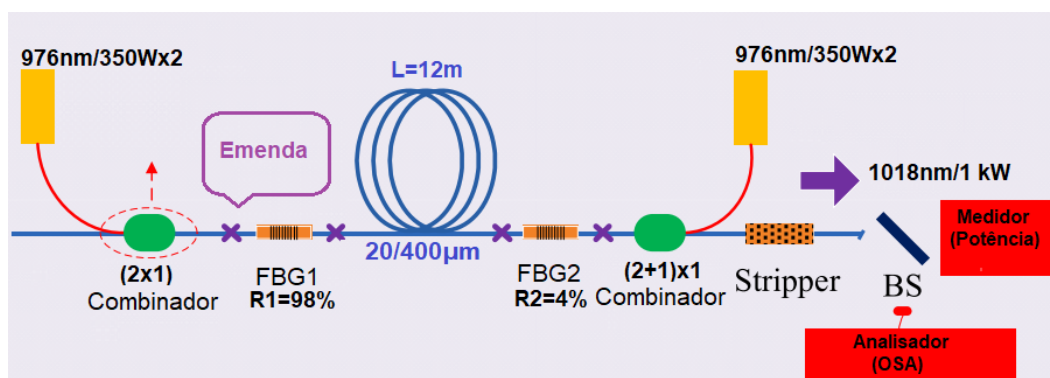


Fonte: autor da dissertação.

5.3.2 Oscilador laser em regime de bombeamento bidirecional

Após o arranjo experimental ter sido montado e caracterizado (Fig. 24), um segundo arranjo experimental deverá ser montado de maneira a permitir a implementação do bombeamento bidirecional (Fig. 25), a fim de possibilitar demonstrar que a estrutura de bombeamento bidirecional em laser de fibra óptica dopada com Yb^{+3} pode alcançar uma distribuição de temperatura mais uniforme nas direções axial e radial do núcleo-revestimento da fibra (Fig.70) comparada com o regime de bombeamento unidirecional. Em cada extremidade da fibra, na entrada do combinador (Fig. 25), serão colocados dois diodos laser de 976 nm e uma potência ajustada de 350 W (em cada diodo), totalizando uma potência total de bombeamento de 1,4 kW. Em todas as configurações dos osciladores foi estimada perda total de 10%.

Figura 25 – Oscilador laser configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

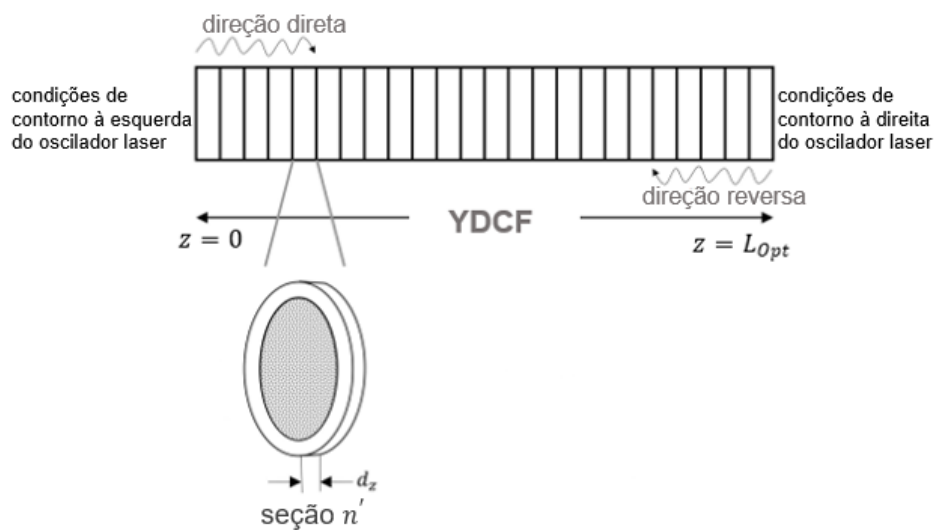
5.4 Implementação Computacional

Trabalhar com um modelo numérico é vantajoso pois este fornece uma compreensão do sistema sob investigação e permite realizar uma ampla gama de experimentos para otimizar o design do dispositivo e prever suas limitações. Usar um bom modelo ajuda a prever as características do laser de fibra sem realizar experimentos, que podem ser difíceis de realizar em condições de laboratório. A simulação do laser de fibra requer a solução de dois grupos de equações, as equações de taxa do meio ativo e a equação de propagação para o campo óptico dentro da cavidade. As equações de taxa representam as múltiplas interações entre o campo óptico de propagação e os íons de terras raras, bem como as interações íon-íon. As equações de propagação também são um sistema de equações diferenciais que descreve a variação do bombeamento, do laser e dos campos de emissão espontânea amplificada em função da posição no meio de ganho. Dependendo do tipo de laser, essas equações podem ser diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais de tempo e posição. Finalmente, para resolver as equações, as condições de contorno apropriadas devem ser usadas. As condições de contorno dependem do regime de operação do laser de fibra, que neste trabalho é *CW*. Como as equações diferenciais (4.58)–(4.61), que descrevem as propagações de fótons dos sinais de bombeamento e laser, estão na forma (KARIMI; FARAHBOD, 2014):

$$\frac{dP(z)}{dz} = f[z, P(z)], \quad (5.1)$$

foi empregado o método Runge-Kutta de quarta ordem para encontrar as suas soluções. As soluções das equações (4.58)–(4.61) fornecem as distribuições das potências de bombeamento e do sinal laser ao longo do comprimento L da YDCF. Portanto, para encontrar essas quantidades a fibra de ganho é dividida em várias seções conforme ilustrado na Fig. 26. O software Matlab foi empregado para realizar todo o processamento matemático e as plotagens dos principais parâmetros do sistema oscilador laser.

Figura 26 – Oscilador laser de fibra dupla dopada com Yb dividida em várias seções Δz .



Fonte: autor da dissertação.

5.5 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as configurações unidirecional e bidirecional dos osciladores laser e o método matemático utilizado na implementação computacional para as soluções das equações de taxas e nas análises do mecanismo térmico, do índice de refração e do fluxo de calor no oscilador laser.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

6.1 Introdução ao Capítulo

São apresentadas as simulações computacionais que resultaram do modelo teórico desenvolvido para: a susceptibilidade elétrica, o ganho por unidade de comprimento na direção axial, as equações de taxa, as equações térmicas e o comprimento ótimo do oscilador laser.

6.2 Comportamento da Susceptibilidade Elétrica

Para analisar o comportamento de $\chi''(\omega_s)$ as curvas que se seguem foram parametrizadas. Desta forma, a equação (2.94), após o seu lado direito ser multiplicado por τ^2/τ^2 , assume a seguinte forma:

$$\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0} = \frac{(\beta_{13}\tau)^2}{(\gamma\tau)^2} \xi_{\omega_{sm}}, \quad (6.1)$$

onde $\xi_{\omega_{sm}}$ pode ser reescrito como

$$\xi_{\omega_{sm}} = \left\{ \frac{1}{1+(y-x)^2} + \frac{1}{1+(y+x)^2} + \frac{2(y^2-x^2)(1+2y^2)-2}{(1+4y^2)[1+(y-x)^2][1+(y+x)^2]} \right\}, \quad (6.2)$$

onde

$$x = \Omega\tau = \frac{1}{2}\Delta_p\tau - \Delta_s\tau, \quad (6.3)$$

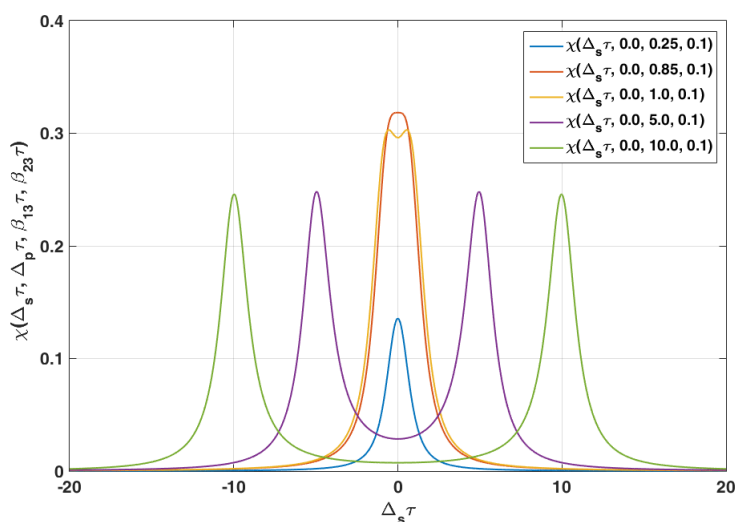
$$y = \gamma\tau = \frac{1}{2}[(\Delta_p\tau)^2 + (2\beta_{13}\tau)^2]^{1/2}. \quad (6.4)$$

A Fig. 27 mostra o comportamento $\chi''(\omega_s)$ em função da dessintonia do sinal laser para diferentes potências de bombeamento. À medida que a potência aumenta de $\beta_{13}\tau = 0,25$ até o valor $\beta_{13}\tau = 0,85$ o valor de $\chi''(\omega_s)$, também aumenta, e ocorre um alargamento espectral. A partir do valor de $\beta_{13}\tau = 0,85$, o valor de pico de $\chi''(\omega_s)$ diminui e se divide em dois, e para $\beta_{13}\tau \geq 1$ o sistema absorve fora da sintonia com o campo de bombeio de forma simétrica em relação a $\Delta_s\tau = 0$. A Fig. 27, também, mostra o fenômeno da separação dos picos de $\chi''(\omega_s)$ para vários valores da potência de bombeamento, e que o sistema quântico responde de maneira idêntica para um desvio de frequência positivo ou negativo. Com o aumento da potência de bombeamento a separação dos picos de torna mais pronunciada. A frequência de separação, $2\beta_{13}\tau$, é a frequência das oscilações de Rabi.

Para o bombeamento fora da ressonância, $\Delta_p\tau \neq 0$, Fig. 28, e para reduzidas intensidades de sinal $\beta_{13}\tau \ll 1$, $\chi''(\omega_s)$ apresenta um comportamento distinto daquele para $\Delta_p\tau = 0$, podendo-se observar a existência de dois picos Lorentzianos. À medida que a intensidade do bombeamento aumenta, os picos se tornam mais pronunciados, simétricos em relação $\Delta_s\tau = \Delta_p\tau/2$, e se afastam.

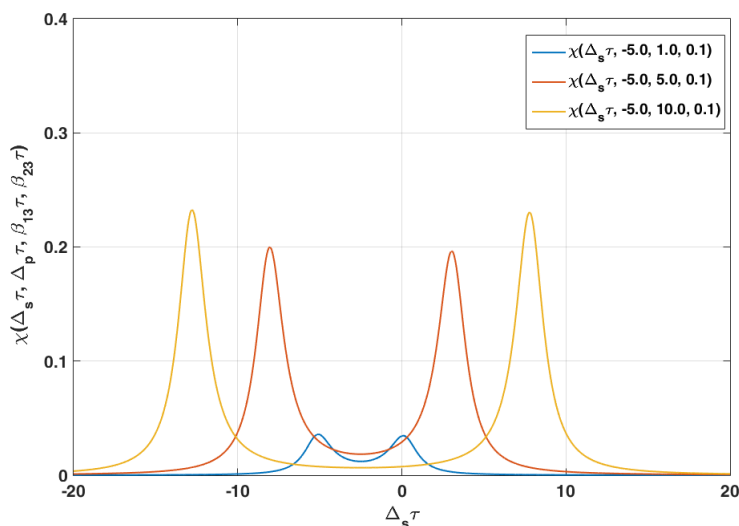
Tendo em vista que $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ é proporcional à $\chi''(\omega_s)$ é também uma função dos quatro parâmetros: $\beta_{13}\tau$, $\Delta_p\tau$, $\beta_{23}\tau$ e $\Delta_s\tau$. Desta forma é de relevância, investigar sua dependência com eles. Seja inicialmente considerar o bombeamento ressonante, isto é, $\Delta_p\tau = 0$, e calcular a dependência de $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ com função de $\Delta_s\tau$

Figura 27 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{32}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento em ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = 0$.



Fonte: autor da dissertação.

Figura 28 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{32}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico, $\Delta_p\tau = -5$.

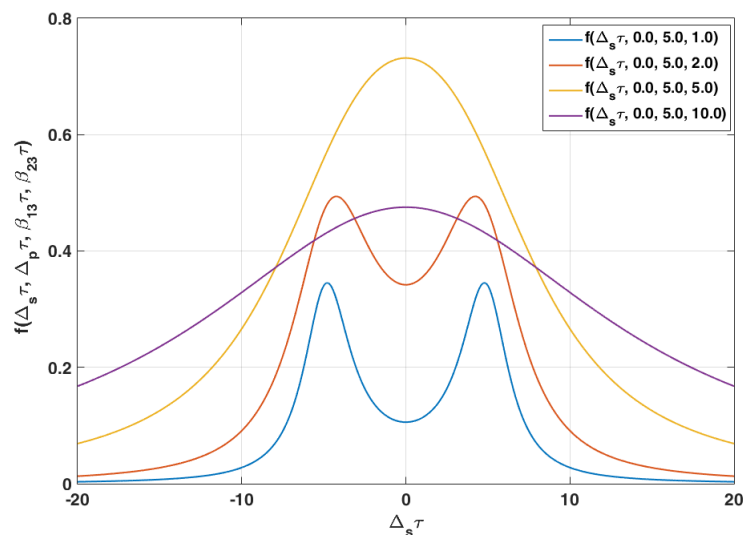


Fonte: autor da dissertação.

Tendo como parâmetro $\beta_{23}\tau$ e construindo as curvas mostradas nas Figs. 29-34 para $\beta_{13}\tau = 5,0$, $\beta_{13}\tau = 2,0$, $\beta_{13}\tau = 1,0$ e $\beta_{13}\tau = 0,5$, respectivamente. As Figs. 28 e 29 mostram que há uma separação dos picos para pequenos valores de $\beta_{23}\tau$, e com o aumento de $\beta_{23}\tau$, os picos ficam mais largos e se deslocam em direção a $\Delta_s\tau = 0$. Pode-se, também, observar que à medida que a potência do sinal se aproxima da potência do bombeamento, isto é, $\beta_{13}\tau \approx \beta_{23}\tau$, o vale torna-se mais raso e, por fim, os dois picos se fundem. Para um aumento adicional na potência o sinal somente permanece um único pico para $\Delta_s\tau = 0$. Outro ponto é que para um dado valor de potência de bombeamento $\beta_{13}\tau$, há um determinado valor de potência de sinal $\beta_{23}\tau$, que torna $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ um máximo e que, um acréscimo adicional em $\beta_{23}\tau$, $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ começa a decrescer. Este é um ponto que poderá merecer investigações adicionais com o objetivo de maximizar um sistema de três níveis. As Figs. 29-34 ilustram a existência deste máximo.

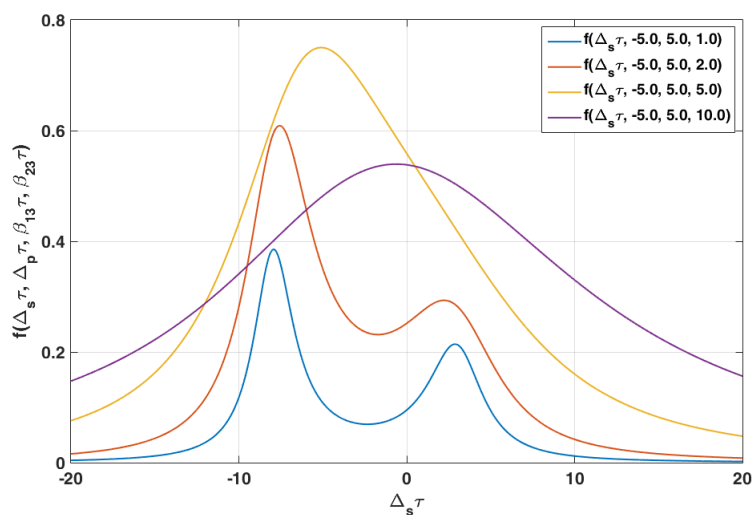
Fora da ressonância, é possível observar um comportamento curioso na curva de $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$. Por meio da comparação das curvas das Figs. 29 e 30 é possível observar que para os mesmos valores de $\beta_{23}\tau$ e $\beta_{13}\tau$, a altura do pico de $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ é ligeiramente maior para o bombeamento fora da sintonia. Isto implica que para um dado valor de $\beta_{23}\tau$ e $\beta_{13}\tau$, o valor ótimo de $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ é encontrado fora da ressonância ao invés do bombeamento ressonante.

Figura 29 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 5, 0$.



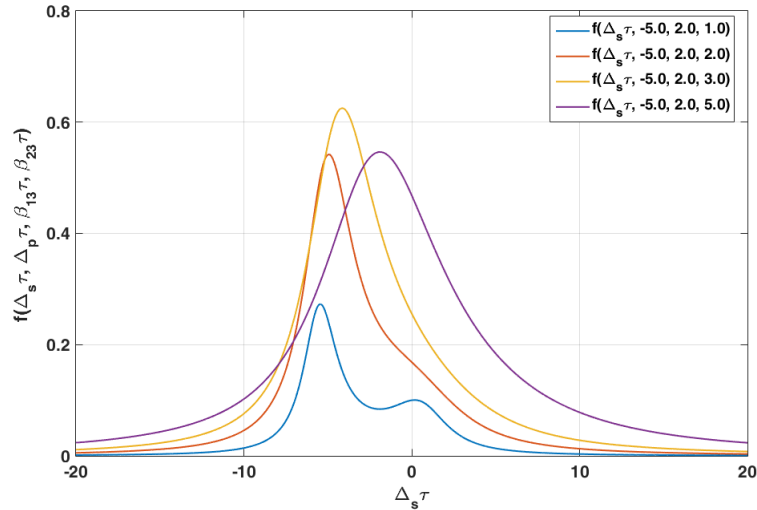
Fonte: autor da dissertação.

Figura 30 – Comportamento de $\frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = -5$, para a intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 5$.



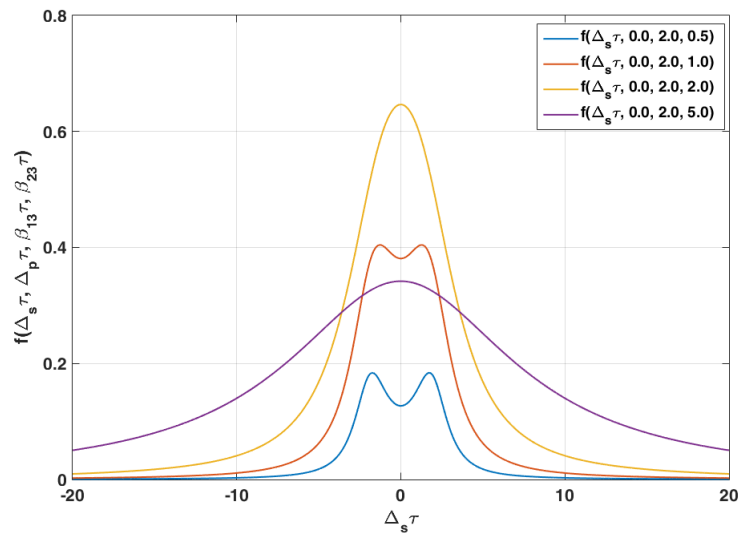
Fonte: autor da dissertação.

Figura 31 – Comportamento de $\frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = -5$, para a intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2$.



Fonte: autor da dissertação.

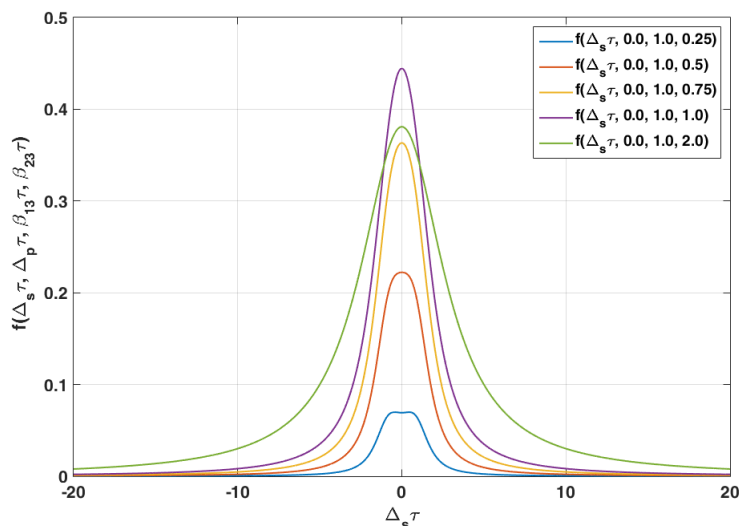
Figura 32 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 2, 0$.



Fonte: autor da dissertação.

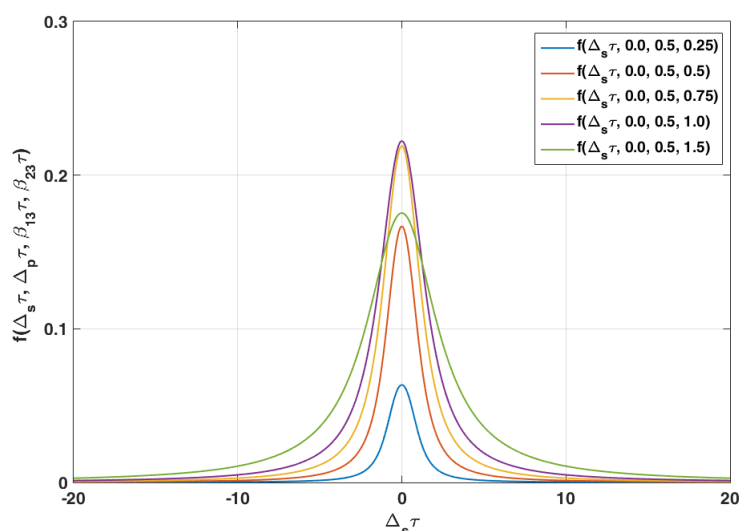
A Fig. 33 este modelo em estudo permite uma descrição quantitativa do sistema atômico quando se trabalha, inclusive, em regime de pequenos sinais. O sistema atinge ganho máximo em $\beta_{13}\tau = \beta_{23}\tau = 1$.

Figura 33 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 1, 0$.



Fonte: autor da dissertação.

