



AUTARQUIA ASSOCIADA A UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Investigação teórica dos fenômenos da propagação atmosférica de feixes de laser de alta potência**

**PAULO JORGE DUDA DE MORAIS**

**Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear - Materiais**

**Orientador:  
Prof. Dr. Wagner de Rossi**

**São Paulo  
2023**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Autarquia Associada à Universidade de São Paulo**

**Investigação teórica dos fenômenos da propagação atmosférica de feixes  
lasers de alta potência**

**Versão Corrigida**

**Versão Original disponível no IPEN**

**PAULO JORGE DUDA DE MORAIS**

**Dissertação apresentada como parte  
dos requisitos para obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Materiais**

**Orientador:  
Prof. Dr. Wagner de Rossi**

**São Paulo  
2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Como citar:

DUDA DE MORAIS, P. J. ***Investigação teórica dos fenômenos da propagação atmosférica de feixes lasers de alta potência***. 2023. 115 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear), Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN-CNEN, São Paulo. Disponível em: <<http://repositorio.ipen.br/>> (data de consulta no formato: dd/mm/aaaa)

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de geração automática da Biblioteca IPEN, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Duda de Moraes, Paulo Jorge  
Investigação teórica dos fenômenos da propagação  
atmosférica de feixes lasers de alta potência / Paulo Jorge  
Duda de Moraes; orientador Wagner de Rossi. -- São Paulo,  
2023.  
115 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
Tecnologia Nuclear (Materiais) -- Instituto de Pesquisas  
Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2023.

1. Lasers de alta potência. 2. Thermal blooming. 3.  
Turbulência óptica. 4. Equações de Navier-Stokes. 5. Equação  
Paraxial. I. de Rossi, Wagner, orient. II. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Autor: Paulo Jorge Duda de Moraes

Título: Investigação teórica dos fenômenos da propagação atmosférica de feixes lasers de alta potência

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear - Materiais

Trabalho aprovado.

São Paulo, 23 de agosto de 2023:

### **Banca Examinadora**

Prof. Dr. Wagner de Rossi

Instituição: IPEN/USP

Prof. Dr. Gregori de Arruda Moreira

Instituição: IFSP

Prof. Dr. Fábio Juliano da Silva Lopes

Instituição: UNIFESP

*Dedico este trabalho às minhas filhas Beatriz e Gabriela,  
e à minha esposa Isabel.*

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que com Sua onisciência me proporcionou as capacidades necessárias para concluir este trabalho.

Agradeço à Isabel, minha esposa, que embarcou em mais esta jornada com dedicação de tempo, paciência e apoio para superar este desafio.

Ao professor Doutor Claudio Costa Motta, pela propositura do tema, dispêndio de tempo para apresentar seus ensinamentos indispensáveis para execução deste trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Wagner de Rossi, pelo apoio a todas as propostas apresentadas e disponibilidade em ajudar na execução do projeto.

Agradeço ao meu amigo Rubens pela disponibilidade em retirar as dúvidas para modelagem do problema. Bem como, camaradagem nestes dois anos de convívio ininterrupto.

Aos meus demais colegas, Nacaratti, André, Bernardo, Elbis e Salustiano por tornar o ambiente de pesquisa mais agradável, pelo bom convívio e ajuda nos mais diversos assuntos cotidianos ao longo destes dois anos.

*"Success consists of going from failure to failure  
without loss of enthusiasm."  
Winston Churchill*

## RESUMO

MORAIS, Paulo J. D. ***Investigação teórica dos fenômenos da propagação atmosférica de feixes lasers de alta potência.*** 2023. 115 p. Dissertação em Tecnologia Nuclear - Materiais - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares- IPEN-CNEN/SP, São Paulo.

Este trabalho visa o desenvolvimento de uma formulação analítica e modelagem computacional da propagação de feixe de lasers contínuos de alta potência (HEL) através da atmosfera. São estudados os principais fenômenos que degradam a propagação, *thermal blooming* e cintilação. Para tanto, uma solução numérica acoplada foi feita usando as equações de Navier-Stokes de conservação de massa, momento e energia, a equação paraxial e um modelo de tela de fase para representar a turbulência óptica. O efeito *thermal blooming* é modelado através do acoplamento entre o sistema de equações de Navier-Stokes e a equação paraxial. Já a turbulência óptica é realizada através de um esquema de tela de fase que engloba alterações das flutuações de temperatura de forma estocástica, respeitando uma distribuição espectral baseada na teoria de Kolmogorov, para a faixa de turbulência isotrópica. Os resultados numéricos são apresentados variando parâmetros tais como: potência do laser, nível de turbulência e diâmetro do laser. Estas variações são realizadas alterando-se os números adimensionais que constituem as equações da fluidodinâmica.

**Palavras-chaves:** lasers de alta potência (HEL), *thermal blooming*, turbulência óptica, equações de Navier-Stokes, equação paraxial.



## ABSTRACT

MORAIS, Paulo J. D. *Theoretical investigation of the propagation phenomena of high power laser beams*. 2023. 115 p. Dissertação em Tecnologia Nuclear - Materiais - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares- IPEN-CNEN/SP, São Paulo.

This work aims at the development of an analytical formulation and computational modeling of the beam propagation of continuous high-energy lasers (HEL) through the atmosphere. The main phenomena that degrade propagation, thermal blooming and scintillation are studied. For this purpose, a coupled numerical solution was implemented using the Navier-Stokes equations for mass, momentum and energy conservation, the paraxial equation and a phase screen model to represent the optical turbulence. The thermal blooming effect is modeled through the coupling between the Navier-Stokes system of equations and the paraxial equation. Optical turbulence is simulated using a phase screen scheme that incorporates stochastic temperature fluctuation changes, following a spectral distribution based on Kolmogorov's theory for the range of isotropic turbulence. Numerical results are presented varying parameters such as: laser power, turbulence level and laser diameter. These variations are performed by altering the dimensionless numbers that constitute the fluid dynamics equations.

**Key words:** high energy lasers, thermal blooming, optical turbulence, Navier-Stokes equations, paraxial equation.

## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera. <math>L</math> é a distância entre o emissor e detector e <math>d</math> é a distância entre o ponto de maior intensidade do laser e o eixo axial. a) Sem interação do feixe de laser com o meio de propagação. b) Com interação do feixe de laser com o meio de propagação. c) Com a interação do feixe de laser com o meio de propagação e considerando os fenômenos estocásticos. . . .</p>	22
<p>Figura 2 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera com interação com o meio de propagação, incluído o efeito <i>thermal blooming</i> . . . . .</p>	23
<p>Figura 3 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera com interação com o meio de propagação, incluído os efeitos do <i>thermal blooming</i> e da cintilação. . . . .</p>	24
<p>Figura 4 – Análise de estabilidade da solução da equação (3.336) em função do número de Courant, <math>\mu_c</math>, e do número de Neumann, <math>\nu_n</math>. . . . .</p>	86
<p>Figura 5 – Esquema do feixe de laser ao longo do eixo <math>z</math>, baseado nas eq. (3.299) a (3.302) e eq.(3.55). . . . .</p>	87
<p>Figura 6 – Grade escalonada. Onde os componentes da malha: setas azuis - velocidade <math>u</math>, setas vermelhas - velocidade <math>v</math>, pontos pretos - pressão escalar <math>P</math> e quadrados amarelos - temperatura <math>T</math>. . . . .</p>	88
<p>Figura 7 – Fluxograma do modelo teórico-numérico apresentado para solução da propagação de um HEL na atmosfera incluindo os efeitos <i>thermal blooming</i> e cintilação. . . . .</p>	90
<p>Figura 8 – (a) Campo de temperatura <math>T(x, y, z = 150, t = 0, 12)</math>. (b) Intensidade do feixe de laser <math> V ^2(x, y, z = 150, t = 0, 12)</math>. Para estas simulações <math>Re = 1000</math>, <math>Pr = 1</math>, <math>Ri = 1.e4</math> e <math>St = \frac{1}{30}</math>, o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i>, <math>\eta_0 = 1,0003</math>, <math>T_0 = 300 K</math>. . . . .</p>	93
<p>Figura 9 – (a) Campo de temperatura <math>T(x, y, z = 300, t = 0, 24)</math>. (b) Intensidade do feixe de laser <math> V ^2(x, y, z = 300, t = 0, 24)</math>. Para estas simulações <math>Re = 1000</math>, <math>Pr = 1</math>, <math>Ri = 1.e4</math> e <math>St = \frac{1}{30}</math>, o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i>, <math>\eta_0 = 1,0003</math>, <math>T_0 = 300 K</math>. . . . .</p>	94
<p>Figura 10 – (a) Campo de temperatura <math>T(x, y, z = 497, t = 0, 40)</math>. (b) Intensidade do feixe de laser <math> V ^2(x, y, z = 497, t = 0, 40)</math>. Para estas simulações <math>Re = 1000</math>, <math>Pr = 1</math>, <math>Ri = 1.e4</math> e <math>St = \frac{1}{30}</math>, o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i>, <math>\eta_0 = 1,0003</math>, <math>T_0 = 300 K</math>. . . . .</p>	94