Figura 34 – Comportamento de $f(\Delta_s\tau, \Delta_p\tau, \beta_{13}\tau, \beta_{32}\tau) = \frac{2\tau}{\hbar\omega_s(\rho_{11}-\rho_{33})_0} \frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$ e $\beta_{13}\tau = 1, 5$.

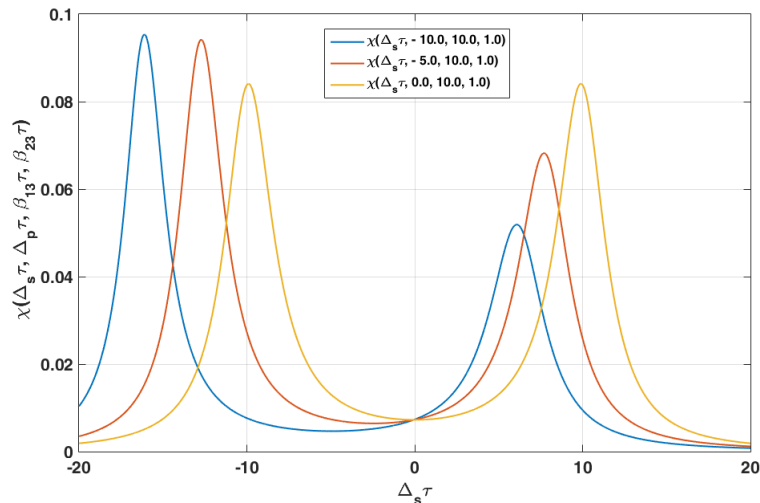


Fonte: autor da dissertação.

Consideremos agora o comportamento de $\chi''(\omega_s)$ com o bombeamento fora da ressonância, isto é, $\Delta_p\tau \neq 0$. A Fig. 35 mostra que para $\beta_{13}\tau \gg 1$ e $\beta_{23}\tau \geq 1$ o comportamento de $\chi''(\omega_s)$ é assimétrico. Como já apontado, para $\Delta_p\tau = 0$, a curva de $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ em função de $\Delta_s\tau$ aumenta de amplitude com o aumento da potência do sinal $\beta_{13}\tau$, alcança

seu máximo e, a partir desse valor, começa a decrescer. Um comportamento similar pode ser observado nas Figs. 30 e 31. À medida que $\beta_{23}\tau$ aumenta, mas mantendo a desigualdade $\beta_{23}\tau < \beta_{13}\tau$, os dois picos estão presentes, mas com amplitudes diferentes, sendo maior o pico para a dessintonia negativa (esquerda). Com o aumento adicional de $\beta_{23}\tau$, o pico para a dessintonia negativa (direita) desaparece gradualmente e $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ cresce em direção a seu valor máximo. Para grandes valores de $\beta_{23}\tau \approx 10$, $\frac{dI(\omega_s)}{dz}$ alarga, reduz a amplitude e torna-se centrado nas proximidades de $\Delta_s\tau = 0$.

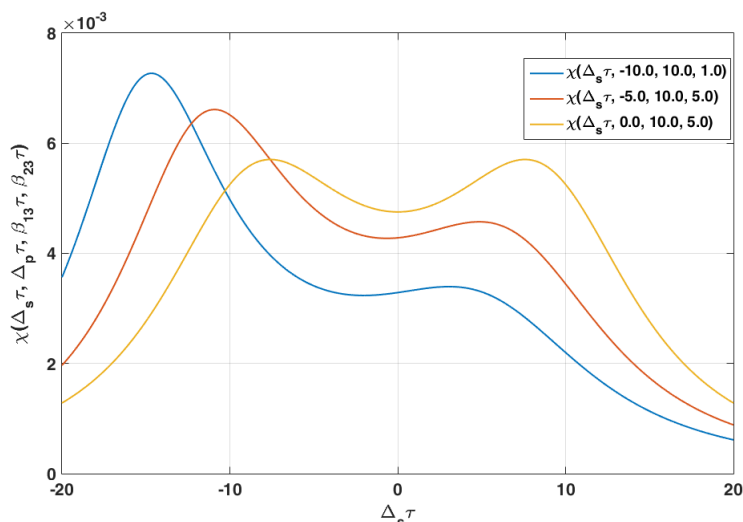
Figura 35 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$ e $\beta_{23}\tau = 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância ($\Delta_p\tau = -10$ e $\Delta_p\tau = -5$) e em sintonia ($\Delta_p\tau = 0$) com o sistema atômico.



Fonte: autor da dissertação.

Na Fig. 36, em $\Delta_p\tau \neq 0$ a absorção perde a simetria e $\chi''(\omega_s)$ diminui a medida que $\Delta_s\tau \gg 0$, enquanto na sintonia de bombeio ($\Delta_p\tau = 0$) os picos são simétricos em relação a $\Delta_s\tau = 0$ (curva amarela).

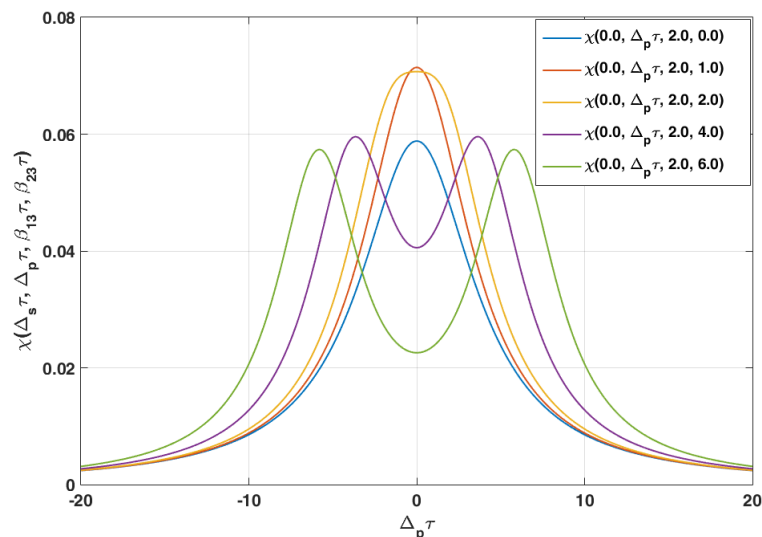
Figura 36 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$ e $\beta_{23}\tau = 5$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância ($\Delta_p\tau = -10$ e $\Delta_p\tau = -5$) e em sintonia ($\Delta_p\tau = 0$) com o sistema atômico.



Fonte: autor da dissertação.

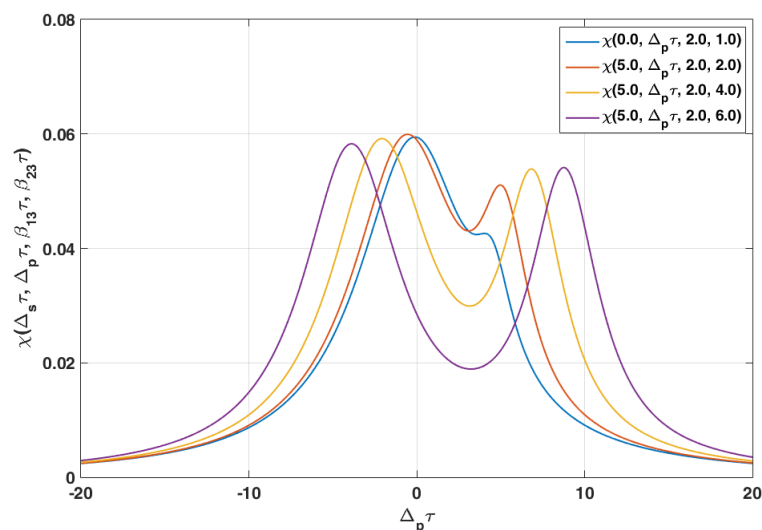
Na Fig. 37 o comportamento de $\chi''(\omega_p)$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$ é investigado para $\beta_{13}\tau = 2$ e $\Delta_s\tau = 0$, para vários valores da intensidade do sinal $\beta_{23}\tau$. Pode-se observar o feito da separação dos picos em $\chi''(\omega_p)$ para valores de elevados de $\beta_{23}\tau$, isto é $\beta_{23}\tau > 2$. A Fig. 37 é similar à Fig. 38, exceto pela perda de sintonia do sinal, isto é, $\Delta_s\tau = 5$. Para pequenos valores de $\beta_{23}\tau$, isto é, $\beta_{23}\tau < 0,1$, o valor de $\Delta_s\tau$ quase não afeta a forma de linha de absorção tendo em vista que nessas condições o sistema se comporta com um sistema de dois níveis. Contudo para $\beta_{23}\tau \geq 1$, a emissão fora da ressonância em ω_s afeta a curva de absorção de maneira similar aos efeitos de bombeamento fora da ressonância afeta a forma da linha de emissão estimulada. Isto é, há uma assimetria pronunciada introduzida na curva de absorção da emissão fora da ressonância. As Figs. 37 e 38 indicam que a emissão fora da ressonância conduz a uma separação de picos da curva de $\chi''(\omega_p)$.

Figura 37 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_p)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 0$, para uma intensidade do campo elétrico do bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$.



Fonte: autor da dissertação.

Figura 38 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi''(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 5, 0$, para uma intensidade do campo elétrico do bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$.

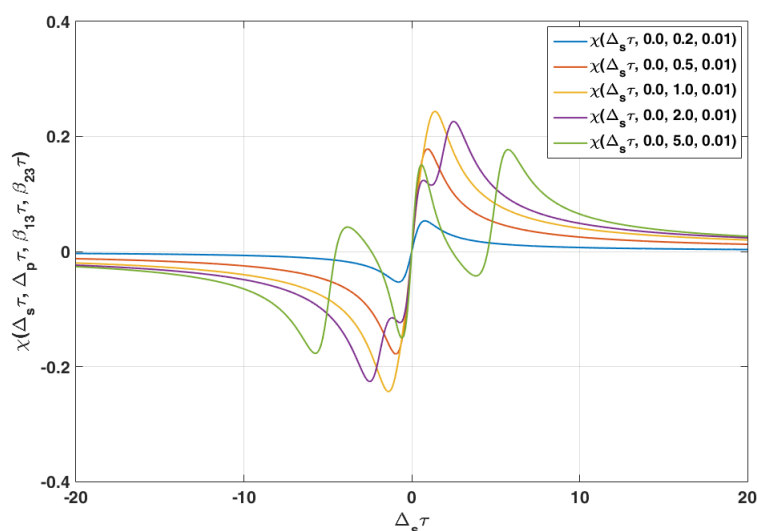


Fonte: autor da dissertação.

Fora da frequência de sintonia (Fig. 39), $\chi'(\omega_s)$ é praticamente nula. Isto significa que não há mudança no índice de refração. Mas próximo da sintonia, devido ao aumento de interação entre o sistema quântico e o campo do bombeio ($\beta_{13}\tau$), há influência na mudança do índice de refração. A variação abrupta do índice de refração torna-se mais acentuada

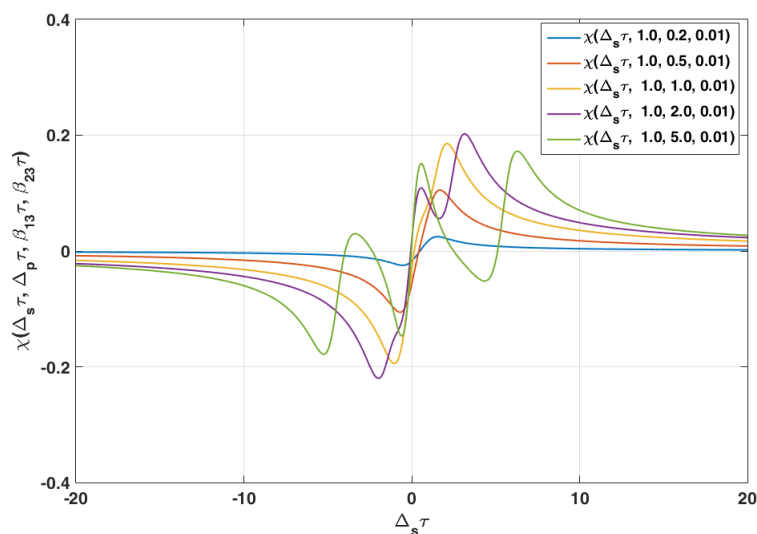
(Fig. 40). O sistema fica praticamente transparente quando $\Delta_s\tau = 0$, mas a amplitude de $\chi'(\omega_s)$ permanece praticamente inalterada.

Figura 39 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia com o sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\Delta_p\tau = 0$, para uma fraca intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau \ll 1$.



Fonte: autor da dissertação.

Figura 40 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{23}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = 1, 0$.

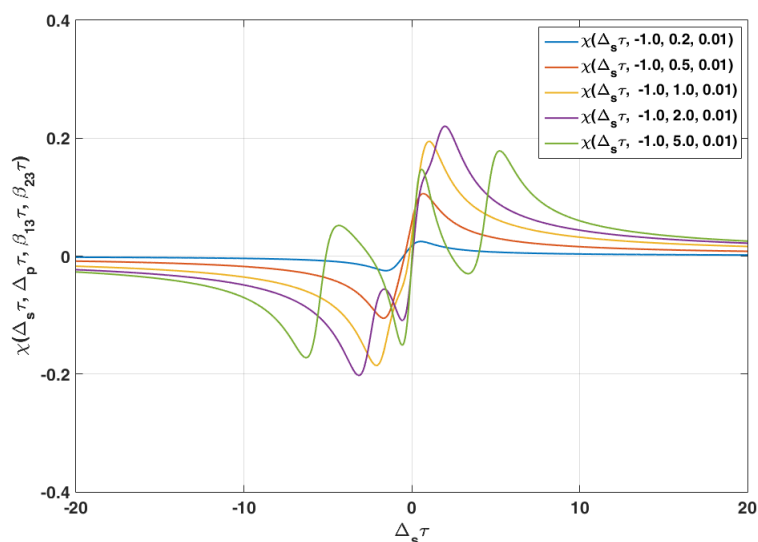


Fonte: autor da dissertação.

Mantendo o sistema nas condições da situação anterior (Fig. 40), mas em dessintonia com o campo de bombeamento ($\Delta_p\tau = -1$), $\chi'(\omega_s)$ apresenta praticamente a

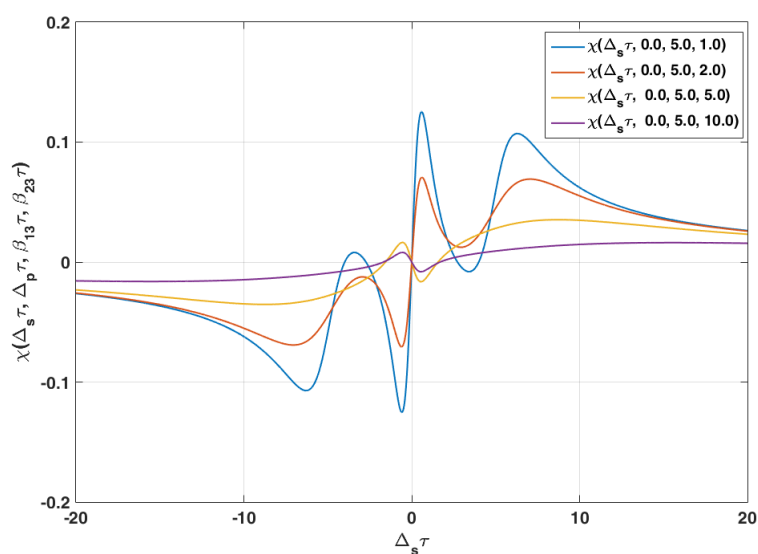
mesma amplitude [0,2;-0,2] (Fig. 41). No entanto, o índice de refração apresenta menores mudanças em sua amplitude quando o sistema atômico entra em sintonia com o campo de bombeamento e na presença de elevadas intensidades da emissão laser (Fig. 42).

Figura 41 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{23}\tau \ll 1$, para o campo elétrico de bombeamento fora da ressonância com o sistema atômico $\Delta_p\tau = -1, 0$.



Fonte: autor da dissertação.

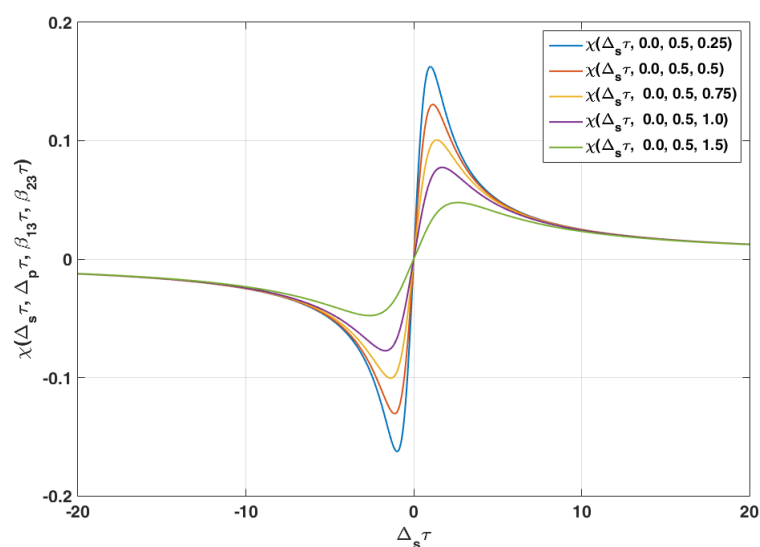
Figura 42 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 5$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$.



Fonte: autor da dissertação.

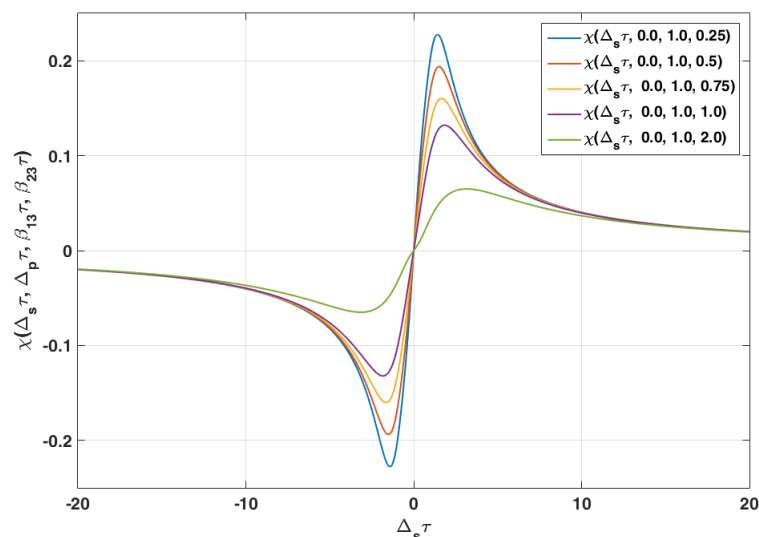
Para $\beta_{13}\tau = 0,5$ e $0,25 \leq \beta_{23}\tau \leq 1,5$ (Fig. 43), considerando o sistema em sintonia com o campo de bombeamento, ele apresenta comportamento esperado como em regime de pequenos sinais nas proximidades da ressonância. Os desvios do índice de refração são mais acentuados. Nas condições estabelecidas, conforme Fig. 44, $\chi'(\omega_s)$ é nula em $\Delta_s\tau \approx 0$ e atinge pico máximo ao sair nas proximidades da sintonia do sinal laser.

Figura 43 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 0,5$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$.



Fonte: autor da dissertação.

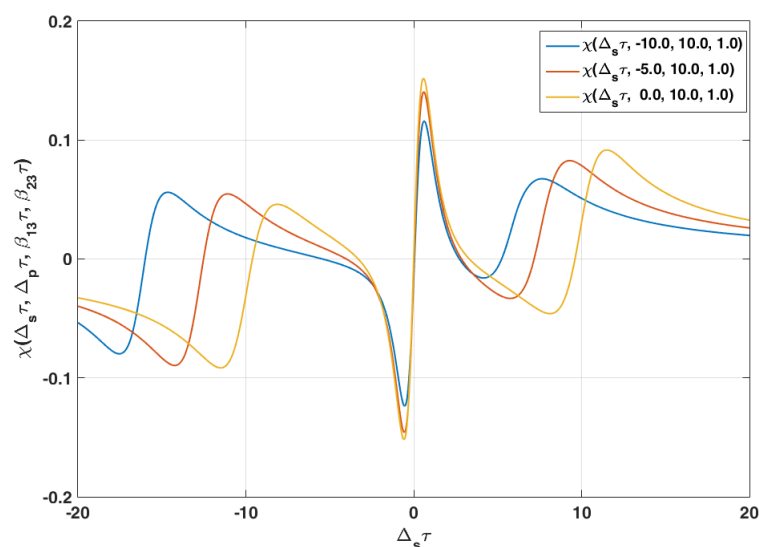
Figura 44 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 1$, para o campo elétrico de bombeamento na ressonância $\Delta_p\tau = 0$.



Fonte: autor da dissertação.

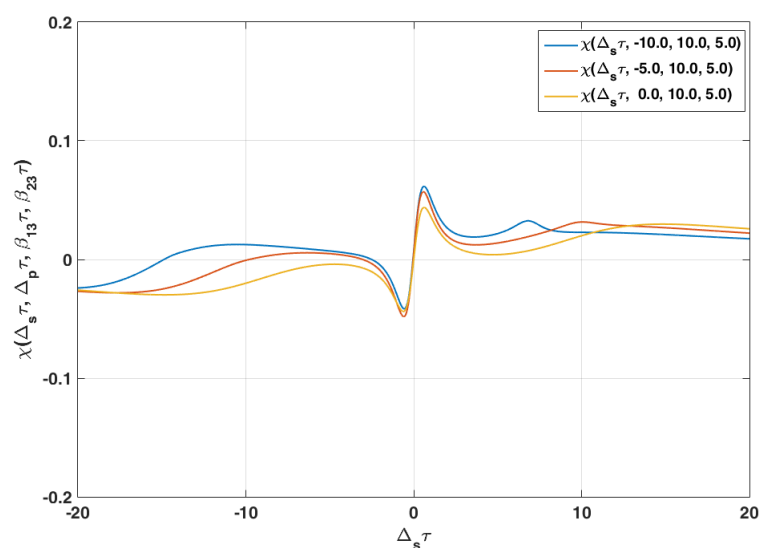
Considerando o sistema sob condições de elevadas intensidades de bombeamento e de emissão laser, em sintonia e dessintonia com o campo de bombeamento (Figs. 45-46), respectivamente, $\chi'(\omega_s)$ apresenta quase o mesmo comportamento, com amplitude máxima de 0,05 e, ao se afastar de $\Delta_p\tau = 0$, $\Delta\chi'_p(\omega_s) = 0$.

Figura 45 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$, para a intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau = 1$.



Fonte: autor da dissertação.

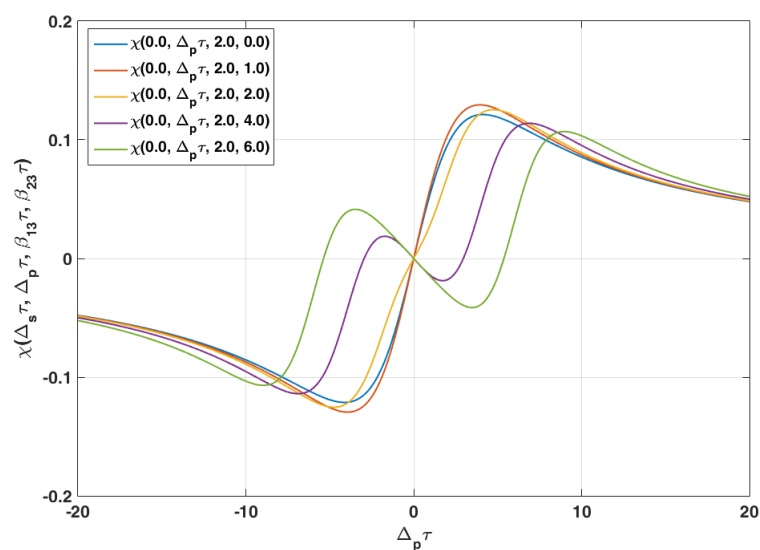
Figura 46 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_s)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do sinal $\Delta_s\tau$, sob a hipótese de $\beta_{13}\tau = 10$, para a intensidade do campo elétrico do sinal $\beta_{23}\tau = 5$.



Fonte: autor da dissertação.

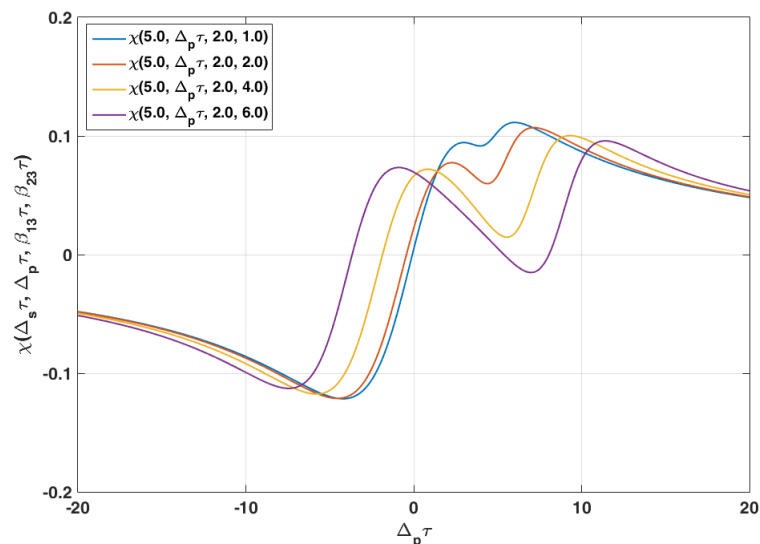
$\chi'(\omega_p)$ contribuirá para menores mudanças no índice de refração do sistema atômico, mesmo o sistema estando sob condições de elevadas intensidades do bombeamento e do sinal laser (Fig. 47-48), tanto na sintonia ou em dessintonia com os campos eletromagnéticos interagentes.

Figura 47 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_p)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 0$, para uma intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2,0$.



Fonte: autor da dissertação.

Figura 48 – Comportamento de $\frac{\hbar\chi'(\omega_p)}{|\mu_{23}|^2\tau(\rho_{11}-\rho_{33})_0}$ em função da dessintonia do bombeamento $\Delta_p\tau$, sob a hipótese de $\Delta_s\tau = 5$, para uma intensidade do campo elétrico de bombeamento $\beta_{13}\tau = 2, 0$.

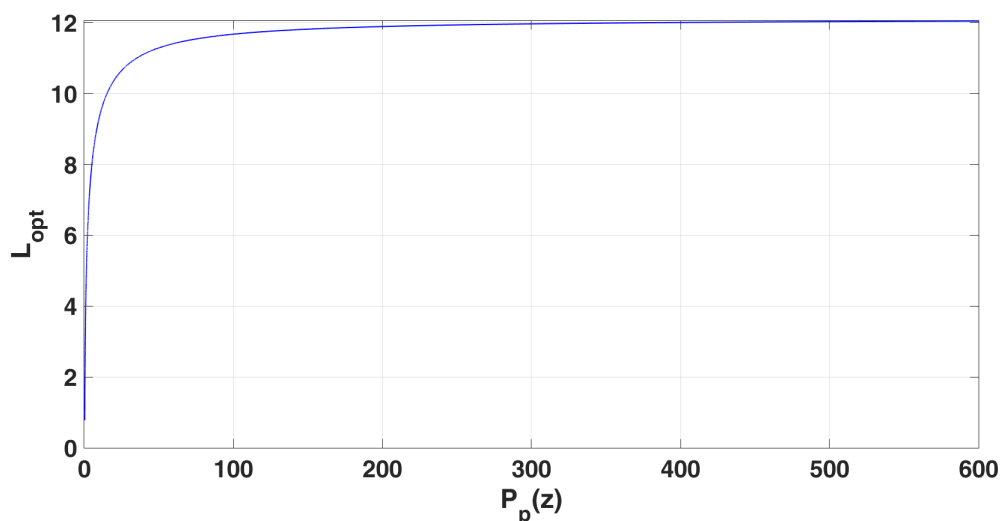


Fonte: autor da dissertação.

6.3 Comprimento Ótimo do Oscilador Laser

Conforme calculado, utilizando-se a expressão 4.132, a Fig. 49 mostra os valor obtido para o comprimento ótimo do oscilador ($L = 12$ m). Depois desse comprimento o oscilador não oferece mais ganho laser mesmo que haja um aumento significativo nas potências de bombeamento. Enquanto o comprimento efetivo está relacionado com os efeitos não-lineares, o comprimento ótimo está relacionado com o ganho do sistema.

Figura 49 – Comprimento ótimo do oscilador laser em função da potência de bombeamento



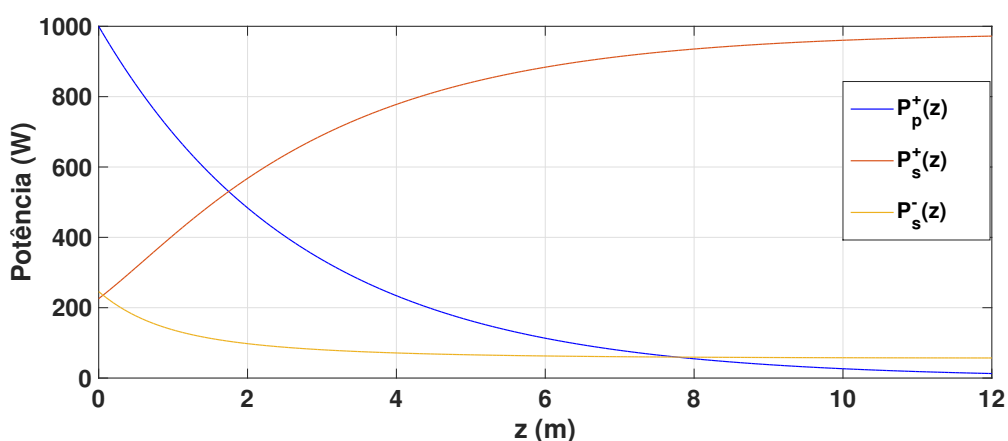
Fonte: autor da dissertação.

6.4 Perfis das Potências no Oscilador Laser

Conforme ilustrados nas Figs. 50 e 51, os sinais laser de avanço ($P_s^+(z)$) nos osciladores alcançaram máxima potência em $L = 12$ m, de 972,1 W e 961,4 W nas configurações de bombeamento unidirecional e bidirecional, respectivamente. Os valor mínimo de $P_s^+(z)$ ocorre em $L = 0$ m, de 225,8 W na configuração de bombeamento unidirecional, e de 182 W na configuração de bombeamento bidirecional. O sinal laser reverso ($P_s^-(z)$) varia de 245,8 W a 57,09 W na configuração unidirecional e de 192 W a 36,35 W na configuração bidirecional. A potência de saída laser para bombeamento unidirecional foi de 933,3 W e 923 W no esquema bidirecional, uma vez que a potência laser de saída obedece a equação $P_{sl}(z = L) = (1 - R_2)P_s^+(L)$. A potência de saturação do sinal é $P_s^{sat} = 1.064$ mW para ambas configurações de bombeamento.

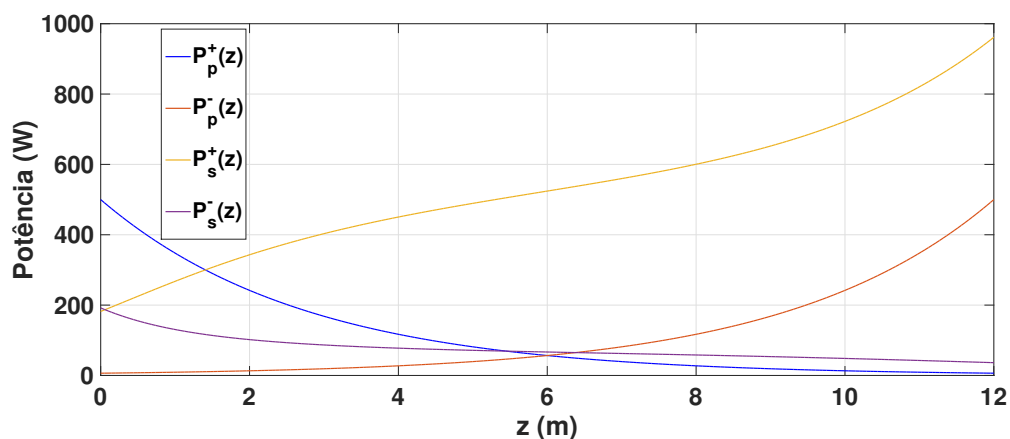
A potência de bombeamento na configuração unidirecional tem valor máximo de 1 KW em $L = 0$ m e mínima de 12,83 W em $L = 12$ m, enquanto no bombeamento bidirecional tem valor máximo de 500 W nas extremidades do oscilador ($L = 12$ m e $L = 0$ m), e alcança valor mínimo na extremidade oposta. Os sinais de bombeamento direto ou reverso ($P_p^+(z)$ ou $P_p^-(z)$) no bombeamento bidirecional, se analisados individualmente, tem valores mínimos de 6, 415 W nas extremidades do oscilador, como apresentado na Fig. 51 (linhas azul e laranja).

Figura 50 – Potências no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

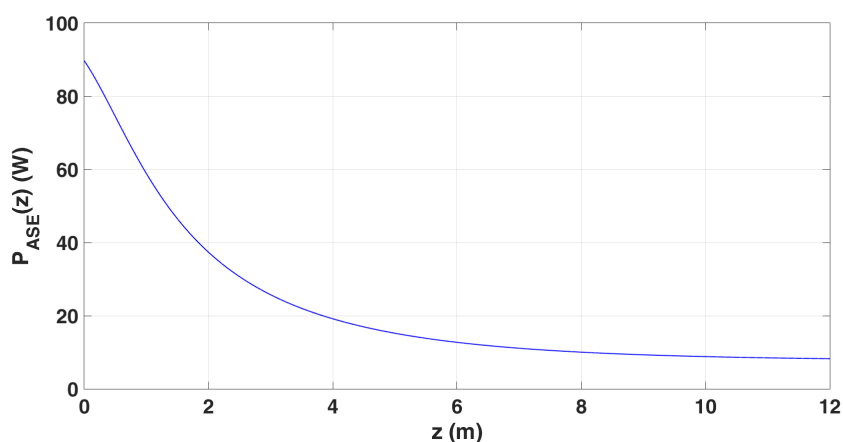
Figura 51 – Potências no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Considerando a ASE no oscilador laser, foram encontradas, analiticamente, $P_{ASE}(z) = 89,59$ W em $z = 0$, e $P_{ASE}(z) = 8,254$ W em $z = 12$ m, na estrutura de bombeamento unidirecional de acordo com a Fig. 52.

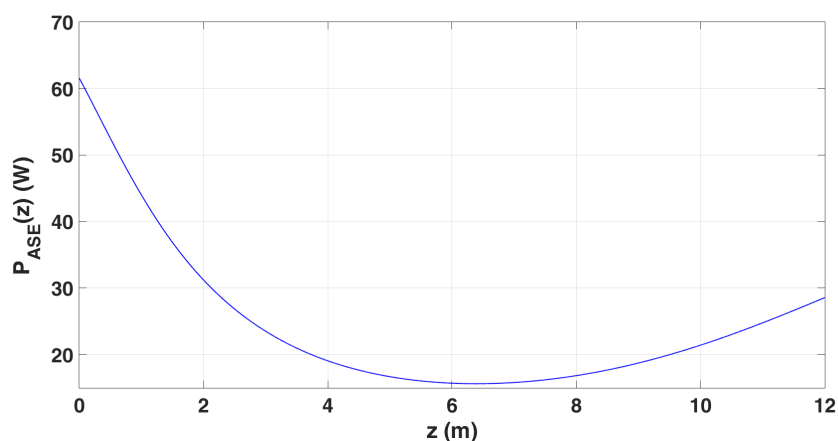
Figura 52 – Sinal ASE no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Na configuração bidirecional uma $P_{ASE}(z) = 61,51$ W em $z = 0$, $P_{ASE}(z) = 15,61$ W em $z = 6,309$ m e $P_{ASE}(z) = 28,54$ W em $z = 12$ m, conforme ilustração da Fig. 53.

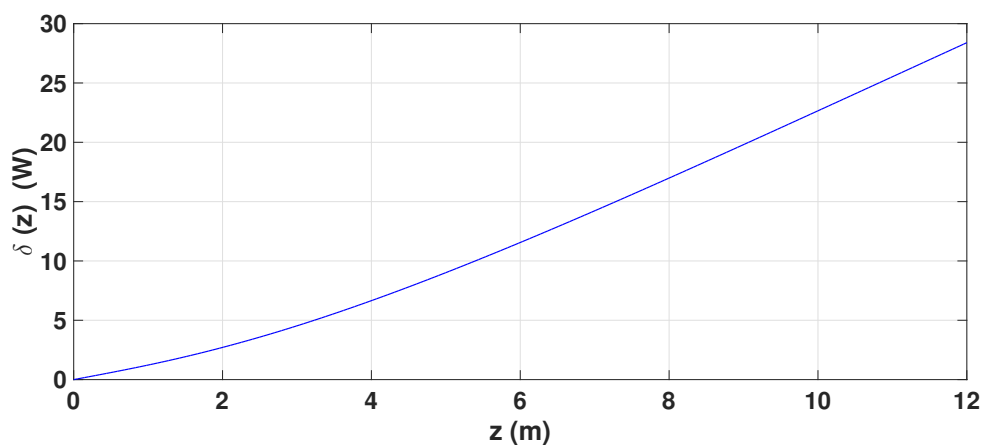
Figura 53 – Sinal ASE no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Uma perturbação $\delta(z) = 28,40$ W (Fig. 54) é gerada no oscilador laser (esquema unidirecional) se a perda por espalhamento espectral do sinal laser for levada em consideração na análise da EDO que descreve a propagação do sinal laser no oscilador.

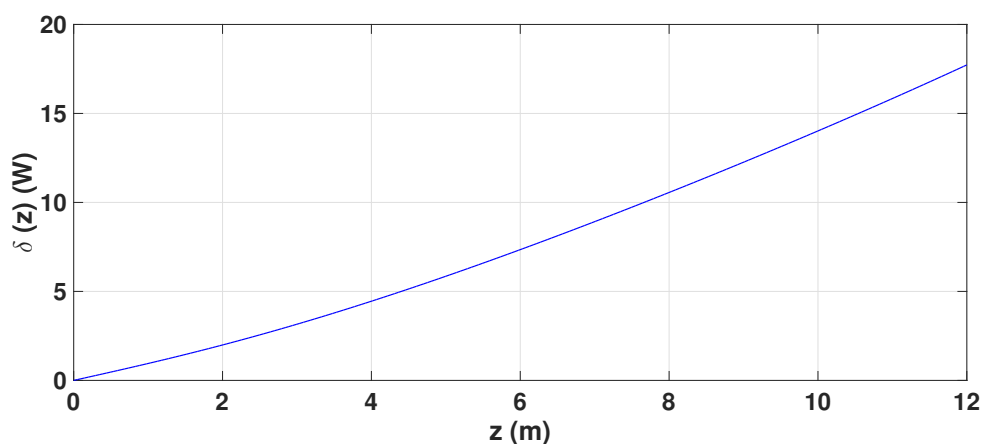
Figura 54 – Perturbação causada por espalhamento espectral do sinal laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

No entanto, na configuração de bombeamento bidirecional, uma perturbação $\delta(z) = 17,73$ W é gerada no oscilador, como mostrada na Fig. 55.

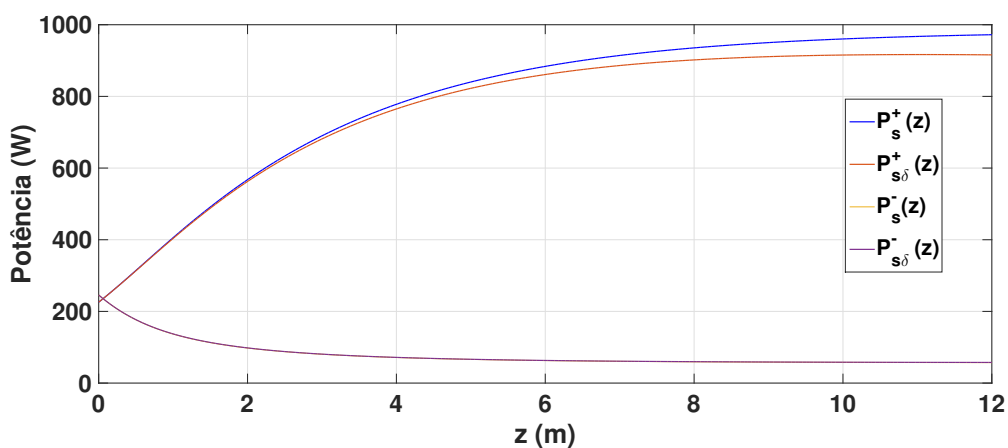
Figura 55 – Perturbação causada por espalhamento espectral do sinal laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Na análise do oscilador laser sob a condição em bombeamento unidirecional, como apresentada na Fig. 56, o sinal $P_{s\delta}^+(z)$ varia de $P_{s\delta}^+(z) = 225,8 \text{ W}$ a $P_{s\delta}^+(z) = 915,9 \text{ W}$. Já o sinal $P_s^-(z)$ passa a ser $P_{s\delta}^-(z)$, que varia de $P_{s\delta}^-(z) = 245,8 \text{ W}$ a $P_{s\delta}^-(z) = 57,61 \text{ W}$.

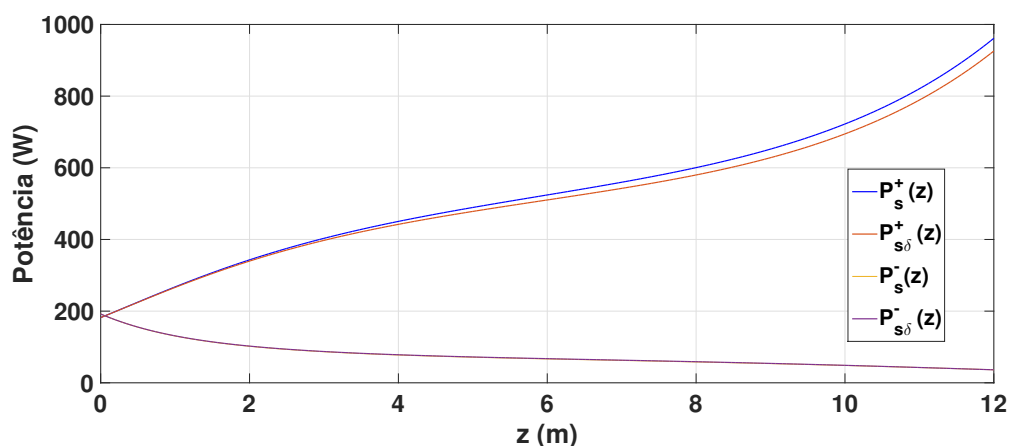
Figura 56 – Influência da perturbação de primeira ordem na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Na Fig. 57, assim como no bombeamento unidirecional, é possível observar que a perturbação $\delta(z)$ causa um decaimento em ambos os sinais laser, de avanço $P_s^+(z)$ e reverso $P_s^-(z)$ (como mostrado na Fig. 56). Com $\delta(z)$, o sinal $P_s^+(z)$ passa a ser $P_{s\delta}^+(z)$, que varia de $P_{s\delta}^+(z) = 182 \text{ W}$ a $P_{s\delta}^+(z) = 925,9 \text{ W}$, e o sinal $P_s^-(z)$ passa a ser $P_{s\delta}^-(z)$, que varia de $P_{s\delta}^-(z) = 192 \text{ W}$ a $P_{s\delta}^-(z) = 36,28 \text{ W}$.

Figura 57 – Influência da perturbação de primeira ordem na configuração de bombeamento bidirecional



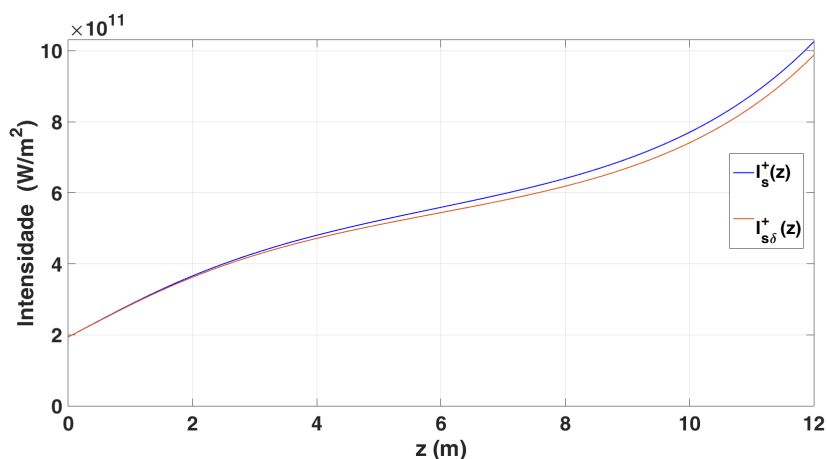
Fonte: autor da dissertação.