Figura 11 – (a) Campo de temperatura $T(x, y, z = 1, t = 0,002)$ . (b) Intensidade do feixe de laser $ V ^2(x, y, z = 1, t = 0,002)$ . Para estas simulações $Re = 1000$ , $Pr = 1$ , $Ri = 6.e5$ e $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i> , $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio $\eta_0 = 1,0003$ e coeficiente de intensificação da cintilação, $\delta = 0,01$ . . . . .	100
Figura 12 – (a) Campo de temperatura $T(x, y, z = 800, t = 0,016)$ . (b) Intensidade do feixe de laser $ V ^2(x, y, z = 800, t = 0,016)$ . Para estas simulações $Re = 1000$ , $Pr = 1$ , $Ri = 6.e5$ e $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i> , $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio $\eta_0 = 1,0003$ e coeficiente de intensificação da cintilação, $\delta = 0,01$ . . . . .	101
Figura 13 – (a) Campo de temperatura $T(x, y, z = 1600, t = 0,032)$ . (b) Intensidade do feixe de laser $ V ^2(x, y, z = 1600, t = 0,032)$ . Para estas simulações $Re = 1000$ , $Pr = 1$ , $Ri = 6.e5$ e $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, <i>Kelvin</i> , $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio $\eta_0 = 1,0003$ e coeficiente de intensificação da cintilação, $\delta = 0,01$ . . . . .	102
Figura 14 – Flutuações de temperatura $T_1(z = 0, t = 0)$ com $Re = 1000$ , $Pr = 1$ , $6 \times 10^5$ com $St = \frac{1}{3}$ , $L_0 = 1 [m]$ e $l_0 = 1 [cm]$ (a) $T_1(k_x, k_y)$ conforme (3.295) (b) $T_1(x, y)$ condição inicial das flutuações de temperatura no plano transversal. . . . .	103
Figura 15 – Intensidade do feixe de laser $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$ utiliza-se para tal a eq. (3.77), equação paraxial, as eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), modelo tela de fase de turbulência e altera-se $\delta$ conforme: (a) $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$ para $\delta = 0, 1$ . (b) $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$ para $\delta = 0, 5$ . (c) $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$ para $\delta = 0, 7$ . (d) $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$ para $\delta = 1$ . . . . .	104
Figura 16 – Evolução no tempo do campo elétrico $V(x, y)$ dado pela solução das eq. (3.77), equação paraxial, eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), cintilação, com um fator de cintilação $\delta = 0, 1$ . a) $V(x, y, z = 1, t = 5.e-5)$ , b) $V(x, y, z = 20, t = 1.e-3)$ , c) $V(x, y, z = 60, t = 3.e-3)$ , d) $V(x, y, z = 80, t = 4.e-3)$ . . . . .	105
Figura 17 – Evolução de um feixe de laser de $2,5 [kW]$ propagado pela fumaça da queima de óleo e borracha (MORRILL, 2018). Da esquerda para direita um <i>frame</i> do laser em $t = 0$ e $t = 6 [s]$ . . . . .	107

Figura 18 – Evolução no tempo do campo elétrico  $V(x, y)$  dado pela solução das eq. (3.77), equação paraxial, eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), cintilação, com um fator de cintilação  $\delta = 0, 1$ . a)  $V(x, y, z = 1, t = 5.e - 5)$ , b)  $V(x, y, z = 60, t = 3.e - 3)$ . . . . . 107

## LISTA DE ABREVIATURAS

- EDO Equação diferencial ordinária
- EPD Equação diferencial parcial
- FDM Método de diferenças finitas (acrônimo de sua designação em inglês: "*Finite Difference Method*")
- FFT Transformada rápida de Fourier (acrônimo de sua designação em inglês: "*Fast Fourier Transform*")
- HEL Laser de Alta Energia (acrônimo de sua designação em inglês: "*High Energy Laser*")
- LaMP Laboratório de Micro-ondas de Potência e Fotônica
- N-S Equações de Navier-Stokes
- PSD Densidade Espectral de Potência (acrônimo de sua designação em inglês: "*Power Spectral Density*")
- USP Universidade de São Paulo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_f$	Correção do índice de refração médio
$\eta_s$	Índice de refração médio
$\mathbf{f}$	Vetor forças de campo por unidade de massa
$\mathcal{F}_x$	Forças viscosas na direção $\vec{e}_1$
$\mathcal{F}_y$	Forças viscosas na direção $\vec{e}_2$
$\tau_{ii}$	Tensões normais
$\tau_{ij}$	Tensões de cisalhamento
$\vec{E}$	Vetor campo elétrico
$F_v$	Vetor forças viscosas
$F_x$	Tensões viscosas na direção $\vec{e}_1$
$F_y$	Tensões viscosas na direção $\vec{e}_2$
$T_f$	Correção da temperatura
$T_s$	Temperatura média
$\alpha$	Coefficiente de expansão do fluido
$\beta$	Absorvidade
$\delta e$	Variação de energia
$\delta q$	Variação de calor
$\Delta t$	Espaçamento da malha temporal
$\delta w$	Variação de trabalho
$\Delta x$	Espaçamento da malha horizontal
$\Delta y$	Espaçamento da malha vertical
$\delta$	Coefficiente de intensificação da cintilação
$\dot{Q}$	Variação de calor devido às forças viscosas
$\dot{q}$	Variação de calor por unidade de massa

$\dot{Q}'$	Variação de calor por unidade de volume
$\dot{W}'$	Variação de trabalho das forças viscosas por unidade de volume
$\eta$	Índice de refração
$\frac{v^2}{2}$	Energia cinética por unidade de massa
$\gamma$	Compressibilidade
$\hat{\cdot}$	Transformada de Fourier da variável
$\kappa$	Condutividade térmica
$\lambda$	Coefficiente de viscosidade <i>bulk</i>
<b>T</b>	Tensor normal
<b>V</b>	Vetor velocidade
$\mathcal{V}$	Volume de controle
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_0$	Constante de permeabilidade magnética do vácuo
$\mu_c$	Número de Courant
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_n$	Número de Neumann
$\phi$	Distribuição espectral de temperatura
$\rho$	Densidade volumétrica de carga
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Desvio Padrão
$\tau$	Escala de pseudo-tempo
$\tau'$	Compressibilidade
$\theta_x$	Alteração de fase na direção $\vec{e}_1$
$\theta_y$	Alteração de fase na direção $\vec{e}_2$
$\varepsilon$	Taxa de deformação

$\vec{\psi}$	Função de onda
$\vec{B}$	Campo de indução magnética
$\vec{D}$	Campo de deslocamento elétrico
$\vec{E}$	Campo elétrico
$\vec{H}$	Campo densidade de corrente
$\vec{H}$	Campo magnético
$a$	Velocidade local do som
$c$	Velocidade da luz no vácuo
$c_p$	Calor específico de um gás ideal a pressão constante
$c_v$	Calor específico de um gás ideal a volume constante
$e$	Energia interna por unidade de massa
$f_m$	Maior frequência do sinal
$f_s$	Frequência de amostragem
$f_x$	Forças de campo por unidade de massa na direção $\vec{e}_1$
$f_y$	Forças de campo por unidade de massa na direção $\vec{e}_2$
$f_{m_{max}}$	Máxima frequência do sinal representado
$g$	Gravidade
$h$	Espaçamento da malha espacial
$k$	Número de onda na direção axial
$k_x$	Número de onda na direção $\vec{e}_1$
$k_y$	Número de onda na direção $\vec{e}_2$
$L$	Comprimento característico
$L_0$	Escala externa de turbulência
$l_0$	Escala interna de turbulência
$M$	Número de Mach



$N_x$	Quantidade de pontos na direção horizontal
$N_y$	Quantidade de pontos na direção vertical
$P$	Campo de pressão
$P_c$	Pressão característica
$R$	Constante universal do gases
$S$	Superfície que envolve o volume de controle
$T$	Campo de temperatura
$t$	Tempo característico
$T_c$	Temperatura característica
$U$	Velocidade característica
$u$	Campo de velocidades na direção $\vec{e}_1$
$V$	Amplitude do laser
$v$	Campo de velocidades na direção $\vec{e}_2$
$V_c$	Amplitude do feixe de laser
$Yb$	Itérbio (elemento químico)
$Pr$	Número de Prandtl
$Re$	Número de Reynolds
$Ri$	Número de Richardson
$St$	Número de Stanton