Portanto, diante das análises, conclui-se que a perturbação $\delta(z)$ causa maior decaimento no sinal laser de saída do oscilador na configuração de bombeamento unidirecional, pois a potência do sinal laser de saída é relacionada por $P_{sl}^+(z=L) = P_{s\delta}^+(z)(1 - R_2)$. Com isso, $P_{sl}^+(z=L) = 933,3 \text{ W}$ passa a ser $P_{sl}^+(z=L) = 879,2 \text{ W}$, ou seja uma variação de $\Delta P_{sl}^+(z=L) = 54 \text{ W}$. Enquanto isso, na configuração de bombeamento bidirecional a perda do sinal laser de saída na presença de $\delta(z)$ é $\Delta P_{sl}^+(z=L) = 34,2 \text{ W}$.

6.5 Intensidade dos Osciladores Laser

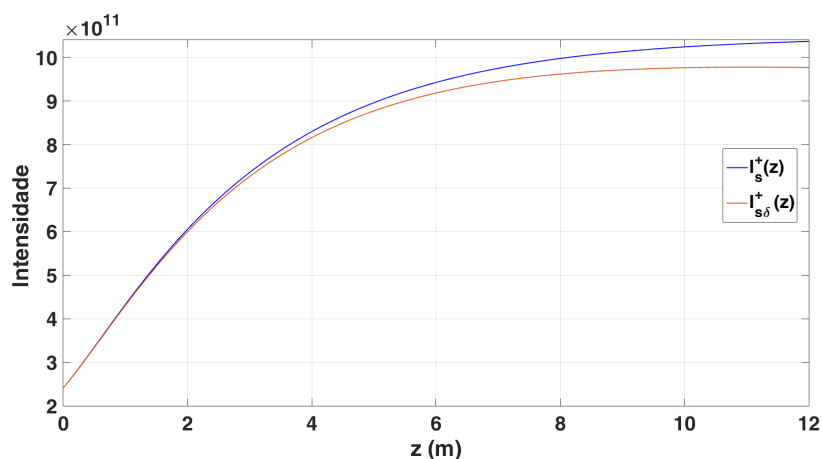
A intensidade de saída $I_s^+(z)$ do oscilador laser na configuração bidirecional foi de $I = 1,026 \times 10^{12} \text{ W/m}^2$ (Fig. 58) e de $I = 1,037 \times 10^{12} \text{ W/m}^2$ no regime de bombeamento unidirecional (Fig.59). Isso significa que a intensidade laser é mais forte na saída do oscilador sob o regime de bombeamento unidirecional. As intensidades $I_{s\delta}^+(z)$ (linha vermelha das Figs. 58 e 59) são as intensidades de saída no oscilador laser considerando a perturbação $\delta(z)$, que passa a ser denotada como $I_{s\delta}^+(z)$. No bombeamento bidirecional $I_{s\delta}^+(z) = 9,876 \times 10^{11}$ e no unidirecional $I_{s\delta}^+(z) = 9,769 \times 10^{11}$.

Figura 58 – Intensidade do oscilador na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 59 – Intensidade do oscilador na configuração de bombeamento unidirecional

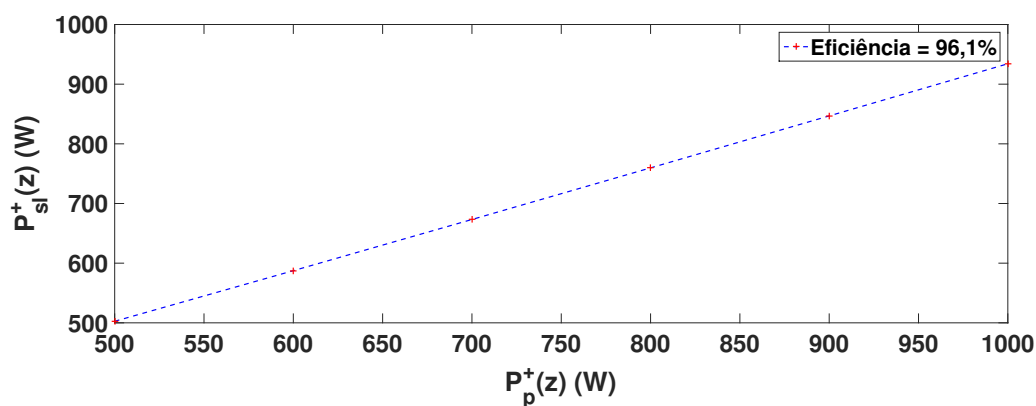


Fonte: autor da dissertação.

6.6 Eficiência dos Osciladores Laser

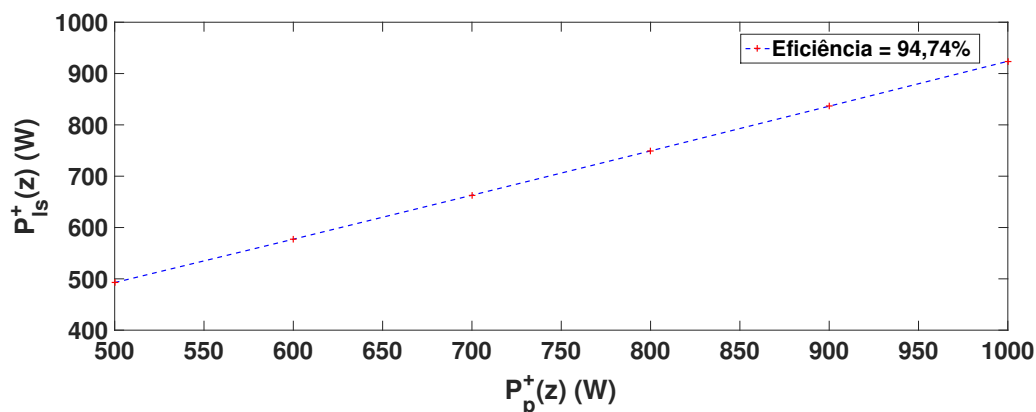
De acordo com o modelamento do sistema físico do oscilador laser, a eficiência na configuração de bombeamento unidirecional foi de 96,1% (Fig. 60), enquanto no regime bidirecional foi de 94,74% (Fig. 61). Essas eficiências foram analisadas apenas analiticamente, sem levar em consideração as perdas dos dispositivos que formam os osciladores laser.

Figura 60 – Eficiência do oscilador na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 61 – Eficiência do oscilador na configuração de bombeamento bidirecional

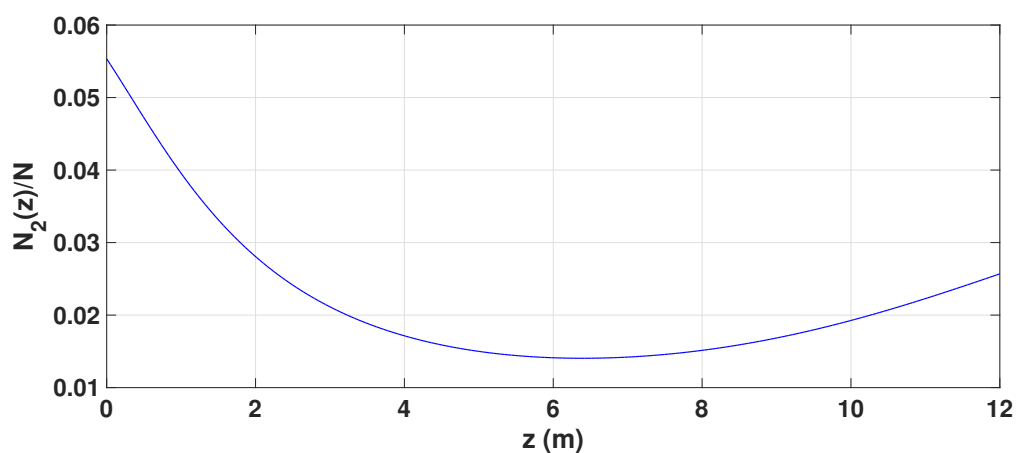


Fonte: autor da dissertação.

6.7 Perfil da Densidade de População Iônica Normalizada no Oscilador Laser

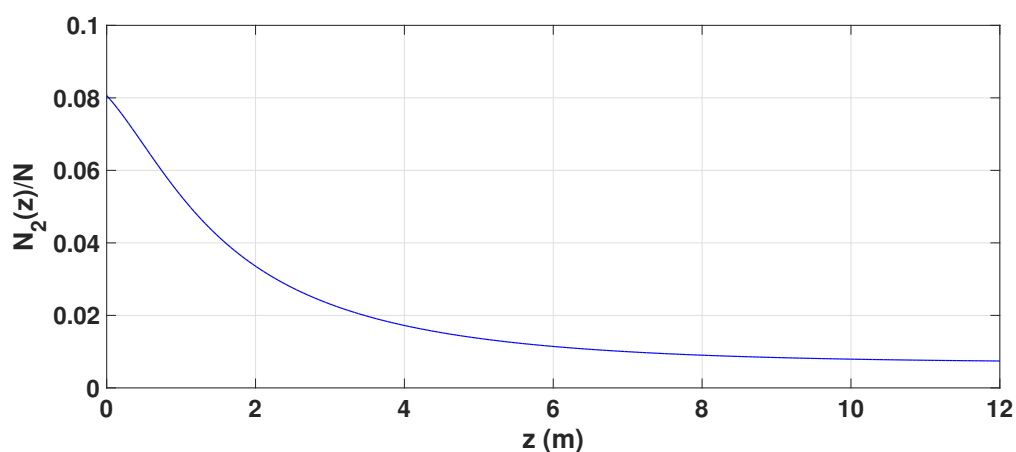
A densidade de população normalizada $\frac{N_2(z)}{N}$ varia ao longo do comprimento do oscilador laser. Na estrutura de bombeamento bidirecional (Fig. 62) alcança valor máximo de $\frac{N_2(z)}{N} \approx 0,554$ em $L = 0$ m, mínima de $\frac{N_2(z)}{N} \approx 0,014$ em $L = 6$ m e de $\frac{N_2(z)}{N} \approx 0,0257$ em $L = 12$ m. Na configuração de bombeamento unidirecional, alcança valores máximo de $\frac{N_2(z)}{N} \approx 0,080$ em $L = 0$ m, e mínimo de $\frac{N_2(z)}{N} \approx 7,421 \times 10^{-3}$ em $L = 12$ m, como ilustrado na Fig. 63.

Figura 62 – Inversão de população normalizada no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

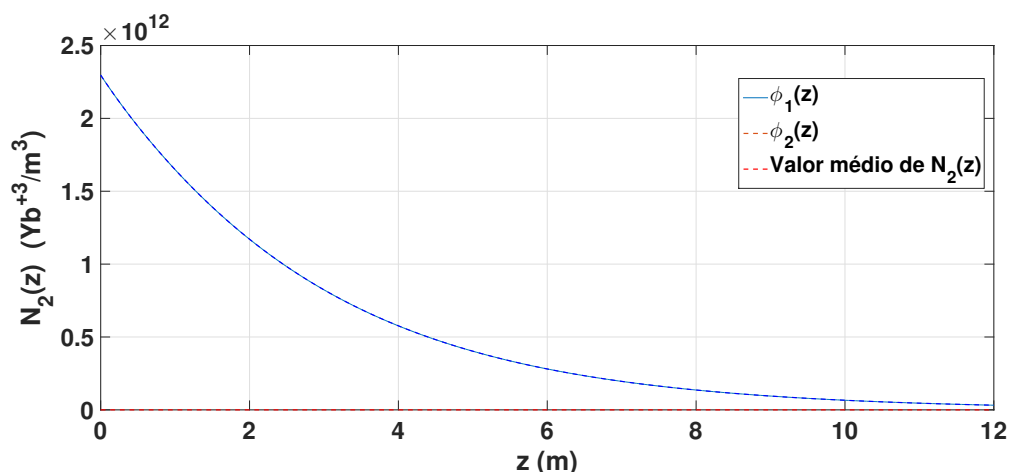
Figura 63 – Inversão de população normalizada no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

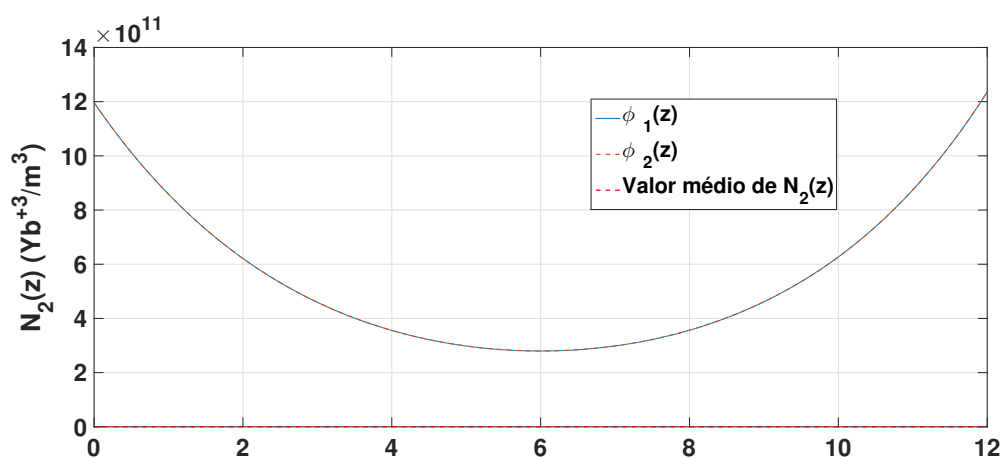
Os comportamentos das funções auxiliares ϕ_1 e ϕ_2 , equações (4.78) e (4.79) do Capítulo 2, associadas ao valor médio $\bar{N}_2(z)$, nas configurações de bombeamento unidirecional e bidirecional, são representadas nas Figs 64 e 65, respectivamente. As funções ϕ_1 e ϕ_2 praticamente coincidem, tornando imperceptível destacá-las individualmente quando representadas em um único gráfico. A variação de $\bar{N}_2(z)$ ao longo da fibra ativa (linha tracejada em vermelho das figuras supracitadas) é insignificante comparada com ϕ_1 e ϕ_2 .

Figura 64 – Função auxiliar na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 65 – Função auxiliar na configuração de bombeamento bidirecional

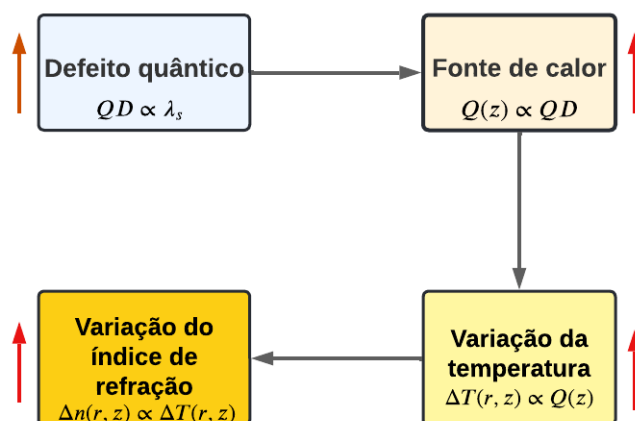


Fonte: autor da dissertação.

6.8 Geração de Calor no Oscilador Laser

A Fig. 66 mostra a influência que o defeito quântico causa nos parâmetros térmicos e, conseqüentemente, no índice de refração da fibra ativa, uma vez que esses fenômenos estão relacionados. O diagrama permite verificar que esses parâmetros são diretamente proporcionais. A seta vermelha indica que o aumento no QD causa aumento nas demais grandezas térmicas e na variação do índice de refração.

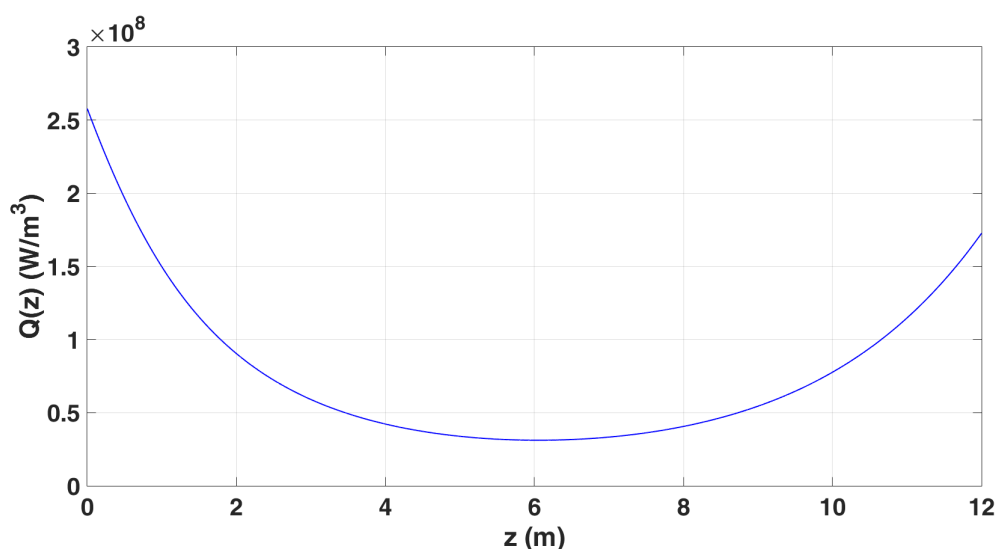
Figura 66 – Influência do defeito quântico nos parâmetros térmicos do laser



Fonte: autor da dissertação.

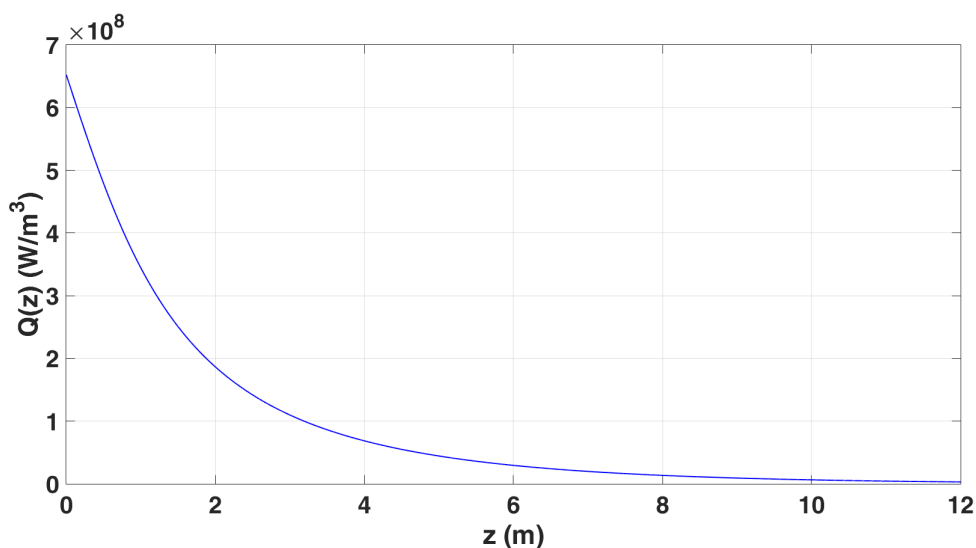
Como pode ser observado por meio da Fig. 67, o calor gerado pela fonte $Q(z)$ é suavemente distribuído na configuração de bombeamento bidirecional, o que provoca menos aquecimento de operação do oscilador laser devido à sua dependência com a temperatura no interior da fibra ativa. $Q(z) = 257,8 \text{ MW/m}^3$ em $L = 0 \text{ m}$, $Q(z) = 31,18 \text{ MW/m}^3$ em $L = 6 \text{ m}$ e $Q(z) = 172,7 \text{ MW/m}^3$ em $L = 12 \text{ m}$. Na configuração de bombeamento unidirecional (Fig. 68) o calor é mais intenso na posição $L = 0 \text{ m}$, variando de $Q(z) = 652,5 \text{ MW/m}^3$ a $Q(z) = 3,05 \text{ MW/m}^3$ em $L = 12 \text{ m}$. Isto causa uma maior temperatura de operação no oscilador laser, como pode ser visto na Tabela 4.

Figura 67 – Fonte de calor no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 68 – Fonte de calor no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



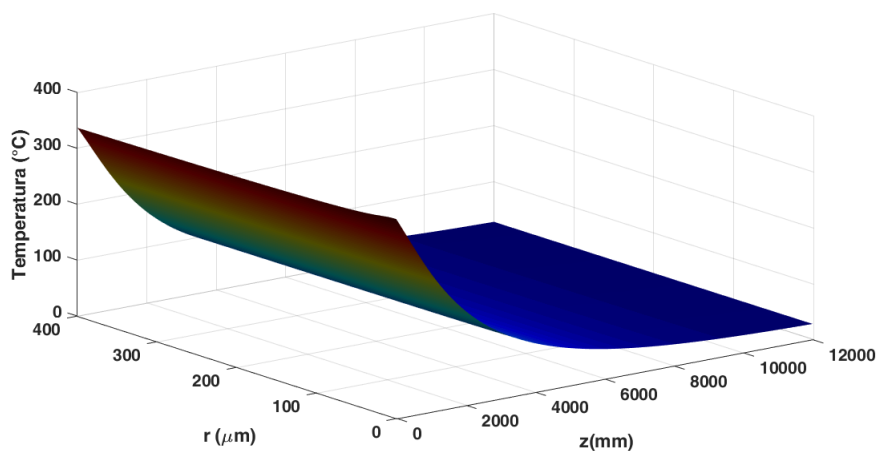
Fonte: autor da dissertação.