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	20
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	24
1.1.1	Objetivo geral	24
1.1.2	Objetivos específicos	24
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	25
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	28
<b>3.1</b>	<b>Introdução ao capítulo</b>	28
<b>3.2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	28
3.2.1	Hipóteses assumidas	28
3.2.2	Equação paraxial	29
3.2.3	Equações de Navier-Stokes	42
3.2.3.1	Equação da continuidade	42
3.2.3.2	Equação da conservação do momento	46
3.2.3.3	Equação da Conservação da Energia	54
3.2.4	Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes	62
3.2.4.1	Adimensionalização da equação da continuidade	64
3.2.4.2	Adimensionalização das equações de conservação do momento	64
3.2.4.3	Adimensionalização da equação da energia	66
3.2.5	Equações de Navier-Stokes 2D com aproximação de Boussinesq, adimensionais, não estacionárias e incompressíveis com inclusão dos efeitos da cintilação. . .	67
3.2.6	Turbulência óptica	73
<b>3.3</b>	<b>Métodos numéricos de simulação</b>	80
3.3.1	Desenvolvimento do software, dificuldades técnicas apresentadas e superadas	88
<b>3.4</b>	<b>Conclusão do capítulo</b>	89
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	91
<b>4.1</b>	<b>Introdução ao capítulo</b>	91
<b>4.2</b>	<b>Acoplamento do efeito <i>thermal blooming</i> com a convecção induzida</b>	91
<b>4.3</b>	<b>Análise das alterações dos números adimensionais</b>	95

<b>4.4</b>	<b>Acoplamento do efeito <i>thermal blooming</i>, cintilação e convecção</b> ...	98
4.4.1	Análise dos resultados da simulação .....	99
<b>4.5</b>	<b>Análise Fator de Cintilação <math>\delta</math></b> .....	102
<b>4.6</b>	<b>Conclusão do capítulo</b> .....	108
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	109
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	110

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os lasers de alta energia (HEL) têm diversas aplicações, como os lasers de fibra óptica de sílica, dopados com íons de terras raras, em particular o laser de fibra de itérbio ( $Yb^{3+}$ ), (PERRY et al., 1999; CARROLL, 2011; SENTOKU et al., 2000). Por exemplo: sensoriamento remoto de nuvens (LIOU et al., 2006), radioastronomia, radiocomunicação no espaço, comunicação via satélite (ANDREWS; PHILLIPS, 2005), transmissão de energia sem fio (HE et al., 2023), comunicações remotas a laser (SAWA, 2023) e recarga remota de baterias (OJHA et al., 2023). A interação entre o meio de propagação e o laser para esses usos, decorrente principalmente do aumento de potência, são essenciais para predizer a qualidade do feixe laser e a potência no receptor.

Dentre as aplicações do HEL uma das quais a necessidade do aumento de potência é essencial para sua aplicabilidade e o aumento da demanda é exponencial, trata-se da recarga de baterias remotamente. Os estudos voltados para recarga de baterias para utilização de drones por período indefinido é crescente conforme pode ser observado em Choi et al. (2016), Jaafar e Yanikomeroğlu (2021). Para a aplicabilidade desta tecnologia é essencial o aumento da potência e da distância entre a fonte e o receptor. Com isso, o estudo dos fenômenos da interação fluido-laser são essenciais para esta tecnologia se tornar viável.

Assim, para aprimorar e prever resultados para algumas dessas aplicações é necessária uma investigação de fenômenos relacionados à propagação atmosférica do feixe de laser (ANDREWS; PHILLIPS, 2005; RAIBLE et al., 2011; WANG et al., 2012; XIE et al., 2013). Algumas pesquisas recentes passaram a modelar soluções numéricas em que o campo de velocidade e as flutuações de temperatura são variáveis dinâmicas (LANE, 2021; MORAIS et al., 2022; MORRILL, 2018), em contraste com estudos prévios em que essas variáveis foram prescritas (SMITH, 1977; GUSTAFSSON et al., 2019).

Um dos efeitos atmosféricos na propagação do HEL através da atmosfera é oriundo da interação entre o calor gerado pelo feixe de laser e a consequente mudança no índice de refração no meio de propagação. O efeito conhecido como *thermal blooming*, para o qual já foi desenvolvida uma simulação em Morais et al. (2022), ocorre quando um feixe de laser se propaga através de um meio absorvente, de modo que ocorrem mudanças nos campos de temperatura e densidade do ar nas proximidades do feixe do HEL, (MORAIS et al., 2022). Essa mudança de temperatura induz uma variação no índice de refração e, com isso, há uma perda de foco do feixe de laser (SMITH, 1977; SHELDON et al., 1982).

A importância de entender esse efeito aumentou desde que a potência dos lasers se tornou alta o suficiente para aquecer o meio. Como consequência, as pesquisas sobre esse fenômeno crescem linearmente (CARROLL, 2011; PERRY et al., 1999; SENTOKU et al., 2000).

O efeito conhecido como *thermal blooming* ocorre quando um feixe de laser se propaga através de um meio absorvente. O efeito de absorção do meio é muito pequeno, quando o fluido é o ar, no entanto é promovida uma alteração nos campos de temperatura e densidade na vizinhança deste feixe de laser. Esta alteração de temperatura promove uma alteração no índice de refração e, com isso, acontece o espalhamento e o desfocamento do feixe de laser. O efeito do “thermal blooming” vem sendo discutido desde que os lasers se tornaram poderosos o suficiente para aquecer visivelmente um meio e tem sido bem documentado desde a sua primeira observação.

Em todas as aplicações, a qualidade do feixe é uma preocupação crescente. O efeito *thermal blooming* é um efeito negativo na qualidade do feixe e na quantidade de energia fornecida à sua fonte final (SU et al., 2023). Portanto, a compreensão da propagação do feixe de laser através do meio é imprescindível para um aumento de eficiência na propagação de feixes de HEL.

Um outro fenômeno também inerente à propagação do feixe de laser na atmosfera é o da cintilação. Este fenômeno é devido, de uma forma simplificada, às flutuações da temperatura do meio de propagação. Tal fenômeno também tem caráter deletério, no entanto existem técnicas para correção do mesmo através da utilização de espelhos deformáveis, células de Bragg, entre outras (PEARSON; HANSEN, 1977; HARDY, 1978; ROGGEMANN; LEE, 1998).

Este trabalho propõe uma solução numérica para um HEL que incorpora as interações dos efeitos aerodinâmicos e do eletromagnetismo, com a utilização do *software* Matlab 2022b. Este *solver*, após validado, pode ser usado como uma referência ampla para simulações de propagação lasers de alta potência.

O *solver* desenvolvido é um conjunto de equações N-S e paraxial, conforme Sprangle et al. (2006), Penano et al. (2015), acopladas a uma distribuição de flutuações de temperatura, conforme Strasburg e Harper (2004), Harding et al. (1999), Smith (1977), Sriram e Kearney (2007), Beghi et al. (2008a), decomposta em uma base ponderada no domínio espectral, baseada na teoria de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1991). A propagação do feixe de laser na direção axial será descrita usando o *split step fourier method* (FLECK et al., 1977; ARSENOVIĆ et al., 2019), utiliza-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) (FRIGO; JOHNSON, 1998). O modelo deste trabalho é baseado na suposição de que o raio laser é a única fonte de energia no ambiente, sendo grande o

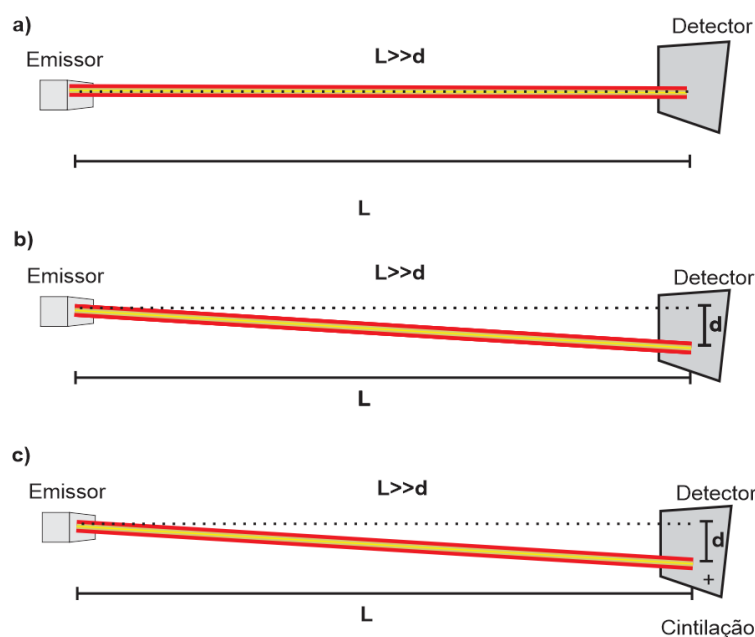
suficiente para desprezar qualquer outra interferência. No entanto, esta potência não tem a capacidade de alterar as propriedades do meio em nível molecular.

Para exemplificação de como será apresentado neste trabalho a evolução da solução é apresentado a figura 1. O modelo esquemático apresenta os efeitos esperados com o aumento da robustez do modelo. A figura 1a apresenta a evolução do laser no espaço sem interação com a atmosfera. Espera-se que o comportamento da propagação de um perfil gaussiano para este caso é que o pico de intensidade seja mais achatado e a função gaussiana se alargue. No entanto, a energia se conserva radialmente. Portanto, se for realizado a integração transversal do feixe de laser radialmente o resultado será o mesmo, ao longo do eixo axial. Ou seja, há redução da densidade de energia do laser ao se propagar.