6.9 Perfis da Variações das Temperaturas no Oscilador Laser

Nesta análise, algumas condições de contorno foram consideradas. Em primeiro lugar, o calor é gerado no núcleo da fibra e transferido do núcleo para a superfície da fibra (revestimento externo) por condução térmica. Esse calor é dissipado da superfície para o ar ambiente por transferência de calor convectiva e radiativa. É importante observar que não existem fontes de calor nos revestimentos interno e externo da fibra. Portanto, os revestimentos foram tratados como um único revestimento no contexto desta análise. Além disso, devido à simetria cilíndrica da fibra, a variação azimutal da temperatura foi negligenciada neste estudo.

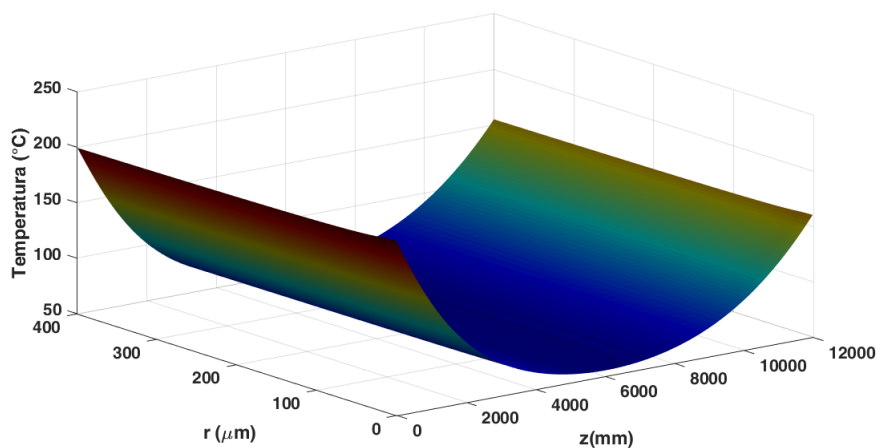
O comportamento da temperatura $T(r, z)$ no interior do oscilador laser é definido pelo perfil da potência de bombeamento, e alcança picos máximos nas extremidades do oscilador na configuração de bombeamento bidirecional, em $T(0, 0)$ e $T(0, 12)$, e mínimo no centro da fibra, em $T(400, 6)$, enquanto na configuração de bombeamento unidirecional atinge valor máximo em $T(0, 0)$ e mínimo em $T(400, 12)$, o que pode ser observado nas Figs. 69 e 70. A temperatura na direção radial decresce do núcleo para o revestimento da fibra dopada, em ambas configurações de bombeamento. No caso do bombeamento unidirecional, decai da extremidade do oscilador para a extremidade oposta, enquanto que no esquema de bombeamento bidirecional diminui das extremidades para o meio, quando alcança pico mínimo.

Figura 69 – Temperatura no oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 70 – Temperatura no oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Os resultados apresentados pelas Figs. 69 e 70 indicam que o esquema de bombeamento unidirecional produz um maior aquecimento no oscilador laser comparado com o esquema de bombeamento bidirecional, pois este produz uma menor variação de temperatura. Isto implica que a configuração bidirecional é mais vantajosa porque gera um menor fluxo de calor e, conseqüentemente, uma menor temperatura de operação no oscilador laser. Comparando os resultados na Tabela 4 é possível observar que a variação da temperatura no esquema unidirecional $\Delta T_u(r, z)$ é quase três vezes maior em comparação com a variação da temperatura no esquema bidirecional $\Delta T_b(r, z)$, ou seja $\Delta T_u(r, z) \approx 2,142 \times \Delta T_b(r, z)$. A temperatura do oscilador laser é uma grandeza relevante em projetos lasers, pois pode influenciar de forma significativa o ganho laser e nos acoplamentos dos

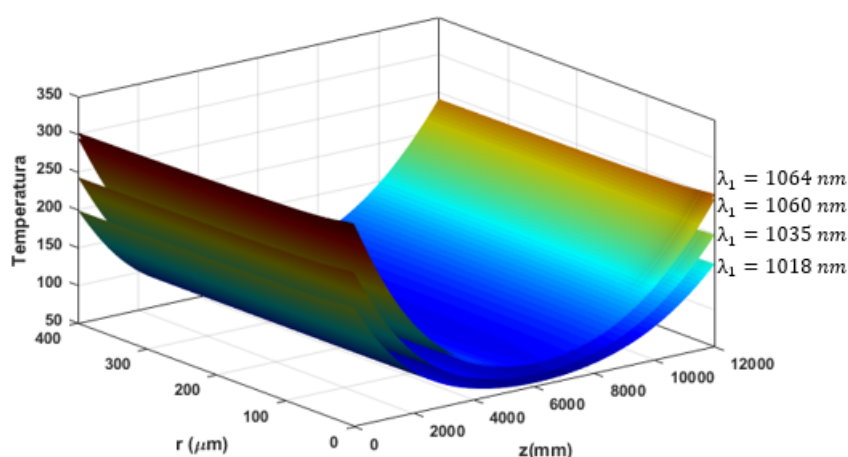
modos dos campos eletromagnéticos propagantes no interior da fibra óptica.

Tabela 4 – Valores das temperaturas no oscilador laser

Bombeamento	Temp. Máxima	Temp. mínima	Varição de temperatura
Unidirecional	356, 20 °C	28, 00 °C	328, 20 °C
Bidirecional	207, 20 °C	54, 02 °C	153, 18 °C

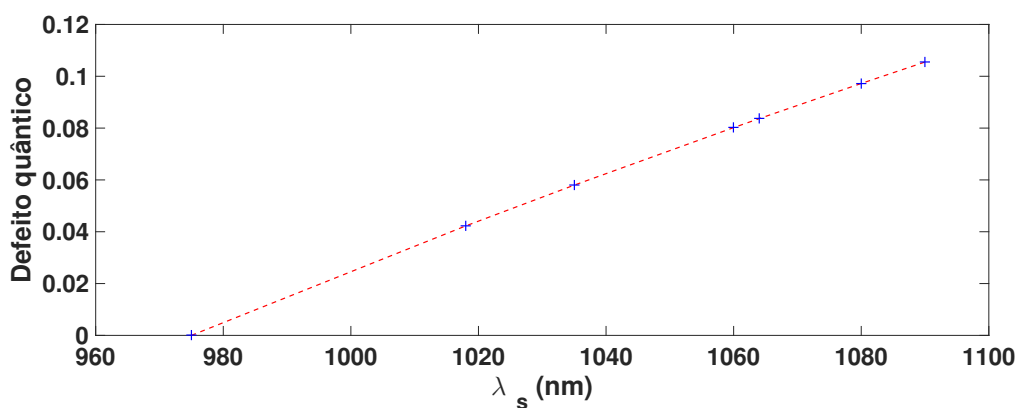
O defeito quântico, $QD = \left(1 - \frac{\lambda_p}{\lambda_s}\right)$, influencia significativamente a temperatura de operação do oscilador, devido à sua relação com a temperatura e com o calor gerado por $Q(z)$. Nesse contexto, fixando o comprimento de onda da potência de bombeamento em $\lambda_p = 976$ nm e variando o comprimento de onda do sinal laser em $\lambda_s = 1018$ nm, $\lambda_s = 1035$ nm, $\lambda_s = 1060$ nm e $\lambda_s = 1064$ nm, foram obtidos os perfis de temperaturas apresentados na Fig. 71. Na Fig. 71 é observado que a temperatura aumenta para λ_s maiores. Ou seja, quanto maior o λ_s maior será o QD (Fig.72) e, conseqüentemente, maior serão a geração e o fluxo de calor, assim como a temperatura de operação do oscilador. Para os λ_s escolhidos, as temperaturas máximas foram 207,02 °C, 254,30 °C, 310,60 °C e 318,50 °C. A maior variação da temperatura ocorreu ajustando $\lambda_s = 1035$ nm para $\lambda_s = 1060$ nm, fixando o raio em $r \approx 0$. Esta análise foi realizada com o oscilador sob as condições de bombeamento bidirecional.

Figura 71 – Variação da temperatura com o defeito quântico



Fonte: autor da dissertação.

Figura 72 – Dependência do defeito quântico com o comprimento de onda do sinal laser de saída

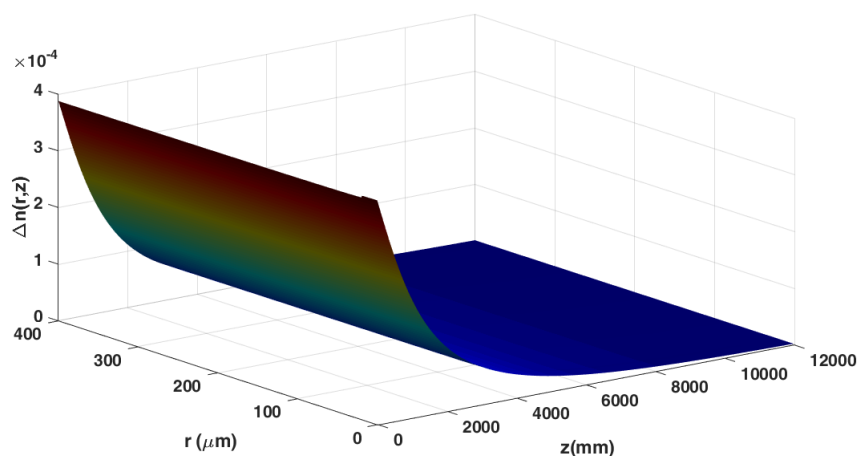


Fonte: autor da dissertação.

6.10 Perfil do Índice de Refração no Oscilador Laser

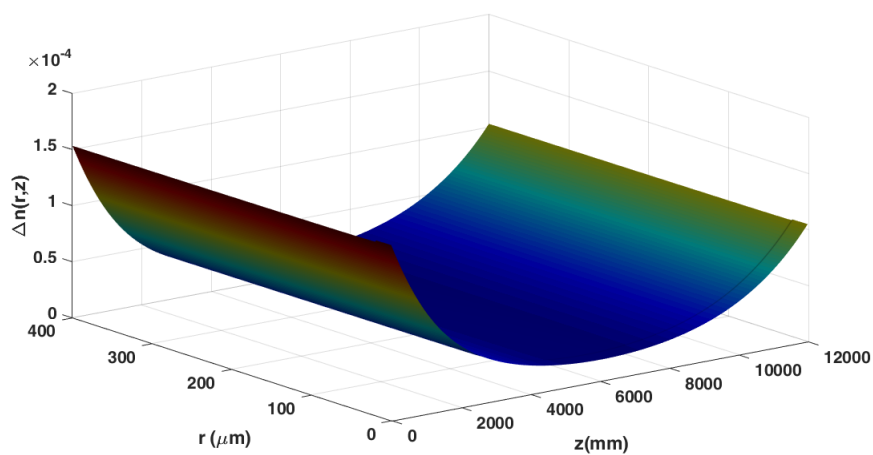
As Figs. 73 e 74 permitem observar que a variação do índice de refração acompanha o mesmo perfil da temperatura, conforme descrita pela equação (4.156). O bombeamento bidirecional gera menor alteração do índice de refração da fibra ativa, apresentando maior vantagem em relação ao bombeamento unidirecional.

Figura 73 – Variação do índice de refração em função da temperatura interna do oscilador laser na configuração de bombeamento unidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Figura 74 – Perfil da variação do índice de refração em função da temperatura interna do oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional



Fonte: autor da dissertação.

Sendo as variações máximas dos índices de refração bidirecional e unidirecional indicados, respectivamente, por $\Delta n_b(r, z)$ e $\Delta n_u(r, z)$, foram obtidos os seguintes resultados: $\Delta n_b(r, z) = 1,56 \times 10^{-4}$, $\Delta n_u(r, z) = 3,96 \times 10^{-4}$, ou seja $\Delta n_u(r, z) = 2,54 \times \Delta n_b(r, z)$.

6.11 Análise comparativa entre os osciladores laser

Tabela 5 – Análise comparativa dos parâmetros dos osciladores

Parâmetros	bombeamento unidirecional	bombeamento bidirecional
$P_p^+(z=0)$	1 kW	500 W
$P_p^-(z=L)$	0 W	500 W
$P_s^+(z=0)$	225,8 W	182 W
$P_s^+(z=L)$	972,1 W	961,4 W
$P_s^-(z=0)$	57,09 W	36,35 W
$P_s^-(z=L)$	245,8 W	192 W
$P_{sl}^+(z=L)$	933,3 W	923 W
P_c	4,8 kW	4,8 kW
$P_{ASE}(z=L)$	89,59 W	61,51 W
$I(z)$	1,037 TW/m ³	1,026 TW/m ³
$\delta(z=L)$	28,40 W	17,73 W
$N_2(z=0)/N$	0,080	0,054
$Q(z=0)$	652,5 MW/m ³	258 MW/m ³
$\Delta T(z,r)$	20,6 °C	7,14 °C
$\Delta n(z,r)$	$3,96 \times 10^{-4}$	$1,56 \times 10^{-4}$
Eficiência	96,1 %	94,74 %

Como apresentado na Tabela 5, apesar do oscilador unidirecional oferecer, ligeiramente, uma maior eficiência comparado ao bidirecional, o bidirecional é mais vantajoso por fornecer uma menor temperatura. Isto implica na inversão de população, menor variação no índice de refração e menor esforço sobre o combinador de feixe.

6.12 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados das simulações computacionais das equações de taxas, do balanço energético, dos parâmetros térmicos, do índice de refração e da eficiência dos osciladores laser.

7 CONCLUSÃO

O modelo teórico, baseado na matriz densidade e nas equações de taxa para a amplificação laser acopladas com as equações de transferência de calor, do laser de fibra de revestimento duplo dopada com itérbio, operando em regime de alta potência, foi desenvolvido matematicamente e analiticamente. O problema térmico para análise da transferência de calor da fibra ativa com o ambiente externo, em condições normais de temperatura e pressão (CNTP), também foi descrito, que incluiu os três processos de transferência de calor: condução, convecção e radiação, descrita pelas leis de Fourier, Newton e Stefan-Boltzmann, respectivamente. Esse conjunto de modelamento serve como base para a caracterização de um oscilador laser.

Obteve-se um modelo teórico para a susceptibilidade elétrica utilizando a solução da equação de Schrödinger aplicada a um *ensemble* de átomos de uma estrutura atômica de três níveis com base na matriz densidade.

A partir de um modelo mais geral obteve-se, então, um modelo simplificado utilizando a hipótese da propagação paraxial e, também, foi obtida, a partir da equação de onda, uma equação de transporte de potência. A solução do sistema formado pela distribuição de potência do bombeio e da radiação laser junto com a distribuição das densidades atômicas foi possível descrever um comportamento, sendo que os resultados obtidos apresentaram uma concordância com aqueles disponíveis na literatura.

Utilizando-se o calor produzido na fibra óptica, devido ao defeito quântico, foi possível determinar a distribuição de temperatura.

É possível obter uma expressão que descreva a dependência do índice de refração da fibra com a temperatura, que implicará no fenômeno denominado acoplamento de modos. Acredita-se que o acoplamento de modos seja responsável pelos fenômenos relacionados com a estabilidade modal em laser de fibra quando operado em regime de potência da ordem de *Kilowatts* contínuos. Este assunto é motivo de pesquisa corrente.

A principal realização consistiu em desenvolver um modelo para a susceptibilidade elétrica complexa que leva em consideração os desvios de frequência de bombeamento e sinal em um processo de dois fótons. Esse modelo é essencial para entender e descrever adequadamente as propriedades e comportamentos dos íons de itérbio sob a interação de dois campos.

Foi observado que a susceptibilidade atômica complexa está diretamente relacionada ao ganho, ao índice de refração, à temperatura e à potência de bombeamento do sistema laser. O ganho consequência da parte imaginária da susceptibilidade, enquanto a parte real influencia o índice de refração do meio. Além disso, foi possível observar que as alterações na temperatura podem afetar as taxas de relaxamento e a resposta do sistema. A potência de bombeamento controla a absorção de energia pelos átomos e a taxa de emissão estimulada. Essas relações são fundamentais para a eficiência e desempenho do laser. A compreensão da interação entre a susceptibilidade atômica complexa e esses parâmetros é crucial para projetar sistemas laser eficientes e estáveis em várias aplicações.

A estrutura de guia de ondas óptico mostrou-se capaz de sustentar e propagar a radiação laser.

O comprimento ótimo da fibra foi obtido a fim de permitir estabelecer uma relação entre potência e ganho do oscilador. As análises dos efeitos não-lineares também foram consideradas no modelo para evitar a degradação do sinal laser e, assim, garantir elevada qualidade do feixe.

As simulações computacionais e instrumentais foram realizadas, seguidas das soluções do modelo teórico, para o projeto do oscilador laser em regime de bombeamento unidirecional e bidirecional. Toda a elaboração computacional foi implementada em MATLAB.

À luz desses resultados, acredita-se que o modelo desenvolvido contribuirá no projeto de laser de potência de fibra dopada com íons de itérbio.

7.1 Trabalhos Futuros

Após a conclusão do presente estudo, emergiram certos aspectos que se revelaram altamente intrigantes e justificam uma abordagem mais detalhada. Nesse contexto, com relação às potenciais pesquisas a serem empreendidas como desdobramento deste trabalho, gostaria de destacar sucintamente os seguintes tópicos: investigar a influência dos efeitos não-lineares no mecanismo de transferência de calor em lasers de fibras dopadas com itérbio, avaliar o impacto da temperatura nos modos de propagação do feixe em lasers de fibras dopadas com itérbio e nas distribuições das populações iônicas do itérbio, analisar a interferência da emissão espontânea amplificada no ganho dos lasers de fibras dopadas com itérbio, realizar a construção de um oscilador laser na configuração de bombeamento bidirecional e utilizar o *Beam Propagation Method (BPM)* para resolver as equações dos campos eletromagnéticos combinados com o modelo da susceptibilidade elétrica.

REFERÊNCIAS

- BARNARD, C. et al. Analytical model for rare-earth-doped fiber amplifiers and lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, IEEE, v. 30, n. 8, p. 1817–1830, 1994.
- BROWN, D. C.; HOFFMAN, H. J. Thermal, stress, and thermo-optic effects in high average power double-clad silica fiber lasers. *IEEE Journal of quantum electronics*, IEEE, v. 37, n. 2, p. 207–217, 2001.
- CARDOSO, E. S.; SAMAD, R. E.; MOTTA, C. C. Refractive index change analysis in a high-power yb-doped double-clad fiber laser. In: IEEE. *2021 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)*. [S.l.], 2021. p. 1–4.
- CHERIN, A. H. An introduction to optical fibers. (*No Title*), 1983.
- DESURVIRE, E. Study of the complex atomic susceptibility of erbium-doped fiber amplifiers. *Journal of Lightwave Technology*, IEEE, v. 8, n. 10, p. 1517–1527, 1990.
- DESURVIRE, E. *Erbium-doped fiber amplifiers: principles and applications*. [S.l.]: A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION, 1995.
- DIGONNET, M. et al. Resonantly enhanced nonlinearity in doped fibers for low-power all-optical switching: a review. *Optical Fiber Technology*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 44–64, 1997.
- DONG, J.; BASS, M.; WALTERS, C. Temperature-dependent stimulated-emission cross section and concentration quenching in Nd³⁺-doped phosphate glasses. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 21, n. 2, p. 454–457, 2004.
- DONG, L.; SAMSON, B. *Fiber lasers: basics, technology, and applications*. [S.l.]: CRC press, 2016.
- DRAGIC, P. D.; CAVILLON, M.; BALLATO, J. Materials for optical fiber lasers: A review. *Applied Physics Reviews*, AIP Publishing LLC, v. 5, n. 4, p. 041301, 2018.
- DURAIRAJ, V. et al. *Amplification in Ytterbium-doped fibers*. Dissertação (Mestrado) — Aalto University, School of Electrical Engineering, 2013.
- EFUNBAJO, O. B. *Development and Investigation of High Power Ytterbium-Doped Fiber Lasers Operating at 1018 nm*. Tese (Doutorado) — Bilkent Üniversitesi (Turkey), 2017.
- EICHHORN, M. *Laser physics: from principles to practical work in the lab*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014.
- EILCHI, M.; PARVIN, P. Gain saturation in optical fiber laser amplifiers. *Fiber Laser*, InTechOpen, p. 297–320, 2016.
- FAN, Y. et al. Thermal effects in kilowatt all-fiber mopa. *Optics express*, Optica Publishing Group, v. 19, n. 16, p. 15162–15172, 2011.
- GBUR, G. J. *Mathematical methods for optical physics and engineering*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- GILES, C. R.; DESURVIRE, E. Modeling erbium-doped fiber amplifiers. *Journal of lightwave technology*, IEEE, v. 9, n. 2, p. 271–283, 1991.

GLICK, Y. et al. Single-mode 230 w output power 1018 nm fiber laser and ase competition suppression. *JOSA B*, Optica Publishing Group, v. 33, n. 7, p. 1392–1398, 2016.

GONG, M. et al. Numerical modeling of transverse mode competition in strongly pumped multimode fiber lasers and amplifiers. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 15, n. 6, p. 3236–3246, 2007.

HAN, Z. et al. Backward pumping kilowatt yb³⁺-doped double-clad fiber laser. *Laser Physics*, Springer, v. 21, n. 9, p. 1621–1624, 2011.

HANNA, D. C.; MCCARTHY, M.; SUNI, P. J. Thermal considerations in longitudinally pumped fibre and miniature bulk lasers. In: SPIE. *Fiber laser sources and amplifiers*. [S.l.], 1990. v. 1171, p. 160–167.

HARDY, A.; ORON, R. Signal amplification in strongly pumped fiber amplifiers. *IEEE Journal of Quantum electronics*, IEEE, v. 33, n. 3, p. 307–313, 1997.

JACQUIER, B. Rare earth-doped fiber lasers and amplifiers. In: *Wide-Gap Luminescent Materials: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer, 1997. p. 303–365.

JAUREGUI, C.; LIMPET, J.; TÜNNERMANN, A. Derivation of raman threshold formulas for cw double-clad fiber amplifiers. *Optics express*, Optica Publishing Group, v. 17, n. 10, p. 8476–8490, 2009.

JAUREGUI, C.; LIMPET, J.; TÜNNERMANN, A. On the raman threshold of passive large mode area fibers. In: SPIE. *Fiber Lasers VIII: Technology, Systems, and Applications*. [S.l.], 2011. v. 7914, p. 70–75.

JEONG, Y. et al. Cladding-pumped ytterbium-doped large-core fiber laser with 610 w of output power. *optics communications*, Elsevier, v. 234, n. 1-6, p. 315–319, 2004.

JEONG, Y.-C. et al. Multi-kilowatt single-mode ytterbium-doped large-core fiber laser. *Journal of the Optical Society of Korea*, Optical Society of Korea, v. 13, n. 4, p. 416–422, 2009.

KARIMI, M. Theoretical study of the thermal distribution in yb-doped double-clad fiber laser by considering different heat sources. *Progress In Electromagnetics Research C*, EMW Publishing, v. 88, p. 59–76, 2018.

KARIMI, M.; FARAHBOD, A. H. Improved shooting algorithm using answer ranges definition to design doped optical fiber laser. *Optics Communications*, Elsevier, v. 324, p. 212–220, 2014.

KIEN, F. L.; HAKUTA, K. Density operator and applications in nonlinear optics. *Lecture Notes, University of Electro-Communications, Japan*, v. 11, 2004.

KÖHLER, B. et al. Wavelength stabilized high-power diode laser modules. In: SPIE. *High-Power Diode Laser Technology and Applications VII*. [S.l.], 2009. v. 7198, p. 290–301.

LI, J. et al. Theoretical analysis of the heat dissipation mechanism in yb³⁺-doped double-clad fiber lasers. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 459–471, 2008.

LI, Z. et al. Diode-pumped 1 018-nm ytterbium-doped double-clad fiber laser. *Chinese Optics Letters*, Chinese Optical Society, v. 9, n. 9, p. 091401, 2011.

LIMPET, J. et al. The rising power of fiber lasers and amplifiers. *IEEE Journal of selected topics in Quantum Electronics*, IEEE, v. 13, n. 3, p. 537–545, 2007.

MARCUSE, D. *Theory of dielectric optical waveguides*. [S.l.]: New York, Academic, 1974.

- MARCUSE, D. Loss analysis of single-mode fiber splices. *Bell system technical journal*, Wiley Online Library, v. 56, n. 5, p. 703–718, 1977.
- MARCUSE, D. *Principles of quantum electronics*. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- MATNIYAZ, T. et al. Highly efficient cladding-pumped single-mode three-level yb all-solid photonic bandgap fiber lasers. *Optics Letters*, Optica Publishing Group, v. 44, n. 4, p. 807–810, 2019.
- MCCUMBER, D. E. Theory of phonon-terminated optical masers. *Physical review*, APS, v. 134, n. 2A, p. A299, 1964.
- MEYER, J.; SOMPO, J.; SOLMS, S. von. *Fiber Lasers: Fundamentals with MATLAB® Modelling*. [S.l.]: CRC Press, 2022.
- MEYSTRE, P.; SARGENT, M. *Elements of quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- MOHAMMED, Z.; SAGHAFIFAR, H.; SOLTANOLKOTABI, M. An approximate analytical model for temperature and power distribution in high-power yb-doped double-clad fiber lasers. *Laser Physics*, IOP Publishing, v. 24, n. 11, p. 115107, 2014.
- NEWTON, R. Causality and dispersion relations (hm nussenzveig). *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 16, n. 4, p. 570, 1974.
- OKAMOTO, K. *Fundamentals of optical waveguides*. [S.l.]: Academic press, 2006.
- OKOSHI, T. *Optical fibers*. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- OTTENHUES, C. et al. Single-mode monolithic fiber laser with 200 w output power at a wavelength of 1018 nm. *Optics Letters*, Optica Publishing Group, v. 40, n. 21, p. 4851–4854, 2015.
- PASCHOTTA, R. *Field guide to lasers*. [S.l.]: SPIE press Bellingham, WA, 2008. v. 12.
- PASCHOTTA, R. et al. Ytterbium-doped fiber amplifiers. *IEEE Journal of quantum electronics*, IEEE, v. 33, n. 7, p. 1049–1056, 1997.
- PASK, H. et al. Ytterbium-doped silica fiber lasers: versatile sources for the 1-1.2/spl mu/m region. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 2–13, 1995.
- PENNYBACKER, M. A model for the three-level cascade atomic system. 2009.
- PEYSOKHAN, M.; MOBINI, E.; MAFI, A. Analytical formulation of a high-power yb-doped double-cladding fiber laser. *OSA Continuum*, Optical Society of America, v. 3, n. 7, p. 1940–1951, 2020.
- PONSODA, J. J. Montiel i et al. Analysis of photodarkening effects in ytterbium-doped laser fibers. Aalto University, 2013.
- ROBINSON, C. C.; FOURNIER, J. Co-ordination of yb³⁺ in phosphate, silicate, and germanate glasses. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, Elsevier, v. 31, n. 5, p. 895–904, 1970.
- ROSS, T. S.; LATHAM, W. P. *Appropriate measures and consistent standard for high energy laser beam quality (postprint)*. [S.l.], 2006.

- SAMSON, B.; CARTER, A.; TANKALA, K. Rare-earth fibres power up. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 8, p. 466–467, 2011.
- SEAH, C.; NG, T.; CHUA, S. 400w ytterbium-doped fiber oscillator at 1018nm. In: OPTICA PUBLISHING GROUP. *Advanced Solid State Lasers*. [S.l.], 2015. p. ATu2A–33.
- SHI, C. et al. Experimental study of output characteristics of bi-directional pumping high power fiber amplifier in different pumping schemes. *IEEE Photonics Journal*, IEEE, v. 9, n. 3, p. 1–10, 2017.
- SIEGMAN, A. E. New developments in laser resonators. In: SPIE. *Optical resonators*. [S.l.], 1990. v. 1224, p. 2–14.
- SMITH, R. G. Optical power handling capacity of low loss optical fibers as determined by stimulated raman and brillouin scattering. *Applied optics*, Optica Publishing Group, v. 11, n. 11, p. 2489–2494, 1972.
- SNYDER, A. W.; LOVE, J. D. Optical waveguide theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, v. 3, p. 378, 1986.
- SVELTO, O.; HANNA, D. C. *Principles of lasers*. [S.l.]: Springer, 1998. v. 4.
- TER-MIKIRTYCHEV, V. *Fundamentals of fiber lasers and fiber amplifiers*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 99.
- WANG, Y. et al. Research of high brightness 1018nm ytterbium doped fiber laser. In: SPIE. *XX International Symposium on High-Power Laser Systems and Applications 2014*. [S.l.], 2015. v. 9255, p. 106–113.
- WEBER, H. J.; ARFKEN, G. B. *Essentials of math methods for physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- WIRTH, C. et al. High-power tandem pumped fiber amplifier with an output power of 2.9 kw. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 36, n. 16, p. 3061–3063, 2011.
- WU, C. et al. Theoretical and experimental investigation on backward-pumped yb 3+-doped double-clad fiber lasers. In: IEEE. *2008 IEEE PhotonicsGlobal@ Singapore*. [S.l.], 2008. p. 1–4.
- XIAO, H. et al. High-power 1018 nm ytterbium-doped fiber laser and its application in tandem pump. *Applied Optics*, Optica Publishing Group, v. 54, n. 27, p. 8166–8169, 2015.
- XIAO, H. et al. High power 1018 nm ytterbium doped fiber laser with an output power of 309 w. *Laser Physics Letters*, IOP Publishing, v. 10, n. 6, p. 065102, 2013.
- XIAO, L. et al. An approximate analytic solution of strongly pumped yb-doped double-clad fiber lasers without neglecting the scattering loss. *Optics communications*, Elsevier, v. 230, n. 4-6, p. 401–410, 2004.
- XIAO, Y. et al. 1-kilowatt cw all-fiber laser oscillator pumped with wavelength-beam-combined diode stacks. *Optics express*, Optica Publishing Group, v. 20, n. 3, p. 3296–3301, 2012.
- XUE, D. Three-dimensional simulation of the temperature field in high-power double-clad fiber laser. *Optik*, Elsevier, v. 122, n. 10, p. 932–935, 2011.
- YAN, P. et al. High-power 1018 nm ytterbium-doped fiber laser with output of 805 w. *Optics letters*, Optica Publishing Group, v. 42, n. 7, p. 1193–1196, 2017.

YAN, P. et al. A 1150-w 1018-nm fiber laser bidirectional pumped by wavelength-stabilized laser diodes. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, IEEE, v. 24, n. 3, p. 1–6, 2018.

YAN, P. et al. Beam transmission properties in high power ytterbium-doped tandem-pumping fiber amplifier. *IEEE Photonics Journal*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 1–12, 2019.

YARIV, A. *Quantum electronics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989.

ZHANG, L.; LIU, H.; LI, X. Theoretical analysis of yb³⁺-doped double-clad fiber lasers using a new analytical method. *Optik*, Elsevier, v. 124, n. 12, p. 1264–1268, 2013.

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA OS ELEMENTOS DA MATRIZ DENSIDADE

Sejam as equações

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H], \quad (\text{A.1})$$

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=1}^3 |i\rangle \langle i| = 1. \quad (\text{A.3})$$

Para se resolver a equação (A.1) pode-se utilizar como funções de base as autofunções da energia (A.2). Portanto, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \langle 1|\rho|1\rangle = \frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|[\rho, H]|1\rangle, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\rho(H_0 - \mu E(t)) - (H_0 - \mu E(t))\rho|1\rangle, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\langle 1|\rho H_0|1\rangle - \langle 1|\rho\mu|1\rangle E(t) - \langle 1|H_0\rho|1\rangle + \langle 1|\mu\rho|1\rangle E(t)). \quad (\text{A.6})$$

Deve-se ser observado que o primeiro e o terceiro termo se cancelam. Então,

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\langle 1|\mu\rho|1\rangle - \langle 1|\rho\mu|1\rangle) E(t). \quad (\text{A.7})$$

Utilizando-se (A.3) em (A.7), obtém-se que

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\mu(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)\rho|1\rangle E(t), \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{11}\rho_{11} + \mu_{12}\rho_{21} + \mu_{13}\rho_{13}) E(t). \quad (\text{A.9})$$

O resultado final

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{12}\rho_{21} + \mu_{13}\rho_{31} - \rho_{12}\mu_{21} - \rho_{13}\mu_{31}) E(t), \quad (\text{A.10})$$

onde foi utilizado o resultado $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = 0$, logo $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ é dado por:

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{12}\rho_{21} - \mu_{21}\rho_{12}) E(t) + \frac{i}{\hbar} (\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) E(t), \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) E(t). \quad (\text{A.12})$$

Utilizando-se dos mesmos procedimentos para calcular $\frac{d\rho_{11}}{dt}$, $\frac{d\rho_{12}}{dt}$ é dado por:

$$\frac{d}{dt}\langle 1|\rho|2\rangle = \frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|[\rho, H]|2\rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\rho(H_0 - \mu E(t)) - (H_0 - \mu E(t))\rho|2\rangle, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\rho(H_0 - \mu E(t))|2\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle 1|(H_0 - \mu E(t))\rho|2\rangle, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \{ \langle 1|\rho H_0|2\rangle - \langle 1|\rho\mu|2\rangle E(t) - \langle 1|H_0\rho|2\rangle + \langle 1|\mu\rho|2\rangle E(t) \}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{12}E_2 - \langle 1|\rho(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)\mu|2\rangle E(t) \\ -E_1\rho_{12} + \langle 1|\mu(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)\rho|2\rangle E(t) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{i(E_2 - E_1)}{\hbar}\rho_{12} - \frac{i}{\hbar}(\rho_{11}\mu_{12} + \rho_{13}\mu_{32})E(t) + \frac{i}{\hbar}(\mu_{12}\rho_{22} + \mu_{13}\rho_{32})E(t), \quad (\text{A.18})$$

já que $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = i\omega\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}(\mu_{13}\rho_{32} - \mu_{32}\rho_{13})E(t). \quad (\text{A.19})$$

Calculando $\frac{d\rho_{13}}{dt}$,

$$\frac{d}{dt}\langle 1|\rho|3\rangle = \frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|[\rho, H]|3\rangle, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d\rho_{13}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\rho(H_0 - \mu E(t)) - (H_0 - \mu E(t))\rho|3\rangle, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i}{\hbar} \langle 1|\rho(H_0 - \mu E(t))|3\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle 1|(H_0 - \mu E(t))\rho|3\rangle, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i}{\hbar} [\langle 1|\rho H_0|3\rangle - \langle 1|\rho\mu|3\rangle E(t) - \langle 1|H_0\rho|3\rangle + \langle 1|\mu\rho|3\rangle E(t)], \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i}{\hbar} \left[\begin{array}{l} \rho_{13}E_3 - \langle 1 | \rho (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 3|) \mu |3\rangle E(t) \\ -E_1\rho_{13} + \langle 1 | \mu (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 3|) \rho |3\rangle E(t) \end{array} \right], \quad (\text{A.24})$$

onde,

$$\langle 1 | \rho (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 3|) \mu |3\rangle E(t) = (-\rho_{11}\mu_{13}E(t) - \rho_{12}\mu_{23}E(t) - \rho_{13}\mu_{33}E(t)), \quad (\text{A.25})$$

$$\langle 1 | \mu (|1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 3|) \rho |3\rangle E(t) = E_1\rho_{13} + (\mu_{11}\rho_{13}E(t) + \mu_{12}\rho_{23}E(t) + \mu_{13}\rho_{33}E(t)), \quad (\text{A.26})$$

Mas como $\mu_{11} = \mu_{33} = \mu_{12} = \mu_{21} = 0$, portanto

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i(E_3 - E_1)}{\hbar}\rho_{13} + \frac{i}{\hbar} [\mu_{13}(\rho_{33} - \rho_{11}) - \rho_{12}\mu_{23}] E(t), \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = i\omega\rho_{13} + \frac{i}{\hbar} [\mu_{13}(\rho_{33} - \rho_{11}) - \rho_{12}\mu_{23}] E(t). \quad (\text{A.28})$$

Para

$$\frac{d}{dt}\langle 2 | \rho | 3 \rangle = \frac{d}{dt}\rho_{13} = \frac{i}{\hbar} \langle 2 | [\rho, H] | 3 \rangle, \quad (\text{A.29})$$

Empregando os mesmos procedimentos algébrico para encontrar o elemento anterior, obtém-se

$$\frac{d\rho_{23}}{dt} = i\omega\rho_{23} + \frac{i}{\hbar} [\mu_{23}(\rho_{33} - \rho_{22}) - \rho_{21}\mu_{13}] E(t). \quad (\text{A.30})$$

Para os demais elementos, tem-se

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{23}\rho_{32} - \rho_{23}\mu_{32}) E(t), \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{d\rho_{33}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{32}\rho_{23} - \rho_{32}\mu_{23}) E(t). \quad (\text{A.32})$$

Resumo:

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) E(t), \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = i\omega\rho_{12} + \frac{i}{\hbar} (\mu_{13}\rho_{32} - \mu_{32}\rho_{13}) E(t), \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{13} = i\omega\rho_{13} + \frac{i}{\hbar} [\mu_{13}(\rho_{33} - \rho_{11}) - \rho_{12}\mu_{23}] E(t), \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{d\rho_{23}}{dt} = i\omega\rho_{23} + \frac{i}{\hbar} [\mu_{23}(\rho_{33} - \rho_{22}) - \rho_{21}\mu_{13}] E(t), \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{23}\rho_{32} - \rho_{23}\mu_{32}) E(t), \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{d\rho_{33}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mu_{32}\rho_{23} - \rho_{32}\mu_{23}) E(t), \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{32} = -i\omega_{32}\rho_{32} - \frac{i}{\hbar} [\mu_{32}(\rho_{33} - \rho_{22}) - \mu_{31}\rho_{12}] E(t), \quad (\text{A.39})$$

As diferenças entre as probabilidades de ocupação $(\rho_{11} - \rho_{33})$ e $(\rho_{33} - \rho_{22})$ são obtidas de (A.33) e (A.38) e (A.38) e (A.37), respectivamente.

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{33}) = \frac{i}{\hbar} [2(\mu_{13}\rho_{31} - \rho_{13}\mu_{31}) - (\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})] E(t), \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{33} - \rho_{22}) = \frac{i}{\hbar} (\rho_{31}\mu_{13} + 2(\rho_{32}\mu_{23} - \mu_{32}\rho_{23})) E(t). \quad (\text{A.41})$$

**APÊNDICE B – EQUAÇÃO GERAL DO COEFICIENTE R COMO FUNÇÃO DOS
PARÂMETROS DO SISTEMA ATÔMICO**

Lembrando que

$$L_{32} = \omega_s - \omega_{32} + \frac{i}{\tau} = \Delta_s + \frac{i}{\tau}, \quad (\text{B.1})$$

$$L_{13} = \omega_{31} - \omega_p + \frac{i}{\tau} = -\Delta_p + \frac{i}{\tau}. \quad (\text{B.2})$$

Então

$$\frac{1}{L_{32}} = \frac{\tau}{\tau\Delta_s + i} = \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{(\tau\Delta_s + i)(\tau\Delta_s - i)} = \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2\tau^2 + 1}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{1}{L_{13}} = \frac{\tau}{i - \tau\Delta_p} = -\frac{\tau}{\tau\Delta_p - i} = -\frac{\tau(\tau\Delta_p + i)}{\tau\Delta_p - i(\tau\Delta_p + i)} = -\frac{\tau(\tau\Delta_p + i)}{\Delta_p^2\tau^2 + 1}. \quad (\text{B.4})$$

O denominador de R

$$\left(\Delta_s - \Delta_p + \frac{i}{\tau}\right) - \beta_{13}^2 \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2\tau^2 + 1} + \beta_{32}^2 \frac{\tau(\tau\Delta_p + i)}{\Delta_p^2\tau^2 + 1}, \quad (\text{B.5})$$

Definindo

$$a = 1 + \Delta_s^2\tau^2, \quad (\text{B.6})$$

$$b = 1 + \Delta_p^2\tau^2, \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta_s - \Delta_p + \frac{i}{\tau} - \beta_{13}^2 \frac{\Delta_s^2\tau^2}{a} + \frac{\beta_{13}^2\tau i}{a} + \frac{\beta_{32}^2}{b}\tau^2\Delta_p + \frac{\beta_{32}^2\tau i}{b}, \quad (\text{B.8})$$

ou

$$\Delta_s - \Delta_p - \beta_{13}^2 \frac{\Delta_s\tau^2}{a} + \frac{\beta_{32}^2}{b}\tau^2\Delta_p + i\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\beta_{32}^2\tau}{b} + \frac{\beta_{13}^2\tau}{a}\right), \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta_s\left(1 - \frac{\beta_{13}^2\tau^2}{a}\right) - \Delta_p\left(1 - \frac{\beta_{32}^2}{b}\tau^2\right) + \frac{i}{\tau}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\beta_{32}^2\tau^2}{b} + \frac{\beta_{13}^2\tau^2}{a}\right), \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\Delta_s}{a}(1 + \Delta_s^2\tau^2 - \beta_{13}^2\tau^2) - \frac{\Delta_p}{b}(1 + \Delta_p^2\tau^2 - \beta_{32}^2\tau^2) + \frac{i}{ba\tau}(ba + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b), \quad (\text{B.11})$$

onde

$$c = 1 + \Delta_s^2\tau^2 - \beta_{13}^2\tau^2, \quad (\text{B.12})$$

$$d = 1 + \Delta_p^2\tau^2 - \beta_{32}^2\tau^2. \quad (\text{B.13})$$

Então

$$\frac{\Delta_s}{a}c - \frac{\Delta_p}{b}d + \frac{i}{ba\tau} (ba + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b), \quad (\text{B.14})$$

$$R = \frac{1}{\Delta_s \left(\frac{c}{a}\right) - \Delta_p \left(\frac{d}{b}\right) + \frac{i}{\tau ba} (ba + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}, \quad (\text{B.15})$$

$$R = \frac{ab\tau}{bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau + i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}, \quad (\text{B.16})$$

$$R = \tau (1 + \Delta_s^2\tau^2) (1 + \Delta_p^2\tau^2) \frac{1}{bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau + i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}, \quad (\text{B.17})$$

Desenvolvendo o denominador de R ,

$$\frac{1}{bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau + i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)} \frac{bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau - i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}{bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau - i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}, \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{(bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau) - i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)}{(bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau)^2 - i(ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b)^2}, \quad (\text{B.19})$$

Definindo

$$A = bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau, \quad (\text{B.20})$$

$$B = ab + \beta_{32}^2\tau^2a + \beta_{13}^2\tau^2b, \quad (\text{B.21})$$

então:

$$R = \tau (1 + \Delta_s^2\tau^2) (1 + \Delta_p^2\tau^2) \frac{A - iB}{A^2 + B^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$R_1 = \tau (1 + \Delta_s^2\tau^2) (1 + \Delta_p^2\tau^2) \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad (\text{B.23})$$

$$R_2 = \tau (1 + \Delta_s^2\tau^2) (1 + \Delta_p^2\tau^2) \frac{B}{A^2 + B^2}. \quad (\text{B.24})$$

Por fim

$$R = R_1 - iR_2. \quad (\text{B.25})$$

Tendo em vista que

$$A = bc\Delta_s\tau - ad\Delta_p\tau, \quad (\text{B.26})$$

Substituindo as expressões para a , b , c e d , tem-se:

$$A = \Delta_s\tau (1 + \Delta_p^2\tau^2) (1 + \Delta_s^2\tau^2 - \beta_{13}^2\tau^2) - \Delta_p\tau (1 + \Delta_s^2\tau^2) (1 + \Delta_p^2\tau^2 - \beta_{32}^2\tau^2), \quad (\text{B.27})$$

$$B = ab + a\beta_{32}^2\tau^2 + b\beta_{13}^2\tau^2, \quad (\text{B.28})$$

$$B = (1 + \Delta_p^2\tau^2) (1 + \Delta_s^2\tau^2) + \beta_{32}^2\tau^2 (1 + \Delta_p^2\tau^2) + (1 + \Delta_s^2\tau^2) \beta_{13}^2\tau^2. \quad (\text{B.29})$$

As soluções para ρ_{13} e ρ_{32} resultam em

$$\rho_{13}(t) = \frac{\mu_{13}}{2\hbar L_{13}} \left[r_{13} + \beta_{32}^2 R \left(\frac{r_{13}}{L_{13}} - \frac{r_{32}}{L_{32}} \right) \right] A_p e^{i\omega_p t}, \quad (\text{B.30})$$

$$\rho_{32}(t) = \frac{\mu_{32}}{2\hbar L_{32}} \left[r_{32} + \beta_{13}^2 R \left(\frac{r_{13}}{L_{13}} - \frac{r_{32}}{L_{32}} \right) \right] A_s^* e^{-i\omega_s t}. \quad (\text{B.31})$$