Em seguida será inserido a interação da atmosfera apenas contemplando o efeito *thermal blooming*. Espera-se obter uma deflexão do feixe de laser, representada na figura 1b, pela distância  $d$ .

Por último, será inserido o fenômeno da cintilação através da metodologia de tela de fase neste modelo, apresentado na fig. 1c. Espera-se com a inclusão deste efeito que ocorra na solução um fenômeno de borramento do feixe de laser e surgimento de alterações de intensidade aleatórias na cáustica do feixe.

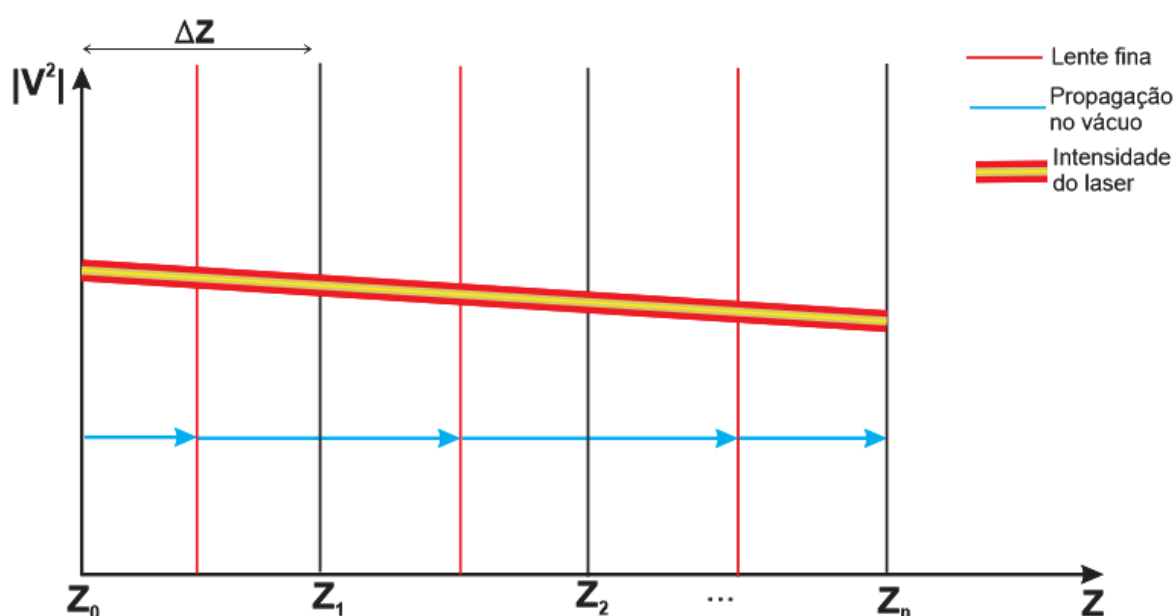
Figura 1 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera.  $L$  é a distância entre o emissor e detector e  $d$  é a distância entre o ponto de maior intensidade do laser e o eixo axial. a) Sem interação do feixe de laser com o meio de propagação. b) Com interação do feixe de laser com o meio de propagação. c) Com a interação do feixe de laser com o meio de propagação e considerando os fenômenos estocásticos.



Fonte: Autor da dissertação.

A figura 2 apresenta o modelo esquemático de como será implementada a solução do feixe de laser com a inclusão do efeito *thermal blooming*. A evolução do feixe de laser irá ser através de steps de  $\Delta z$  ao longo do eixo axial. As setas azuis são a evolução no vácuo do feixe de laser, ou seja, como se não houvesse interação com o meio de propagação. Já para inclusão do efeito de interação com o meio, serão incluídas lentes muito finas as quais irão representar a alteração do índice de refração do feixe de laser para cada discretização de  $\Delta z$ .

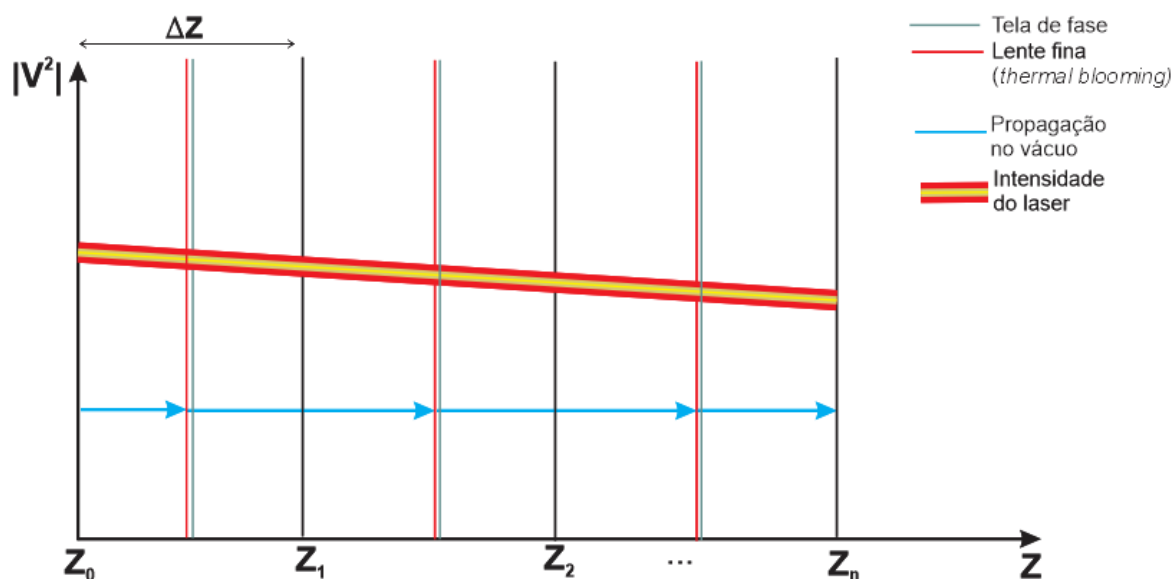
Figura 2 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera com interação com o meio de propagação, incluído o efeito *thermal blooming*



Fonte: Autor da dissertação.

Por fim, para inclusão do efeito da cintilação a figura 3 apresenta um modelo esquemático de como se dará esta solução. A evolução do feixe de laser se dá em termos de metodologia da mesma forma que ocorre com o efeito *thermal blooming*. No entanto, o que irá ocorrer é a inclusão de mais uma lente fina no operador de alteração do índice de refração. Esta lente é obtida pela metodologia de tela de fase e irá representar as flutuações do índice de refração ao longo de cada  $\Delta Z$ .

Figura 3 – Modelo esquemático para propagação de um feixe de laser na atmosfera com interação com o meio de propagação, incluído os efeitos do *thermal blooming* e da cintilação.



Fonte: Autor da dissertação.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é estabelecer um modelo matemático com solução numérica via método de diferenças finitas (FDM) que visa representar a propagação de um feixe de laser na atmosfera, acoplando os efeitos: da dinâmica dos fluidos, do *thermal blooming* e da cintilação, os quais alteram o índice de refração do meio.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Desenvolver modelo teórico representativo de um HEL na atmosfera;
- Implementar numericamente por FDM do efeito *thermal blooming* de um HEL se propagando na atmosfera, através do *software* Matlab; e
- Implementar por FDM a modelagem do acoplamento do efeito *thermal blooming* com a cintilação de um HEL se propagando na atmosfera, através do *software* Matlab.



## 2 REVISÃO DA LITERATURA

O efeito conhecido como *thermal blooming* vastamente estudado e modelado teve os primeiros estudos publicados entre 1964 e 1965 (GORDON et al., 1964; GORDON et al., 1965). Este efeito, o qual trata-se de um fenômeno auto-induzido, é originado do aquecimento do meio absorvente devido à propagação do laser. Portanto, independente do tipo de laser ou do seu comprimento de onda, este efeito estará presente na propagação do mesmo. Com isso, diversos trabalhos foram publicados no decorrer destes anos visando descrever este fenômeno. (HOGGE, 1974; SMITH, 1977; GEBHARDT, 1990; BRADLEY; HERRMANN, 1974; ZHONG et al., 2023)

Na década de 1970 iniciaram-se as primeiras tentativas de desenvolver modelos com o objetivo de descrever o efeito *thermal blooming* na propagação de feixes de HEL ao longo da atmosfera. Neste período iniciaram-se as modelagens visando o entendimento deste efeito e o acoplamento deste com demais fenômenos lineares e não lineares tais como: zonas de estagnação, rajadas de vento, mistura de camadas, resfriamento do ar, entre outros.

No decorrer da década de 1980, com a redução do comprimento de onda dos lasers saindo da faixa do infravermelho (1960's) e tendendo para a faixa do ultravioleta (1980's) (GEBHARDT, 1990), promoveu-se uma redução dos comprimentos de onda e houve um potencial aumento da densidade de energia transportada pelos lasers. Com isso, outros efeitos tornaram-se mais relevantes e seu acoplamento com o *thermal blooming* mostrou-se evidente. As altas frequências dos lasers acarretam no aumento da instabilidade do meio promovendo o fenômeno de turbulência do fluido, a qual induz a turbulência óptica acoplada ao *thermal blooming*. Logo, os modelos numérico teóricos desenvolvidos anteriormente já não mais descreviam a propagação do laser. A partir deste ponto tornou-se necessário produzir modelos que levavam em consideração as alterações de fase do campo eletromagnético, com o objetivo de descrever os fenômenos de cintilação (GEBHARDT, 1990).

Com o desenvolvimento e progresso exponencial na última década que tiveram os lasers de fibra, liderados pelo laser de fibra dopada com Yb (CARROLL, 2011; DIVLIANSKY, 2020), o qual possui uma emissão bem definida em uma faixa de 976 nm a 1150 nm (DIVLIANSKY, 2020) o desenvolvimento de modelos numérico-computacionais que visam simular esta propagação tornaram-se relevantes. Dado este crescimento de transporte de energia substancial é possível constatar a necessidade de continuar o aprimoramento destes modelos visando o entendimento dos fenômenos que irão vir com o

aumento de potência e aumento de densidade de transporte de energia que esta tecnologia acarreta.

Para tanto é necessário ter um entendimento de como ocorrem os fenômenos que regem a dinâmica dos fluidos para se obter um entendimento do acoplamento do fenômeno não-linear, *thermal blooming*, com o fenômeno não-linear e estocástico, turbulência óptica. O trabalho desenvolvido pelo russo Kolmogorov sobre a turbulência estabeleceu uma série de potência universal para os escoamentos turbulentos (KOLMOGOROV, 1991). Neste trabalho o autor apresenta a teoria sobre homogeneidade local da turbulência, levando-se em consideração as variações de velocidade nas três coordenadas espaciais e sua variação no tempo. A distribuição das flutuações de temperatura apresenta a mesma estrutura de distribuição de energia demonstrada, inicialmente, por Kolmogorov (HILL; CLIFFORD, 1978; ANDREWS; PHILLIPS, 2005). Logo, a turbulência óptica trata-se das alterações do índice de refração do fluido devido às flutuações de temperatura do escoamento.

A cintilação origina-se das variações estocásticas da intensidade entre a fonte e o observador, causadas pela alteração de fase ao longo do caminho (MORRILL, 2018). Estas distorções de fase podem ser consideradas como turbulência atmosférica. Logo, para introdução deste fenômeno é necessário apresentar uma metodologia que leva em consideração esta alteração de fase, a qual já é bem documentada por Strasburg e Harper (2004), Harding et al. (1999), Smith (1977), Sriram e Kearney (2007), Beghi et al. (2008a).

Devido ao atingimento da ordem de *kilowatts* dos laser de fibra dopadas com Yb ser relativamente recente o desenvolvimento de modelos que acoplam as equações da dinâmica dos fluidos com as equações de Maxwell ainda é motivo de diversos trabalhos na atualidade. Destaca-se aqui o desenvolvimento dos trabalhos sobre: o acoplamento do efeito *thermal blooming* com a convecção induzida pelo laser em Akers e Reeger (2019); a propagação de laser de alta potência e a influência dos efeitos do ambiente de propagação em (MORRILL; AKERS, 2017; MORRILL; AKERS, 2019); propagação de HEL através de nuvens em Lawrence e Akers (2020); efeitos térmicos em lasers pulsado em Akers e Liu (2022); validação experimental de modelos teóricos de HELs em câmaras em Wu et al. (2022); e modelagem do efeito *thermal blooming* objetivando um aumento de potência do laser com a utilização de metodologia apropriada em Morais et al. (2022).

Um dos exemplos da modelagem de feixes de HEL é o trabalho desenvolvido em Akers e Liu (2022) no qual é apresentado um modelo para lasers de pulsos curtos. O modelo inclui termos que representam as contribuições do *thermal blooming* e do efeito Kerr. A dinâmica de pulsos cujas energias estão próximas do limiar de colapso é simulada numericamente. Para obter seus resultados, os autores utilizam em seu modelo uma equação de Schrödinger não-linear generalizada e a equação de Navier-Stokes para

conservação de energia.

Outro exemplo desenvolvido em Lawrence (2018) apresenta um modelo para interação de um HEL com nuvens. É tratado o potencial de quebra de gotículas através de um primeiro laser como um método para limpar o caminho através de uma nuvem, para em seguida um segundo laser poder ser enviado sem obstruções e transportar a potência almejada. O modelo inclui o aquecimento de gotas e vapores. Para obtenção dos resultados o modelo utiliza a equação paraxial e a equação de Navier-Stokes para conservação de energia sem os termos convectivos.

Logo, o modelo que será apresentado neste trabalho e a sua abordagem podem servir de base para desenvolvimento de outras aplicações cuja a metodologia de desenvolvimento é similar.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 Introdução ao capítulo

Neste capítulo são apresentadas a fundamentação teórica para modelagem do problema físico, propagação de um HEL na atmosfera com efeitos *thermal blooming* e cintilação e a metodologia para obtenção da solução numérica deste equacionamento.

#### 3.2 Fundamentação Teórica

Nesta seção, é mostrado o formalismo do HEL pelo conjunto das equações paraxial, N-S e o modelo de tela de fase que governa a propagação através da atmosfera.

##### 3.2.1 Hipóteses assumidas

Para desenvolvimento do modelo teórico, foram assumidas as seguintes hipóteses:

- O campo eletromagnético é harmônico. Dessa forma, possui uma dependência senoidal do tipo  $e^{-i\omega t}$ . Além disso, a sua frequência de oscilação natural  $\omega$  é constante.
- Assume-se que o campo eletromagnético apenas possui a componente axial de propagação. Além disso, utiliza-se da aproximação paraxial, ou seja, a primeira derivada em relação à componente axial do campo eletromagnético é muito maior que a segunda derivada.
- Utiliza-se a aproximação de Boussinesq, o que implica que a densidade varia linearmente com a temperatura e esta variação só é considerada nas eq. N-S quando está associada à força de campo da gravidade (TRITTON, 2012).
- O fluido é newtoniano, o que implica que a viscosidade dinâmica,  $\mu$ , é constante, eq. (3.1):

$$\mu(x, y, z, t) = \mu \quad (3.1)$$

- O fluido é incompressível, eq. (3.2). Com isso, o campo de densidade é constante. Esta hipótese implica que variações no campo de pressão no fluido não afetam, de maneira significativa, as variações na densidade.

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 \quad (3.2)$$

- O fluido é não-estacionário. O que implica que os campos de velocidades, temperatura e pressão variam com o tempo.
- O aquecimento é isobárico. O que implica que as variações de temperatura do fluido acontecem a pressão contante.
- Assume-se que o fluido é um gás perfeito, com esta hipótese é possível utilizar a equação de estado para um gás perfeito, equação (3.175).
- Assume-se que a variação da energia possui apenas contribuição da energia interna do fluido.
- Assume-se que a condutividade térmica do fluido não varia espacialmente, eq. (3.3):

$$\kappa(x, y, z) = \kappa \quad (3.3)$$

- As condições iniciais são quiescentes. Esta hipótese implica que o aquecimento do meio fluido e demais fenômenos, como a turbulência e a cintilação são induzidos, essencialmente, pela interação do meio com o laser.
- As flutuações de velocidade e temperatura decaem por uma função de estrutura de segunda ordem, a qual por definição é a covariância da diferença da velocidade entre dois pontos (POPE, 2000; KOLMOGOROV, 1991).

### 3.2.2 Equação paraxial

Em um meio turbulento, a permissividade dielétrica possui quatro graus de liberdade, sendo três quanto a sua variação espacial e um quanto a sua variação temporal. Logo, a mesma pode ser vista como um campo escalar conforme eq. (3.4):

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

Tendo em mente que a dinâmica do meio fluido e a propagação do feixe de laser se desenvolvem em escalas de tempo com ordens de grandezas distintas. Sendo que a última ocorre na velocidade da luz,  $c \approx 10^9 \text{ m/s}$ , e a primeira com base na velocidade característica do escoamento, a qual será apresentada na seção de resultados e é de, aproximadamente,  $V_c \approx 10^{-3} \text{ m/s}$ . Portanto, os fenômenos ocorrem em uma diferença de ordem de grandeza superior a dez. Com isso, as alterações da permissividade, as quais serão estabelecidas com base nas alterações do escoamento, serão referentes a uma escala de tempo que para fins de entendimento será definida pela letra  $t$ . Logo, a eq. (3.4) fica na forma:

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t) \quad (3.5)$$

Quanto à variação espacial do índice de refração a mesma ocorre em uma escala de comprimento de onda cuja a menor escala de turbulência dado por  $l_0$  é muito maior que o comprimento de onda  $\lambda$ ,  $\frac{\lambda}{l_0} \approx 10^{-4} \text{ rad}$ , (ANDREWS; PHILLIPS, 2005). Logo, sua variação espacial se dá em uma escala muito maior que o comprimento de propagação do feixe de laser. Para representar esta diferença de escalas de variação a variação espacial da eq. (3.4) será representada pelas letras  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ . Logo, a eq. (3.5) é estabelecida, conforme eq. (3.6):

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (3.6)$$

Para o desenvolvimento da propagação do feixe de laser na atmosfera supõe-se que o meio é contínuo e sem fronteira e as variações do índice de refração são suaves e estocásticas. Além disso, o campo-eletromagnético possui uma variação com relação ao eixo axial monocromático, o que implica que o seu número de onda é fixo, dado pela eq. (3.7):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.7)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do campo eletromagnético se propagando na direção axial.