Deve-se, agora, obter as expressões para as diferenças das densidades de ocupação dos níveis de energia ($\rho_{11} - \rho_{33}$) e ($\rho_{33} - \rho_{22}$) na condição de regime permanente, isto é,

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{33}) = \frac{d}{dt}(\rho_{33} - \rho_{22}) = 0. \quad (\text{B.32})$$

Inserindo a condição acima nas equações (2.20) e (2.22), obtém-se

$$\left[\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} \right] = \frac{i}{\hbar} [2(\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{31}\rho_{13}) - (\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})] E(t), \quad (\text{B.33})$$

$$\left[\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau} \right] = \frac{i}{\hbar} [(\mu_{31}\rho_{13} - \mu_{13}\rho_{31}) - 2(\mu_{32}\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})] E(t), \quad (\text{B.34})$$

No que segue, as expressões obtidas para ρ_{13} e ρ_{32} devem-se ser substituídas, assim como a expressão para $E(t)$, então

$$\rho_{13} = \Lambda e^{i\omega_p t} \rightarrow \rho_{31} = \rho_{13}^* = \Lambda^* e^{-i\omega_p t}, \quad (\text{B.35})$$

$$\rho_{32} = \lambda e^{-i\omega_s t} \rightarrow \rho_{23} = \rho_{32}^* = \lambda^* e^{i\omega_s t}, \quad (\text{B.36})$$

$$\left[\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} \right] = \frac{i}{\hbar} \left[2\mu_{13}\Lambda^* e^{-i\omega_p t} - 2\mu_{31}\Lambda e^{i\omega_p t} - \mu_{32}\lambda^* e^{i\omega_s t} + \mu_{23}\lambda e^{-i\omega_s t} \right] \cdot \left[\frac{1}{2}A_p e^{i\omega_p t} + \frac{1}{2}A_p^* e^{-i\omega_p t} + \frac{1}{2}A_s e^{i\omega_s t} + \frac{1}{2}A_s^* e^{-i\omega_s t} \right], \quad (\text{B.37})$$

ou

$$\left[\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} \right] = \frac{i}{\hbar} \left[\mu_{13}A_p\Lambda^* - \mu_{31}A_p^*\Lambda - \frac{\mu_{32}}{2}A_s^*\lambda^* + \frac{\mu_{23}}{2}A_s\lambda \right], \quad (\text{B.38})$$

foram retidos somente os termos independentes das frequências. Tem-se,

$$\left[\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} \right] = i \left[\frac{\mu_{13}A_p}{\hbar}\Lambda^* - \frac{\mu_{31}A_p^*}{\hbar}\Lambda - \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar}\lambda^* + \frac{\mu_{23}A_s}{2\hbar}\lambda \right], \quad (\text{B.39})$$

$$\left[\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau} \right] = \frac{i}{\hbar} \left[\mu_{31}\Lambda e^{i\omega_p t} - \mu_{13}\Lambda^* e^{-i\omega_p t} + 2\mu_{32}\lambda^* e^{i\omega_s t} - 2\mu_{23}\lambda e^{-i\omega_s t} \right] \cdot \left[\frac{1}{2}A_p e^{i\omega_p t} + \frac{1}{2}A_p^* e^{-i\omega_p t} + \frac{1}{2}A_s e^{i\omega_s t} + \frac{1}{2}A_s^* e^{-i\omega_s t} \right], \quad (\text{B.40})$$

que resulta em

$$\left[\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau} \right] = i \left[\frac{\mu_{31}A_p^*}{2\hbar}\Lambda - \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar}\Lambda^* + \frac{\mu_{32}A_s^*}{\hbar}\lambda^* - \frac{\mu_{23}A_s}{\hbar}\lambda \right], \quad (\text{B.41})$$

onde λ e Λ são dados segundo

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar L_{32}} \left[r_{32} - \beta_{13}^2 R \left(\frac{r_{13}}{L_{13}} - \frac{r_{32}}{L_{32}} \right) \right], \quad (\text{B.42})$$

$$\Lambda = \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar L_{13}} \left[r_{13} - \beta_{32}^2 R \left(\frac{r_{13}}{L_{13}} - \frac{r_{32}}{L_{32}} \right) \right]. \quad (\text{B.43})$$

Desenvolvendo λ e Λ ,

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar L_{32}} r_{32} - \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar L_{32}} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{r_{13}}{L_{13}} + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar L_{32}} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{r_{32}}{L_{32}}, \quad (\text{B.44})$$

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^* r_{32}}{2\hbar} \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2 \tau^2 + 1} - \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2 \tau^2 + 1} \frac{r_{13}}{L_{13}} + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{r_{32}}{L_{32}}, \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{1}{L_{32}} \frac{1}{L_{32}} = \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2 \tau^2 + 1} \frac{\tau(\tau\Delta_s - i)}{\Delta_s^2 \tau^2 + 1} = \frac{\tau^2 (\Delta_s^2 \tau^2 - 2i\tau\Delta_s - 1)}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} = \frac{\tau^2 (\Delta_s^2 \tau^2 - 1)}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} - \frac{i\tau^2 2\tau\Delta_s}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2}, \quad (\text{B.46})$$

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left[\frac{r_{32}}{L_{32}} - \frac{1}{L_{32}} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{r_{13}}{L_{13}} + \frac{1}{L_{32}} \beta_{13}^2 (R_1 - iR_2) \frac{r_{32}}{L_{32}} \right], \quad (\text{B.47})$$

$$\lambda = \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} \left[\frac{r_{32} \tau (\tau \Delta_s - i)}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} + \alpha_1 + \alpha_2 \right], \quad (\text{B.48})$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{\beta_{13}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2) (1 + \Delta_p^2 \tau^2)} (R_1 - iR_2) (\tau \Delta_s - i) (\tau \Delta_p + i), \quad (\text{B.49})$$

e

$$(\tau \Delta_s - i) (\tau \Delta_p + i) = \Delta_s \Delta_p \tau^2 + i (\Delta_s \tau - \Delta_p \tau) + 1 = \Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1 - i (\Delta_s - \Delta_p) \tau, \quad (\text{B.50})$$

então

$$(R_1 - iR_2) (\tau \Delta_s - i) (\tau \Delta_p + i) = (R_1 - iR_2) [(\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - i (\Delta_s - \Delta_p) \tau], \quad (\text{B.51})$$

logo

$$\begin{aligned} (R_1 - iR_2) (\tau \Delta_s - i) (\tau \Delta_p + i) &= (R_1 - iR_2) [(\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - i (\Delta_s - \Delta_p) \tau] \\ &= R_1 (\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - i (\Delta_s - \Delta_p) \tau R_1 - iR_2 (\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - R_2 (\Delta_s - \Delta_p) \tau. \quad (\text{B.52}) \\ &= R_1 (\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - R_2 \tau (\Delta_s - \Delta_p) - i [(\Delta_s - \Delta_p) \tau R_1 + (\Delta_s - \Delta_p) R_2 \tau] \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha_1 = \frac{\beta_{13}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2) (1 + \Delta_p^2 \tau^2)} \{ R_1 (\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - R_2 \tau (\Delta_s - \Delta_p) - i [(\Delta_s - \Delta_p) \tau R_1 + (\Delta_s - \Delta_p) R_2 \tau] \} \quad (\text{B.53})$$

Para α_2

$$\alpha_2 = \frac{\beta_{13}^2 r_{32} \tau^2}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} (R_1 - iR_2) [(\Delta_s^2 \tau^2 - 1) - i2\tau \Delta_s], \quad (\text{B.54})$$

onde

$$(R_1 - iR_2) [(\Delta_s^2 \tau^2 - 1) - i2\tau \Delta_s] = R_1 (\Delta_s^2 \tau^2 - 1) - 2\Delta_s \tau R_2 - i [(\Delta_s^2 \tau^2 - 1) R_2 + 2\Delta_s \tau R_1], \quad (\text{B.55})$$

então

$$\alpha_2 = \frac{\beta_{13}^2 r_{32} \tau^2}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} \{ (\Delta_s^2 \tau^2 - 1) R_1 - 2\Delta_s \tau R_2 + i [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_2 - 2\Delta_s \tau R_1] \}, \quad (\text{B.56})$$

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_{13}^2 r_{32} \tau^2}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} \{ (1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_1 + 2\Delta_s \tau R_2 - i [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_2 - 2\Delta_s \tau R_1] \}. \quad (\text{B.57})$$

Em resumo

$$\alpha_1 = \frac{\beta_{13}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2) (1 + \Delta_p^2 \tau^2)} \{ R_1 (\Delta_s \Delta_p \tau^2 + 1) - R_2 \tau (\Delta_s - \Delta_p) - i [(\Delta_s - \Delta_p) \tau R_1 + (\Delta_s - \Delta_p) R_2 \tau] \} \quad (\text{B.58})$$

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_{13}^2 r_{32} \tau^2}{(\Delta_s^2 \tau^2 + 1)^2} \{ (1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_1 + 2\Delta_s \tau R_2 - i [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_2 - 2\Delta_s \tau R_1] \}. \quad (\text{B.59})$$

Mas

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left[\frac{r_{32}\tau(\tau\Delta_s - i)}{1 + \Delta_s^2\tau^2} + \alpha_1 + \alpha_2 \right], \quad (\text{B.60})$$

então

$$\lambda = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{32}\tau^2\Delta_s}{1+\Delta_s^2\tau^2} - \frac{ir_{32}\tau}{1+\Delta_s^2\tau^2} + \frac{\beta_{13}^2 r_{13}\tau^2}{(1+\Delta_s^2\tau^2)(1+\Delta_p^2\tau^2)} [(1 + \Delta_s\Delta_p\tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s)\tau R_2] \\ -i \frac{\beta_{13}^2 r_{13}\tau^2}{(1+\Delta_s^2\tau^2)(1+\Delta_p^2\tau^2)} [(\Delta_s - \Delta_p)\tau R_1 + (\Delta_s - \Delta_p) R_2\tau] \\ - \frac{\beta_{13}^2 r_{32}\tau^2}{(\Delta_s^2\tau^2+1)^2} \{ (1 - \Delta_s^2\tau^2) R_1 + 2\Delta_s\tau R_2 - i [(1 - \Delta_s^2\tau^2) R_2 - 2\Delta_s\tau R_1] \} \end{array} \right\}. \quad (\text{B.61})$$

Escrevendo $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, tem-se que

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{32}\tau^2\Delta_s}{1+\Delta_s^2\tau^2} + \frac{\beta_{13}^2 r_{13}\tau^2}{(1+\Delta_s^2\tau^2)(1+\Delta_p^2\tau^2)} [(1 + \Delta_s\Delta_p\tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s)\tau R_2] \\ - \frac{\beta_{13}^2 r_{32}\tau^2}{(\Delta_s^2\tau^2+1)^2} [(1 - \Delta_s^2\tau^2) R_1 + 2\Delta_s\tau R_2] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.62})$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{r_{32}\tau}{1+\Delta_s^2\tau^2} + \frac{\beta_{13}^2 r_{13}\tau^2}{(1+\Delta_s^2\tau^2)(1+\Delta_p^2\tau^2)} [(\Delta_p - \Delta_s)\tau R_1 + (\Delta_p - \Delta_s)\tau R_2] \\ + \frac{\beta_{13}^2 r_{32}\tau^2}{(\Delta_s^2\tau^2+1)^2} [(1 - \Delta_s^2\tau^2) R_2 - 2\Delta_s\tau R_1] \end{array} \right\}. \quad (\text{B.63})$$

Desenvolvimento de $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$

$$\Lambda = \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar L_{13}} \left[r_{13} + \beta_{32}^2 (R_1 - iR_2) \left(\frac{r_{13}}{L_{13}} - \frac{r_{32}}{L_{32}} \right) \right], \quad (\text{B.64})$$

$$\Lambda = \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \left[\frac{r_{13}}{L_{13}} + \beta_{32}^2 r_{13} \frac{(R_1 - iR_2)}{L_{13}^2} - \beta_{32}^2 r_{32} \frac{(R_1 - iR_2)}{L_{13}L_{32}} \right], \quad (\text{B.65})$$

onde

$$\frac{1}{L_{13}^2} = \frac{\tau^2 (\tau\Delta_p + i)(\tau\Delta_p + i)}{(\Delta_p^2\tau^2 + 1)^2} = \frac{\tau^2}{(\Delta_p^2\tau^2 + 1)^2} [(\tau^2\Delta_p^2 - 1) + i2\Delta_p\tau], \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{1}{L_{13}} \frac{1}{L_{32}} = - \frac{\tau^2 (\tau\Delta_p + i)(\tau\Delta_s - i)}{(1 + \Delta_p^2\tau^2)(1 + \Delta_s^2\tau^2)}, \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{1}{L_{13}L_{32}} = - \frac{\tau^2 [(1 + \Delta_s\Delta_p\tau^2) + i(\Delta_p - \Delta_s)\tau]}{(1 + \Delta_p^2\tau^2)(1 + \Delta_s^2\tau^2)} \quad (\text{B.68})$$

Desenvolvimento dos produtos $\frac{(R_1 - iR_2)}{L_{13}^2}$ e $\frac{(R_1 - iR_2)}{L_{13}L_{32}}$ da equação de Λ :

$$\frac{R_1 - iR_2}{L_{13}^2} = - (R_1 - iR_2) \frac{\tau^2}{(\Delta_p^2\tau^2 + 1)^2} [(1 - \tau^2\Delta_p^2) - i2\Delta_p\tau], \quad (\text{B.69})$$

onde

$$a = \frac{\tau^2}{(\Delta_p^2\tau^2 + 1)^2}, \quad (\text{B.70})$$

Então,

$$\frac{-(R_1 - iR_2)}{L_{13}^2} = (aR_1 - iaR_2) [(1 - \tau^2 \Delta_p^2) - i2\Delta_p \tau], \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} \frac{-(R_1 - iR_2)}{L_{13}^2} &= aR_1 (1 - \tau^2 \Delta_p^2) - aR_1 i2\Delta_p \tau - iaR_2 (1 - \tau^2 \Delta_p^2) - aR_2 2\Delta_p \tau \\ &= a [R_1 (1 - \tau^2 \Delta_p^2) - R_2 2\Delta_p \tau] - ai [R_1 2\Delta_p \tau + R_2 (1 - \tau^2 \Delta_p^2)] \\ &= a \{ [R_1 (1 - \tau^2 \Delta_p^2) - R_2 2\Delta_p \tau] - i [R_1 2\Delta_p \tau + R_2 (1 - \tau^2 \Delta_p^2)] \}, \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{R_1 - iR_2}{L_{13}^2} = -\frac{\tau^2}{(\Delta_p^2 \tau^2 + 1)^2} \{ [(1 - \tau^2 \Delta_p^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2] - i [(1 - \tau^2 \Delta_p^2) R_2 + 2\Delta_p \tau R_1] \}, \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{R_1 - iR_2}{L_{13} L_{32}} = -\frac{(R_1 - iR_2) \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} [(1 + \Delta_p \Delta_s \tau^2) + i(\Delta_p - \Delta_s) \tau] \quad (\text{B.74})$$

$$\begin{aligned} \frac{R_1 - iR_2}{L_{13} L_{32}} &= -\frac{(R_1 - iR_2) \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} [(1 + \Delta_p \Delta_s \tau^2) + i(\Delta_p - \Delta_s) \tau] \\ &= -\frac{\tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} \{ (1 + \Delta_p \Delta_s \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2 - i [(1 + \Delta_p \Delta_s \tau^2) R_2 - (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1] \}. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Em resumo

$$\Lambda = \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\tau(\tau \Delta_p + i)r_{13}}{\Delta_p^2 \tau^2 + 1} - \frac{\beta_{32}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} \{ (1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2 \\ -i[(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_2 + 2\Delta_p \tau R_1] \} \\ -\frac{\beta_{32}^2 r_{32} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} \{ (1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2 \\ -i[(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_2 - (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1] \} \end{array} \right\}, \quad (\text{B.76})$$

Parte real de Λ ,

$$\Lambda_1 = \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Delta_p \tau^2 r_{13}}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} - \frac{\beta_{32}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2] \\ -\frac{\beta_{32}^2 r_{32} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.77})$$

Parte imaginária de Λ

$$\Lambda_2 = \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\tau r_{13}}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} + \frac{\beta_{32}^2 r_{13} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_2 + 2\Delta_p \tau R_1] \\ +\frac{\beta_{32}^2 r_{32} \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_2 - (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1] \end{array} \right\}. \quad (\text{B.78})$$

As equações para $\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau}$ e $\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau}$ resulta

$$\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} = i \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_{13} A_p}{\hbar} (\Lambda_1 - i\Lambda_2) - \frac{\mu_{31} A_p^*}{\hbar} (\Lambda_1 - i\Lambda_2) - \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} (\lambda_1 - i\lambda_2) \\ + \frac{\mu_{23} A_s}{2\hbar} (\lambda_1 + i\lambda_2) \end{array} \right], \quad (\text{B.79})$$

$$\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau} = i \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_{31}A_p^*}{2\hbar} (\Lambda_1 - i\Lambda_2) - \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} (\Lambda_1 - i\Lambda_2) - \frac{\mu_{32}A_s^*}{\hbar} (\lambda_1 - i\lambda_2) \\ - \frac{\mu_{23}A_s}{2\hbar} (\lambda_1 + i\lambda_2) \end{array} \right], \quad (\text{B.80})$$

$$\Lambda_1 = - \left\{ \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \left(\frac{\Delta_p \tau^2 r_{13}}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \right) + \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \frac{\beta_{32}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2] \right\} r_{13} \\ - \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \frac{\beta_{32}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} r_{32}, \quad (\text{B.81})$$

$$\Lambda_2 = - \left\{ \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \left(\frac{\tau}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} \right) - \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \frac{\beta_{32}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2] \right\} r_{13} \\ + \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} \frac{\beta_{32}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_2 - (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1]}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} r_{32} \quad (\text{B.82})$$

de maneira análoga para λ

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left\{ \frac{\Delta_s \tau^2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} - \frac{\beta_{13}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_1 + 2\Delta_s \tau R_2] \right\} r_{32} \\ + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \frac{\beta_{13}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)(1 + \Delta_p^2 \tau^2)} r_{13}, \quad (\text{B.83})$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \left\{ -\frac{\Delta_s \tau^2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} + \frac{\beta_{13}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_2 - 2\Delta_s \tau R_1] \right\} r_{32} \\ + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} \frac{\beta_{13}^2 \tau^2 [(\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)(1 + \Delta_p^2 \tau^2)} r_{13}, \quad (\text{B.84})$$

A fim de definir o tamanho dos termos, definimos

$$\Lambda_1 = -\frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} E r_{13} - \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} F r_{32}, \quad (\text{B.85})$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} G r_{13} + \frac{\mu_{13}A_p}{2\hbar} H r_{32}, \quad (\text{B.86})$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} I r_{13} + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} J r_{32}, \quad (\text{B.87})$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} K r_{13} + \frac{\mu_{32}A_s^*}{2\hbar} L r_{32}, \quad (\text{B.88})$$

onde

$$E = \frac{\Delta_p \tau^2}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} + \frac{\beta_{32}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2], \quad (\text{B.89})$$

$$F = \frac{\beta_{32}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)}, \quad (\text{B.90})$$

$$G = \frac{\tau}{1 + \Delta_p^2 \tau^2} - \frac{\beta_{32}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_p^2 \tau^2) R_1 - 2\Delta_p \tau R_2], \quad (\text{B.91})$$

$$H = \frac{\beta_{32}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_2 - (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1]}{(1 + \Delta_p^2 \tau^2)(1 + \Delta_s^2 \tau^2)}, \quad (\text{B.92})$$

$$I = \frac{\beta_{13}^2 \tau^2 [(1 + \Delta_s \Delta_p \tau^2) R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)(1 + \Delta_p^2 \tau^2)}, \quad (\text{B.93})$$

$$J = \frac{\Delta_s \tau^2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} - \frac{\beta_{13}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)^2} [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_1 + 2\Delta_s \tau R_2], \quad (\text{B.94})$$

$$K = \frac{\beta_{13}^2 \tau^2 [(\Delta_p - \Delta_s) \tau R_1 + (\Delta_p - \Delta_s) \tau R_2]}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)(1 + \Delta_p^2 \tau^2)}, \quad (\text{B.95})$$

$$L = -\frac{\Delta_s \tau^2}{1 + \Delta_s^2 \tau^2} + \frac{\beta_{13}^2 \tau^2}{(1 + \Delta_s^2 \tau^2)} [(1 - \Delta_s^2 \tau^2) R_2 - 2\Delta_s \tau R_1], \quad (\text{B.96})$$