Quanto à sua variação temporal assume-se que trata-se de um campo harmônico. Dessa forma, há uma dependência senoidal do tipo  $e^{-i\omega t}$ . Além disso, a sua frequência de oscilação natural  $\omega$  é constante. Com isso, a representação do campo elétrico é dada pela equação (3.8), (MORRILL, 2018; MILONNI; EBERLY, 2010):

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{\psi}(x, y, z)e^{j\omega t} \quad (3.8)$$

onde  $\vec{\psi}$  é uma função de onda, a qual representa o estado do campo elétrico espacialmente em suas três direções.

A propagação do feixe de laser é dada pela equação paraxial a qual é derivada das equações Maxwell para um meio livre de fontes (cargas elétricas e correntes).

Para tanto, são apresentadas abaixo o conjunto das equações de Maxwell:

Lei de Gauss da eletricidade, eq. (3.9):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.9)$$

onde  $\rho$  é a densidade de volumétrica de carga e  $\vec{D}$  é o campo de deslocamento elétrico.

Lei de Faraday, eq. (3.10):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.10)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico e  $\vec{B}$  é o campo de indução magnética.

Lei de Gauss para o magnetismo, eq. (3.11):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.11)$$

Lei de Ampère-Maxwell, eq. (3.12):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.12)$$

$\vec{H}$  é o campo magnético,  $\vec{J}$  é o campo de densidade de corrente.

Como a propagação da onda é no ar, considera-se tratar-se de um meio livre de fontes, cargas elétricas e correntes, com isso a densidade volumétrica de carga é nula, conforme eq. (3.13):

$$\rho = 0 \quad (3.13)$$

Bem como, o campo de densidade de corrente, eq. (3.14):

$$\vec{J} = \epsilon^2 \beta \vec{E} \quad (3.14)$$

onde  $\beta$  é a absorvidade do meio e  $\epsilon$  é um fator de escala. A absorvidade é importante para que a transferência de energia seja considerada.

Considera-se o meio homogêneo, isotrópico e linear. Com isso, o campo de deslocamento elétrico fica, conforme a eq. (3.15):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.15)$$

Já o campo de indução magnética, fica conforme a eq. (3.16):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.16)$$

onde  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade magnética do vácuo.

Substituindo a eq. (3.13) e a eq. (3.15) na eq. (3.9), chega-se na eq. (3.17):

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \quad (3.17)$$

Substituindo a eq. (3.16) na eq. (3.10), chega-se na eq. (3.18):

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.18)$$

Substituindo a eq. (3.16) na eq. (3.11), chega-se na eq. (3.19):

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.19)$$

Substituindo as eq. (3.14), (3.15) e (3.16) na eq. (3.12), chega-se à eq. (3.20)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \epsilon^2 \beta \vec{E} + \frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t} \right] \quad (3.20)$$

Aplica-se a regra da derivada do produto na eq. (3.17) e chega-se à eq. (3.21):

$$(\nabla \cdot \vec{E})\epsilon + \vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = 0 \quad (3.21)$$

Isola-se o termo  $\nabla \cdot \vec{E}$  na eq. (3.21). Dado que a função (3.4) é não nula em todo o seu domínio, chega-se a eq. (3.22):

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \quad (3.22)$$

Dada a propriedade de uma função logarítmica, eq. (3.23):

$$\nabla(\ln f(x)) = \frac{\nabla f(x)}{f(x)} \quad (3.23)$$

Utiliza-se a propriedade dada pela eq. (3.23) na eq. (3.22) e chega-se à eq. (3.24):

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \nabla \ln \epsilon \quad (3.24)$$

Aplica-se o operador rotacional dos dois lados da equação (3.18) e chega-se à eq. (3.25):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left( -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (3.25)$$

Utiliza-se a identidade do cálculo diferencial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  na eq. (3.25) e chega-se à eq. (3.26):



$$\nabla \left( \nabla \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left( -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (3.26)$$

Seja  $f$  uma função  $C^\infty$ , o teorema de Clairaut-Schwarz é dado pela eq. (3.27):

$$\nabla \times \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times f) \quad (3.27)$$

Substitui-se o resultado dado pela eq. (3.24) no primeiro termo da esquerda da eq. (3.26). Quanto ao termo a direita da igualdade da eq. (3.26), dado que as funções dos campos eletromagnéticos são funções suaves, classe  $C^\infty$ , aplica-se o teorema de Clairaut-Schwarz, eq. (3.27), e utiliza-se a eq. (3.16). Dessa forma obtém-se a eq. (3.28):

$$-\nabla \left( \vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (3.28)$$

Utiliza-se a eq. (3.20) no termo a direita da igualdade da equação (3.28), chega-se à eq. (3.29):

$$-\nabla \left( \vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu_0 \left( \varepsilon^2 \beta \vec{E} + \frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \right) \right] \quad (3.29)$$

Aplica-se a derivada do produto no termo da direita da equação (3.29) e obtém-se a eq. (3.30):

$$\nabla \left( \vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right) + \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon^2 \beta \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{E} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

Conforme explicitado para se chegar a eq. (3.6), as escalas de variação da permissividade espacial e temporal são em ordens de grandezas diferentes das variações dadas pela eq. (3.30). Sendo assim, o primeiro termo do lado esquerdo da eq. (3.30), possui uma variação espacial da permissividade dielétrica, logo este pode ser negligenciado. Da mesma forma, o último termo da direita da eq. (3.30), possui uma variação temporal da permissividade dielétrica, o qual também deve ser negligenciado. Com isso, a eq. (3.30) é simplificada e assume a forma dada pela eq. (3.31):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \beta \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.31)$$

Substituindo a eq. (3.8) na eq. (3.31), chega-se à eq. (3.32):

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon \vec{E} + j \varepsilon^2 \beta \mu_0 \omega \vec{E} \quad (3.32)$$

Dado que a permissividade dielétrica e o índice de refração estão relacionados conforme estabelecido na eq. (3.33):

$$\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad (3.33)$$

onde  $\eta$  é o índice de refração e  $\varepsilon_0$  é a constante de permissividade elétrica do vácuo.

Isola-se a permissividade dielétrica na eq. (3.33) e chega-se à eq. (3.34):

$$\varepsilon = \eta^2 \varepsilon_0 \quad (3.34)$$

Substitui-se o termo do lado direito da eq. (3.34) na eq. (3.32) e chega-se à eq. (3.35):

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \vec{E} + j \varepsilon^2 \beta \mu_0 \omega \vec{E} \quad (3.35)$$

Sabendo-se que a velocidade da luz no vácuo é dada pela eq. (3.36):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (3.36)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Logo, isolando-se o termo  $\mu_0 \varepsilon_0$  na eq. (3.36), chega-se à relação dada pela eq. (3.37):

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (3.37)$$

Substitui-se o resultado dado pela eq. (3.37) na eq. (3.35) e chega-se à eq. (3.38):

$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \eta^2 \vec{E} + j \varepsilon^2 \beta \mu_0 \omega \vec{E} \quad (3.38)$$

Sabendo-se da relação dada pela eq. (3.39):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.39)$$

onde  $k$  é o número de onda na direção axial  $z$ . Substitui-se este resultado dado pela eq. (3.39) na eq. (3.38) e chega-se a eq. (3.40):

$$\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \eta^2 \vec{E} + j \varepsilon^2 \beta \mu_0 \omega \vec{E} \quad (3.40)$$

Substitui-se a eq. (3.8) na eq. (3.40), com isso os termos do campo elétrico que são dependentes da variável temporal se anulam e chega-se à eq. (3.41):

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -k^2 \eta^2 \vec{\psi} + j \varepsilon^2 \beta \mu_0 \omega \vec{\psi} \quad (3.41)$$

A equação (3.41) é uma equação vetorial nas três componentes espaciais, ou seja,  $\vec{\psi} = \psi_x \vec{e}_1 + \psi_y \vec{e}_2 + \psi_z \vec{e}_3$ . Logo, esta equação pode ser facilmente decomposta em três equações escalares:

$$\nabla^2 \psi_x = -k^2 \eta^2 \psi_x + j \epsilon^2 \beta \mu_0 \omega \psi_x \quad (3.42)$$

$$\nabla^2 \psi_y = -k^2 \eta^2 \psi_y + j \epsilon^2 \beta \mu_0 \omega \psi_y \quad (3.43)$$

$$\nabla^2 \psi_z = -k^2 \eta^2 \psi_z + j \epsilon^2 \beta \mu_0 \omega \psi_z \quad (3.44)$$

Dado que a propagação do feixe de laser se dá ao longo do eixo axial, o qual por convenção é a componente  $z$ , é razoável assumir que as equações escalares (3.42) e (3.43), as quais representam a variação do vetor campo elétrico nas direções transversais não são nulas. Pois a propagação da onda eletromagnética é perpendicular ao campo. No entanto, a componente  $\psi_z$  é nula, eq. (3.44).

Dado do problema que será analisado, o qual apenas será considerado que há a propagação do modo fundamental. Com isso, os campos  $E_x$  e  $E_y$  possui a mesma função que é a função gaussiana, o que implica sem perda de generalidade que a função  $\psi$  pode representar a propagação de ambas as componentes do campo elétrico.

Logo a equação (3.41), dadas as considerações acima apresentadas assume a forma de uma função escalar conforme estabelecido na eq. (3.45):

$$\nabla_{\perp}^2 \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(x, y, z) + k^2 \eta^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \psi(x, y, z) - j \epsilon^2 \beta \mu_0 \omega \psi(x, y, z) = 0 \quad (3.45)$$

A equação (3.45) é a equação de Helmholtz escalar, onde  $\nabla_{\perp}^2$  representa o operador de Laplace em coordenadas cartesianas transversais, conforme eq. (3.46). As variáveis independentes foram explicitadas para se observar que a função de onda  $\psi$  está em uma escala dimensional diferente da variação do índice de refração.

$$\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.46)$$

Para continuidade da solução da eq. (3.45), estabelece-se que o índice de refração é composto por duas componentes, conforme eq. (3.47), as quais estão em ordem de grandeza distintas devido a um número real  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $\epsilon > 0$ :

$$\eta = \eta_s + \epsilon^2 \eta_f \quad (3.47)$$

onde  $\eta_s$  é o índice de refração do meio não perturbado,  $\eta_f$  representa a mudança do índice de refração devido ao aquecimento do meio pelo feixe laser.

Para se chegar à equação paraxial é utilizada a aproximação de que a envoltória das ondas  $V(x, y, z)$  varia lentamente, quando comparada com a função de onda  $\psi(x, y, z)$ , que se propaga com a velocidade da luz ao longo da direção  $+z$ . Com isso, é razoável assumir que a variação espacial transversal da envoltória da função  $\psi$  está na mesma ordem de grandeza que a variação do índice de refração, ou seja, dada a eq. (3.48)  $\epsilon x \approx \mathbf{x}$ ,  $\epsilon y \approx \mathbf{y}$ . Sob esta hipótese, a função de onda  $\psi(x, y, z)$  pode ser escrita conforme eq. (3.48):

$$\psi(x, y, z) = V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} \quad (3.48)$$

onde  $k\eta_s$  é a constante de propagação ao longo do eixo axial.

Substituindo as eq. (3.47) e (3.48) na eq. (3.45), chega-se à eq. (3.49):

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 (V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z}) \\ + k^2 (\eta_s + \epsilon^2 \eta_f)^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} - j\epsilon^2 \beta \mu_0 \omega V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Realiza-se as derivadas da eq. (3.49) e chega-se à eq. (3.50):

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + \epsilon^4 \frac{\partial^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z^2} e^{jk\eta_s z} + \epsilon^2 2jk\eta_s \frac{\partial V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z} e^{jk\eta_s z} - \\ k^2 \eta_s^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + k^2 \eta_s^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + \epsilon^2 2\eta_s \eta_f k^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + \\ + \epsilon^4 k^2 \eta_f^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} - j\epsilon^2 \beta \mu_0 \omega V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agrupa-se os termos com base nas potência de  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} -k^2 \eta_s^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + k^2 \eta_s^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + \\ \epsilon^2 \left( \nabla_{\perp}^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} + 2jk\eta_s \frac{\partial V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z} e^{jk\eta_s z} + 2\eta_s \eta_f k^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} \right. \\ \left. - j\beta \mu_0 \omega V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} \right) \\ + \epsilon^4 \left( \frac{\partial^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z^2} e^{jk\eta_s z} + k^2 \eta_f^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) e^{jk\eta_s z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Os dois primeiros termos a esquerda da igualdade se anulam da eq. (3.51), além disso o termo  $e^{jk\eta_s z}$  é comum a todos os termos e não nulo logo poder simplificado. Com isso, obtém-se a eq. (3.52):

$$\epsilon^2 \left( \nabla_{\perp}^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) + 2jk\eta_s \frac{\partial V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z} + 2\eta_s \eta_f k^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) - j\beta\mu_0\omega V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) \right) + \epsilon^4 \left( \frac{\partial^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z^2} + k^2 \eta_f^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) \right) = 0 \quad (3.52)$$

Dado que na propagação do feixe de laser o desvio do eixo óptico em relação ao eixo de propagação é muito pequeno é possível estabelecer a aproximação paraxial, logo assume-se a condição dada pela eq. (3.53). Além disso, tal termo tem contribuição em  $O(\epsilon^4)$ , observa-se que por definição as flutuações do índice de refração são  $O(\epsilon^2)$ , eq. (3.47), bem como a variação da envoltória na direção axial, eq. (3.48). Logo, é razoável negligenciar os termos  $O(\epsilon^4)$  da eq. (3.51). Com isso, chega-se à eq. (3.54).

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right| \quad (3.53)$$

$$\epsilon^2 \left( \nabla_{\perp}^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) + 2jk\eta_s \frac{\partial V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z)}{\partial z} + 2\eta_s \eta_f k^2 V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) - j\beta\mu_0\omega V(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon^2 z) \right) = 0 \quad (3.54)$$

Por definição o termo  $\epsilon^2 > 0$  na eq. (3.54). Logo, suprimindo as variáveis independentes isolando o termo em comum, obtém-se uma equação para a envoltória do campo elétrico, eq. (3.55). Uma equação do tipo de Schrödinger:

$$\left( 2jk\eta_s \frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 + 2\eta_s \eta_f k^2 - j\beta\mu_0\omega \right) V = 0 \quad (3.55)$$

Nota-se que esta equação estabelece uma relação da variação axial da envoltória do campo elétrico, dada pela derivada parcial em relação à componente z desta, com um termo difusivo transversal desta envoltória dado pelo laplaciano, bem como pelas alterações do índice de refração. Todas estas variações estão baseadas na escala de alteração do escoamento as quais são oriundas da resolução das equações de Navier-Stokes neste modelamento.

Para resolução da eq. (3.55) isola-se à esquerda da igualdade a derivada em relação à componente axial da envoltória do campo elétrico, eq. (3.56):

$$\frac{\partial V}{\partial z} = j \frac{1}{2\eta_s k} \nabla_{\perp}^2 V + j\eta_f k V - \frac{\beta\mu_0\omega}{2\eta_s k} V \quad (3.56)$$

A solução desta EDO com relação a coordenada z é uma exponencial do tipo:

$$V(x, y, z) = e^{(j \frac{1}{2\eta_s k} \nabla_{\perp}^2 z + jk \int \eta_f dz)} e^{-\frac{\beta\mu_0\omega}{2\eta_s k} z} V(x, y) \quad (3.57)$$

Observa-se na equação (3.57) que onde encontra-se a absorvidade  $\beta$ , este termo é uma exponencial negativa, que representa a perda de energia do escoamento ao se propagar ao longo do eixo axial, o que se torna significativo para o feixe de laser quando a frente de onda se propaga para ordem de distâncias interplanetárias. No entanto, para o caso do problema deste trabalho, a distância entre o emissor e receptor é de no máximo da ordem de quilômetros. Com isso, esta perda de energia do feixe devido a sua propagação em relação ao eixo  $z$  não é significativa.

No entanto, como a potência do feixe é constante, ou seja, trata-se de um laser de emissão contínua, a interação do fluido com a potência deste laser é relevante. Logo, a absorvidade que é o fator que estabelece, como se dá esta transferência de energia entre o laser e o escoamento torna-se relevante e o mesmo entra como um termo fonte na equação da conservação da energia, o que será demonstrado na seção referente a este assunto. Com isso, a equação (3.57) assume a forma dada pela eq. (3.58):

$$V(x, y, z) = e^{(j \frac{1}{2\eta_s k} \nabla_{\perp}^2 z + jk \int \eta_f dz)} V(x, y) \quad (3.58)$$

Discretiza-se com relação a  $z$  a equação (3.58) e chega-se a eq. (3.59):

$$V(x, y, n + 1) = e^{(j \frac{1}{2\eta_s k} \Delta z \nabla_{\perp}^2 + jk \int_{z^n}^{z+\Delta z} \eta_f dz)} V(x, y, n) \quad (3.59)$$

Parte-se da premissa que  $\eta_f$  é uma função analítica e pode ser expandida como uma série de Taylor com relação a componente  $z$ , logo é possível haver comutação. Com isso, os termos da exponencial podem ser substituídos por um termo de segunda ordem.

$$V(x, y, n + 1) = e^{j \frac{1}{4\eta_s k} \Delta z \nabla_{\perp}^2} e^{jk \int_{z^n}^{z+\Delta z} \eta_f dz} e^{j \frac{1}{4\eta_s k} \Delta z \nabla_{\perp}^2} V(x, y, n) \quad (3.60)$$

Conforme apresentado em Fleck et al. (1977) a aproximação dada pela eq. (3.60), após a primeira propagação  $\frac{\Delta z}{2}$ , a suposição da possibilidade de permutação de operadores implica que a evolução em  $z$  passa a ser uma propagação no vácuo de  $\Delta z$  acrescido de uma alteração de fase que depende do operador não linear  $e^{jk \int_{z^n}^{z+\Delta z} \eta_f dz}$ . Tal método de resolução é conhecido como *split step fourier method*.