Substituindo nas expressões para $\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau}$ e $\frac{r_{32} - (r_{32})_0}{\tau}$, segue:

$$\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} = i \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_{13} A_p}{\hbar} \left[\left(-\frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} E r_{13} - \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} F r_{32} \right) - i \left[\left(-\frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} G r_{13} + \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} H r_{32} \right) \right] \right] \\ - \frac{\mu_{31} A_p^*}{\hbar} \left[\left(-\frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} E r_{13} - \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} F r_{32} \right) + i \left(-\frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} G r_{13} + \frac{\mu_{13} A_p}{2\hbar} H r_{32} \right) \right] \\ - \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} \left[\left(\frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} I r_{13} + \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} J r_{32} \right) - i \left(\frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} K r_{13} + \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} L r_{32} \right) \right] \\ + \frac{\mu_{23} A_s}{2\hbar} \left[\left(\frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} I r_{13} + \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} J r_{32} \right) + i \left(\frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} K r_{13} + \frac{\mu_{32} A_s^*}{2\hbar} L r_{32} \right) \right] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.97})$$

$$\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} = i \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mu_{13}^2 A_p^2}{2\hbar^2} E r_{13} - \frac{\mu_{13}^2 A_p^2}{2\hbar^2} F r_{32} + \frac{|\mu_{31}|^2 |A_p|^2}{2\hbar^2} E r_{13} + \frac{|\mu_{31}|^2 |A_p|^2}{2\hbar^2} F r_{32} \\ -\frac{\mu_{32}^2 A_s^{*2}}{4\hbar^2} I r_{13} - \frac{\mu_{32}^2 A_s^{*2}}{4\hbar^2} J r_{32} + \frac{|\mu_{32}|^2 |A_s|^2}{4\hbar^2} I r_{13} + \frac{|\mu_{32}|^2 |A_s|^2}{4\hbar^2} J r_{32} \\ -i \left[\begin{array}{l} -\frac{\mu_{13}^2 A_p^2}{2\hbar^2} G r_{13} + \frac{\mu_{13}^2 A_p^2}{2\hbar^2} H r_{32} + \frac{|\mu_{31}|^2 |A_p|^2}{2\hbar^2} G r_{13} - \frac{|\mu_{31}|^2 |A_p|^2}{2\hbar^2} H r_{32} \\ -\frac{\mu_{32}^2 A_s^{*2}}{4\hbar^2} K r_{13} - \frac{\mu_{32}^2 A_s^{*2}}{4\hbar^2} L r_{32} - \frac{|\mu_{32}|^2 |A_s|^2}{4\hbar^2} K r_{13} - \frac{|\mu_{32}|^2 |A_s|^2}{4\hbar^2} L r_{32} \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.98})$$

$$\frac{r_{13} - (r_{13})_0}{\tau} = i \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\hbar^2} \left(|\mu_{31}|^2 |A_p|^2 - \mu_{31}^2 A_p^2 \right) E r_{13} - \frac{1}{2\hbar^2} \left(|\mu_{31}|^2 |A_p|^2 - \mu_{31}^2 A_p^2 \right) F r_{32} \\ + \frac{1}{4\hbar^2} \left(|\mu_{32}|^2 |A_s|^2 - \mu_{32}^2 A_s^{*2} \right) I r_{13} + \frac{1}{4\hbar^2} \left(|\mu_{32}|^2 |A_s|^2 - \mu_{32}^2 A_s^{*2} \right) J r_{32} \\ -i \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2\hbar^2} \left(|\mu_{31}|^2 |A_p|^2 - \mu_{31}^2 A_p^2 \right) G r_{13} + \frac{1}{2\hbar^2} \left(\mu_{13}^2 A_p^2 - |\mu_{31}|^2 |A_p|^2 \right) H r_{32} \\ -\frac{1}{4\hbar^2} \left(\mu_{32}^2 A_s^{*2} - |\mu_{32}|^2 |A_s|^2 \right) K r_{13} - \frac{1}{4\hbar^2} \left(\mu_{32}^2 A_s^{*2} - |\mu_{32}|^2 |A_s|^2 \right) L r_{32} \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.99})$$

**APÊNDICE C – SOLUÇÃO DO DETERMINANTE PARA ENCONTRAR A RELAÇÃO DE
DISPERSÃO DOS MODOS ELETROMAGNÉTICOS SUSTENTADOS PELO GUIA DE
ONDAS ÓPTICO**

Seja o seguinte determinante,

$$\begin{vmatrix} J_\nu(k_c a) & 0 & -K_\nu(h a) & 0 \\ \frac{j\nu}{k_c^2 a} J_\nu(k_c a) & -\frac{\omega\mu_0}{k_c\beta} J'_\nu(k_c a) & \frac{j\nu}{h^2 a} K_\nu(h a) & -\frac{j\omega\mu_0}{h\beta} K'_\nu(h a) \\ 0 & J_\nu(k_c a) & 0 & -K_\nu(h a) \\ \frac{\omega\varepsilon_1}{k_c\beta} J'_\nu(k_c a) & \frac{j\nu}{k_c^2 a} J_\nu(k_c a) & \frac{j\omega\varepsilon_2}{h\beta} K'_\nu(h a) & \frac{j\nu}{h^2 a} K_\nu(h a) \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{C.1})$$

definindo os coeficientes do determinante C.1 como $A = J_\nu(k_c a)$, $B = j\nu/k_c^2 a$, $C = (\omega/k_c\beta) J'_\nu(k_c a)$, $D = K_\nu(h a)$, $E = j\nu/h^2 a$ e $F = (j\omega/h\beta) K'_\nu(h a)$, tem-se que

$$\begin{vmatrix} A & 0 & -D & 0 \\ BA & -\mu_0 C & ED & -\mu_0 F \\ 0 & A & 0 & -D \\ \varepsilon_1 C & BA & \varepsilon_2 F & ED \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{C.2})$$

resolvendo o determinante C.2 pelo teorema de Laplace, resulta em (escolhendo a linha 1, nesse caso)

$$A \begin{vmatrix} -\mu_0 C & ED & -\mu_0 F \\ A & 0 & -D \\ BA & \varepsilon_2 F & ED \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} -BA & -\mu_0 C & -\mu_0 F \\ 0 & A & -D \\ \varepsilon_1 C & BA & ED \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{C.3})$$

o determinante C.3 pode ser reescrito como $A.A_1 - D.D_1 = 0$, onde A_1 e D_1 são encontrados, respectivamente, pelo método de Sarrus

$$A_1 = \begin{vmatrix} -\mu_0 C & ED & -\mu_0 F \\ A & 0 & -D \\ BA & \varepsilon_2 F & ED \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu_0 C & ED \\ BA & \varepsilon_2 F \end{vmatrix} = \quad (\text{C.4})$$

$$-ED^2 BA - \mu_0 \varepsilon_2 AF^2 - \mu_0 \varepsilon_2 FDC - E^2 D^2 A,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} BA & -\mu_0 C & -\mu_0 F \\ 0 & A & -D \\ \varepsilon_1 C & BA & ED \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} BA & -\mu_0 C \\ \varepsilon_1 C & BA \end{vmatrix} = \quad (\text{C.5})$$

$$BA^2 ED + \mu_0 \varepsilon_1 DC^2 + \mu_0 \varepsilon_1 CAF + A^2 B^2 D,$$

voltando para $A.A_1 - D.D_1 = 0$ e realizando a substituição de A_1 e D_1 , tem-se

$$\begin{aligned} & -\mu_0\varepsilon_2 A^2 F^2 - \mu_0\varepsilon_2 ACDF - \mu_0\varepsilon_1 D^2 C^2 - \mu_0\varepsilon_1 ACDF \\ & -A^2 B^2 D^2 - A^2 D^2 E^2 - 2A^2 BD^2 E = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

dividindo C.6 por $A^2 D^2$ e organizando os termos, resulta em

$$\mu_0\varepsilon_1 \frac{C^2}{A^2} + \mu_0\varepsilon_1 \frac{CF}{AD} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{FC}{AD} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{F^2}{D^2} + B^2 + 2EB + E^2 = 0, \quad (\text{C.7})$$

mas como $(B + E)^2 = B^2 + 2EB + E^2$, então C.7 ficará da seguinte forma

$$\mu_0\varepsilon_1 \frac{C^2}{A^2} + \mu_0\varepsilon_1 \frac{CF}{AD} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{FC}{AD} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{F^2}{D^2} = -(B + E)^2, \quad (\text{C.8})$$

ou, de uma forma mais compacta, C.8

$$\mu_0\varepsilon_1 \frac{C}{A} \left(\frac{C}{A} + \frac{F}{D} \right) + \mu_0\varepsilon_2 \frac{F}{D} \left(\frac{C}{A} + \frac{F}{D} \right) = -(B + E)^2, \quad (\text{C.9})$$

evidenciando o termo $\left(\frac{C}{A} + \frac{F}{D}\right)$ em C.9, obtém-se

$$\left(\frac{C}{A} + \frac{F}{D} \right) \left(\mu_0\varepsilon_1 \frac{C}{A} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{F}{D} \right) = -(B + E)^2, \quad (\text{C.10})$$

substituindo os coeficientes que foram definidos inicialmente, tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega J'_\nu(k_c a)}{k_c \beta J'_\nu(k_c a)} + \frac{j\omega K'_\nu(ha)}{h\beta K_\nu(ha)} \right) \left(\mu_0\varepsilon_1 \frac{\omega J'_\nu(k_c a)}{k_c \beta J'_\nu(k_c a)} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{j\omega K'_\nu(ha)}{h\beta K_\nu(ha)} \right) = \\ & - \left(\frac{j\nu}{k_c^2 \cdot a} + \frac{j\nu}{h^2 a} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

o termo do lado direito de C.11 pode ser reescrito como

$$- \left(\frac{j\nu}{k_c^2 \cdot a} + \frac{j\nu}{h^2 a} \right)^2 = - \left[j\nu \left(\frac{1}{k_c^2 \cdot a} + \frac{1}{h^2 a} \right) \right]^2 = \nu^2 \left[\left(\frac{1}{k_c^2 \cdot a} + \frac{1}{h^2 a} \right) \right]^2, \quad (\text{C.12})$$

que sendo substituído em C.11, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega J'_\nu(k_c a)}{k_c \beta J'_\nu(k_c a)} + \frac{j\omega K'_\nu(ha)}{h\beta K_\nu(ha)} \right) \left(\mu_0\varepsilon_1 \frac{\omega J'_\nu(k_c a)}{k_c \beta J'_\nu(k_c a)} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{j\omega K'_\nu(ha)}{h\beta K_\nu(ha)} \right) = \\ & \nu^2 \left[\left(\frac{1}{k_c^2 \cdot a} + \frac{1}{h^2 a} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

ou pode ser escrita também da forma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J'_\nu(k_c a)}{k_c J'_\nu(k_c a)} + \frac{jK'_\nu(ha)}{hK_\nu(ha)} \right) \left(\mu_0\varepsilon_1 \frac{\omega^2 J'_\nu(k_c a)}{k_c J'_\nu(k_c a)} + \mu_0\varepsilon_2 \frac{j\omega^2 K'_\nu(ha)}{hK_\nu(ha)} \right) = \\ & \nu^2 \left[\left(\frac{1}{k_c^2 a} + \frac{1}{h^2 a} \right) \right]^2 \beta^2, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

como $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 = n_1^2 k_0^2$ e $k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 = n_2^2 k_0^2$, então realizando essas substituições em C.14, resulta na relação de dispersão (C.15) para os modos híbridos dos campos eletromagnéticos.

$$\left(\frac{J'_\nu(k_c a)}{k_c J'_\nu(k_c a)} + \frac{jK'_\nu(ha)}{hK_\nu(ha)} \right) \left(\frac{n_1^2 J'_\nu(k_c a)}{k_c J'_\nu(k_c a)} + \frac{jn_2^2 K'_\nu(ha)}{hK_\nu(ha)} \right) = \nu^2 \left(\frac{1}{k_c^2 a} + \frac{1}{h^2 a} \right)^2 \left(\frac{\beta}{k_c} \right)^2, \quad (\text{C.15})$$

multiplicando C.15 por $1/a^2$, obtém-se, finalmente, o resultado para a relação de dispersão dos modos eletromagnéticos sustentados pela estrutura do guia óptico, ou seja

$$\left(\frac{1}{k_c a} \frac{J'_\nu(k_c a)}{J'_\nu(k_c a)} + \frac{1}{h a} \frac{K'_\nu(h a)}{K_\nu(h a)} \right) \left(\frac{n_1^2}{k_c a} \frac{J'_\nu(k_c a)}{J'_\nu(k_c a)} + \frac{n_2^2}{h a} \frac{K'_\nu(h a)}{K_\nu(h a)} \right) = \nu^2 \left[\left(\frac{1}{k_c a} \right)^2 + \left(\frac{1}{h a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{\beta}{k_c} \right)^2. \quad (\text{C.16})$$

**APÊNDICE D – FUNÇÕES AUXILIARES DO VALOR MÉDIO DA DENSIDADE DE
POPULAÇÃO IÔNICA**

$$\frac{N_2(z)}{N} = \frac{\left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) \sigma_p^a P_p(z) + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) \sigma_s^a P_s(z)}{\left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) (\sigma_p^a + \sigma_p^e) P_p(z) + \frac{1}{\tau_2} + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) (\sigma_s^a + \sigma_s^e) P_s(z)} \quad (\text{D.1})$$

Através da equação (D.1) é possível explicitar os termos que dependem somente do sinal de bombeamento $P_p(z)$ e do sinal laser $P_s(z)$. Portanto, de (D.1) temos que:

$$\frac{N_2(z)}{N} \left\{ \left(\frac{\Gamma_p \sigma_p^{ae}}{h\nu_p A}\right) P_p(z) + \frac{1}{\tau_2} + \left(\frac{\Gamma_s \sigma_s^{ae}}{h\nu_s A}\right) P_s(z) \right\} = \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) \sigma_p^a P_p(z) + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) \sigma_s^a P_s(z) \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_p \sigma_p^{ae}}{h\nu_p A}\right) P_p(z) + \frac{N_2(z)}{N} \frac{1}{\tau_2} + \frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_s \sigma_s^{ae}}{h\nu_s A}\right) P_s(z) = \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) \sigma_p^a P_p(z) + \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) \sigma_s^a P_s(z) \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_p \sigma_p^{ae}}{h\nu_p A}\right) P_p(z) - \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) \sigma_p^a P_p(z) + \frac{N_2(z)}{N} \frac{1}{\tau_2} + \frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_s \sigma_s^{ae}}{h\nu_s A}\right) P_s(z) - \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) \sigma_s^a P_s(z) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{N_2(z)}{N \tau_2} + \frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_s \sigma_s^{ae}}{h\nu_s A}\right) P_s(z) - \left(\frac{\Gamma_s}{h\nu_s A}\right) \sigma_s^a P_s(z) = \left(\frac{\Gamma_p}{h\nu_p A}\right) \sigma_p^a P_p(z) - \frac{N_2(z)}{N} \left(\frac{\Gamma_p \sigma_p^{ae}}{h\nu_p A}\right) P_p(z) \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{N_2(z)}{N} + \left(\frac{\tau_2 \Gamma_s}{h\nu_s A} P_s(z)\right) \left[\frac{N_2(z)}{N} \sigma_s^{ae} - \sigma_s^a \right] = \left(\frac{\tau_2 \Gamma_p}{h\nu_p A} P_p(z)\right) \left[\sigma_p^a - \frac{N_2(z)}{N} \sigma_p^{ae} \right] \quad (\text{D.6})$$

O lado direito da equação (D.6) descreve o termo que depende de $P_p(z)$ e o seu lado esquerdo que depende de $P_s(z)$, de forma que possibilita expressar as funções auxiliares ϕ_1 e ϕ_2 como se segue:

$$\phi_1 = \left(\frac{\tau_2 \Gamma_p}{h\nu_p A} P_p(z)\right) \left[\sigma_p^a - \frac{N_2(z)}{N} \sigma_p^{ae} \right] \quad (\text{D.7})$$

$$\phi_2 = \left(\frac{\tau_2 \Gamma_s}{h\nu_s A} P_s(z)\right) \left[\frac{N_2(z)}{N} \sigma_s^{ae} - \sigma_s^a \right] \quad (\text{D.8})$$

Portanto, a equação (D.6) pode ser escrita como:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{N_2(z)}{N} \quad (\text{D.9})$$

Como mostrado nas Figs. 64 e 65 do Capítulo 6, enquanto ϕ_1 e ϕ_2 variam consideravelmente ao longo da direção axial z do oscilador laser, a variação de $\frac{N_2(z)}{N}$ ao longo do comprimento do oscilador é muito pequena. Portanto, é razoável usar, em vez de $\frac{N_2(z)}{N}$, $\frac{\bar{N}_2(z)}{N}$ que é o seu valor médio ao longo do comprimento do oscilador. Deve-se notar que esta substituição é aplicada apenas ao primeiro termo do lado esquerdo da equação (D.6) e não ao termo $\frac{N_2(z)}{N}$ presente nas funções auxiliares ϕ_1 e ϕ_2 . Portanto,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\bar{N}_2(z)}{N} \quad (\text{D.10})$$

Onde $\sigma_p = \sigma_p^a + \sigma_p^e$ é a seção de choque do sinal de bombeamento e $\sigma_s = \sigma_s^a + \sigma_s^e$ é a seção de choque do sinal laser.

$$N_2 = \left[\frac{R_{12} + W_{12}}{R_{12} + R_{21} + W_{12} + W_{21} + A_{21}} \right] \quad (\text{D.11})$$

$$R_{12} = \sigma_p^a I_p / h\nu_p \quad (\text{D.12})$$

$$R_{21} = \sigma_p^e I_p / h\nu_p \quad (\text{D.13})$$

$$W_{12} = \sigma_s^a I_s / h\nu_s \quad (\text{D.14})$$

$$W_{21} = \sigma_s^e I_s / h\nu_s \quad (\text{D.15})$$

$$A_{21} = 1/\tau_2 \quad (\text{D.16})$$

$$N_2 = \left[\frac{\sigma_p^a I_p / h\nu_p + \sigma_s^a I_s / h\nu_s}{\sigma_p^a I_p / h\nu_p + \sigma_p^e I_p / h\nu_p + \sigma_s^a I_s / h\nu_s + \sigma_s^e I_s / h\nu_s + 1/\tau_2} \right] \quad (\text{D.17})$$

$$I_p = \frac{P_p}{A} \quad (\text{D.18})$$

$$I_s = \frac{P_s}{A} \quad (\text{D.19})$$

$$N_2 = \left[\frac{\sigma_p^a \frac{P_p}{A} / h\nu_p + \sigma_s^a \frac{P_s}{A} / h\nu_s}{\sigma_p^a \frac{P_p}{A} / h\nu_p + \sigma_p^e \frac{P_p}{A} / h\nu_p + \sigma_s^a \frac{P_s}{A} / h\nu_s + \sigma_s^e \frac{P_s}{A} / h\nu_s + 1/\tau_2} \right] \quad (\text{D.20})$$

$$N_2 = \left[\frac{(\sigma_p^a / Ah\nu_p) P_p + (\sigma_s^a / Ah\nu_s) P_s}{(\sigma_p / Ah\nu_p) P_p + (\sigma_s / Ah\nu_s) P_s + 1/\tau_{21}} \right] \quad (\text{D.21})$$

$$N_2(z) = \left[\frac{(\sigma_p^a / Ah\nu_p) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + (\sigma_s^a / Ah\nu_s) [P_s^+(z) + P_s^-(z)]}{(\sigma_p / Ah\nu_p) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + (\sigma_s / Ah\nu_s) [P_s^+(z) + P_s^-(z)]_s + 1/\tau_{21}} \right] \quad (\text{D.22})$$

Inserindo os fatores de preenchimento do bombeamento (Γ_p) e do sinal laser (Γ_s) na equação (D.22), resultará em:

$$N_2(z) = \left[\frac{(\sigma_p^a \Gamma_p / Ah\nu_p) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + (\sigma_s^a \Gamma_s / Ah\nu_s) [P_s^+(z) + P_s^-(z)]}{(\sigma_p \Gamma_p / Ah\nu_p) [P_p^+(z) + P_p^-(z)] + (\sigma_s \Gamma_s / Ah\nu_s) [P_s^+(z) + P_s^-(z)]_s + 1/\tau_{21}} \right] \quad (\text{D.23})$$

APÊNDICE E – CONDIÇÕES DE CONTORNO NA REDE DE BRAGG

A equação diferencial que descreve a propagação direta do sinal laser é dada por:

$$\frac{dP_s^+(z)}{dz} = \Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] P_s^+(z) - \alpha_s P_s^+(z). \quad (\text{E.1})$$

Da equação (E.1) é possível encontrar uma equação diferencial da forma $\frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)}$, tal que:

$$\frac{dP_s^+(z)}{dz} = \{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} P_s^+(z). \quad (\text{E.2})$$

Consequentemente,

$$\frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} = \{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} dz. \quad (\text{E.3})$$

A equação diferencial que descreve a propagação reversa do sinal laser é dada por:

$$\frac{dP_s^-(z)}{dz} = -\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] P_s^-(z) + \alpha_s P_s^-(z). \quad (\text{E.4})$$

De forma análoga ao procedimento anterior, é possível encontrar que a equação diferencial da forma $\frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)}$. Da equação (E.4) temos que:

$$\frac{dP_s^-(z)}{dz} = -\{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} P_s^-(z). \quad (\text{E.5})$$

Consequentemente,

$$\frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} = -\{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} dz \quad (\text{E.6})$$

Somando as equações (E.3) e (E.6), resultará em:

$$\frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} + \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} = \{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} dz - \{\Gamma_s[\sigma_s^{ae} N_2(z) - \sigma_s^a N] - \alpha_s\} dz \quad (\text{E.7})$$

As parcelas do lado direito da equação (E.7) são iguais, logo:

$$\frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} + \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} = 0 \quad (\text{E.8})$$

Integrando ambos os termos da equação (E.7), com z variando de 0 a $L = L_{Opt}$, obtém-se os seguintes resultados:

$$\int_0^L \frac{dP_s^+(z)}{P_s^+(z)} = - \int_0^L \frac{dP_s^-(z)}{P_s^-(z)} \quad (\text{E.9})$$

$$\ln [P_s^+(z)]_0^L = - \ln [P_s^-(z)]_0^L \quad (\text{E.10})$$

$$\ln [P_s^+(L)] - \ln [P_s^+(0)] = - \{ \ln [P_s^-(L)] - \ln [P_s^-(0)] \} \quad (\text{E.11})$$

$$\ln \left[\frac{P_s^+(L)}{P_s^+(0)} \right] = - \ln \left[\frac{P_s^-(L)}{P_s^-(0)} \right] \quad (\text{E.12})$$

$$\ln \left[\frac{P_s^+(L)}{P_s^+(0)} \right] = \ln \left[\frac{P_s^-(0)}{P_s^-(L)} \right] \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{P_s^+(L)}{P_s^+(0)} = \frac{P_s^-(0)}{P_s^-(L)} \quad (\text{E.14})$$

$$P_s^+(L)P_s^-(L) = P_s^+(0)P_s^-(0) \quad (\text{E.15})$$

substituindo $P_s^+(0) = R_1 P_s^-(0)$, equação (4.70), em (E.15), resultará nas seguintes condições de contorno na região das FBG:

$$P_s^+(L)P_s^-(L) = P_s^+(0)P_s^-(0) = R_1 [P_s^-(0)]^2 \quad (\text{E.16})$$

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Diretoria de Pesquisa, Desenvolvimento e Ensino
Av. Prof. Lineu Prestes, 2242 – Cidade Universitária CEP: 05508-000
Fone/Fax(0XX11) 3133-8908
SÃO PAULO – São Paulo – Brasil
<http://www.ipen.br>

O IPEN é uma Autarquia vinculada à Secretaria de Desenvolvimento, associada à Universidade de São Paulo e gerida técnica e administrativamente pela Comissão Nacional de Energia Nuclear, órgão do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações.