A eq. (3.61) apresenta a resolução para a evolução em  $2\Delta z$ . Este exemplo demonstra que a evolução em  $z$  utilizando o *split step fourier method* se dá, inicialmente, por uma evolução no vácuo  $\frac{\Delta z}{2}$ , acrescido da alteração da fase do operador do índice de refração de  $z^n$  até  $z^{n+1}$ , em seguida de uma evolução no vácuo de  $\Delta z$ , mais uma alteração da fase do operador do índice de refração de  $z^{n+1}$  até  $z^{n+2}$  e finaliza-se com uma evolução no vácuo de  $\frac{\Delta z}{2}$ .

$$\begin{aligned}
V(x, y, n + 2) &= V(x, y, (n + 1) + 1) = \\
e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} e^{jk\int_{z^n}^{z+\Delta z}\eta_f dz} e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} e^{jk\int_{z^n}^{z+\Delta z}\eta_f dz} e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} V(x, y, n) &= \quad (3.61) \\
e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} e^{jk\int_{z^n}^{z+\Delta z}\eta_f dz} e^{j\frac{1}{2\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} e^{jk\int_{z^n}^{z+\Delta z}\eta_f dz} e^{j\frac{1}{4\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} V(x, y, n) &
\end{aligned}$$

Com a simetrização apresentada pela eq. (3.60) é possível separar a resolução desta equação em duas etapas a primeira diz respeito a solução ao longo  $\Delta z$  no meio não perturbado a qual é obtida através dos métodos espectrais. A segunda é realizada com relação ao operador  $e^{jk\int_{z^n}^{z+\Delta z}\eta_f dz}$  que diz respeito a variação do meio devido as alterações do índice de refração. Logo, devido à hipótese para simetrização da solução, só faz sentido a resolução da equação via métodos numéricos, com isso a equação que deve ser resolvida via FFT, inicialmente, é a que a solução é:

$$V(x, y, n + 1) = e^{j\frac{1}{2\eta_s k}\Delta z\nabla_{\perp}^2} V(x, y, n) \quad (3.62)$$

Logo, é a discretização da solução em  $z$  da EDP:

$$\frac{\partial V'}{\partial z} = j\frac{1}{2\eta_s k}\nabla_{\perp}^2 V' \quad (3.63)$$

Para resolução desta equação é utilizado de métodos espectrais para transformar o plano transversal, domínio  $(x, y)$  no espaço  $(k_x, k_y)$ . Para tanto, é utilizado no desenvolvimento a transformada de Fourier conforme eq. (3.64) e sua inversa eq. (3.65). Em seguida, tais transformações devem ser discretizadas pelo algoritmo FFT.

$$\hat{V}(k_x, k_y, z) = F\{V(x, y, z)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.64)$$

$$V(x, y, z) = F^{-1}\{\hat{V}(k_x, k_y, z)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.65)$$

Para resolução da eq. (3.63) também é utilizada a propriedade da transformada da derivada de Fourier. Para tanto a função  $V(x, y)$  é diferenciável e deve-se garantir os limites dados pelas eq. (3.66) e (3.67):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x, y, z) = 0 \quad (3.66)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} V(x, y, z) = 0 \quad (3.67)$$

Com isso, a transformada da derivada  $F\{V(x, y)\}$  em relação à variável  $x$  é dada pela eq. (3.68):

$$F\left\{\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right\} = jk_x F\{V(x, y, z)\} \quad (3.68)$$

Já a transformada da derivada  $F\{V(x, y)\}$  em relação à variável  $y$  é dada pela eq. (3.69):

$$F\left\{\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}\right\} = jk_y F\{V(x, y, z)\} \quad (3.69)$$

Para resolução da eq. (3.63) aplica-se a eq. (3.64) na eq. (3.63) e obtém-se a eq. (3.70):

$$\frac{\partial \hat{V}'(k_x, k_y, z)}{\partial z} = j \frac{1}{2k\eta_s} F\{\nabla_{\perp}^2 V'\} \quad (3.70)$$

Aplica-se as propriedades dadas pelas eq. (3.68) e eq. (3.69) na eq. (3.70) e obtém-se a eq. (3.71):

$$\frac{\partial \hat{V}'(k_x, k_y, z)}{\partial z} = -j \frac{1}{2k\eta_s} [(k_x^2 + k_y^2) \hat{V}'(k_x, k_y, z)] \quad (3.71)$$

Resolve-se a EDO com relação a variável  $z$ :

$$\hat{V}'(k_x, k_y, z) = e^{-j \frac{1}{2k\eta_s} (k_x^2 + k_y^2) z} \hat{V}'(k_x, k_y) \quad (3.72)$$

Aplica-se a eq. (3.65) na eq. (3.72) e obtém-se a eq. (3.73):

$$F^{-1}\{\hat{V}'(k_x, k_y, z)\} = F^{-1}\left\{e^{-j \frac{1}{2k\eta_s} (k_x^2 + k_y^2) z} \hat{V}'(k_x, k_y)\right\} \quad (3.73)$$

Aplica-se as propriedades da transformada de Fourier e chega-se que, no vácuo a solução da EDP é igual:

$$V'(x, y, z) = F^{-1}\left\{e^{-j \frac{1}{2k\eta_s} (k_x^2 + k_y^2) z} \hat{V}'(k_x, k_y)\right\} \quad (3.74)$$

Esta equação, os operadores da transformada de Fourier devem ser substituído pelo algoritmo da FFT e a mesma deve ser discretizada com relação a  $z$ . Com isso, obtém a resposta para um dado  $\Delta z$  da eq. (3.63). Esta solução deve ser substituída na solução da equação paraxial para o meio perturbado, eq. (3.75):



$$V(x, y, z) = V'(x, y, z)e^{jk \int \eta_f dz} \quad (3.75)$$

Logo, chega-se à eq. (3.76)

$$V(x, y, z) = F^{-1} \left\{ e^{-j \frac{1}{2k\eta_s} (k_x^2 + k_y^2) z} \hat{V}'(k_x, k_y) \right\} e^{jk \int \eta_f dz} \quad (3.76)$$

Portanto a eq. (3.76) só possui significado quando discretizada, dado também que a mesma será solucionada via FFT, chega-se à eq. (3.77):

$$V(n\Delta x, m\Delta y, (k+1)\Delta z) = F^{-1} \left\{ e^{-j \frac{1}{2k\eta_s} (k_{xm}^2 + k_{yn}^2) \Delta z} \hat{V}'(k_x m, k_y n) \right\} e^{jk \int_{k\Delta z}^{(k+1)\Delta z} \eta_f dz} \quad (3.77)$$

Portanto basta determinar como se estabelece a evolução de  $\eta_f$  ao longo de cada  $\Delta z$ , para se obter a resposta quando o índice de refração possui variação.

Para se obter a evolução de  $\eta_f$  para cada  $\Delta z$  se estabelece que a correlação entre o índice de refração  $\eta$  e temperatura  $T$  é feita a partir da aproximação Boussinesq para gases ideais, dada pela eq. (3.78):

$$\frac{\rho_f}{\rho_s} = \frac{T_f}{T_s} \quad (3.78)$$

onde  $\rho_s$  é a densidade média,  $\rho_f$  é a correção da densidade,  $T_s$  é a temperatura média,  $T_f$  é a correção da temperatura. Utiliza-se da relação de Gladstone-Dale, eq. (3.79), a qual estabelece uma relação entre o índice de refração e a variação de densidade:

$$\eta_f = (\eta_s - 1) \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (3.79)$$

Com base nas eq. (3.78) e eq. (3.79), chega-se à equação (3.80):

$$\eta_f = (\eta_s - 1) \frac{T_f}{T_s} \quad (3.80)$$

A equação (3.80) é usada para atualizar o índice de refração na eq. (3.77).

Assim, as equações N-S são atualizadas com este novo  $V$  para obter as variáveis da dinâmica dos fluidos nas direções transversais  $x$  e  $y$ . Por conseguinte, a única variável prescrita neste modelo é a forma do perfil inicial do feixe de laser em  $z = 0$ , dada pela eq. (3.81):

$$V(x, y, z = 0, t = 0) = e^{-\pi(x^2 + y^2)} \quad (3.81)$$

### 3.2.3 Equações de Navier-Stokes

Os princípios e definições para se obter o conjunto de equações que será apresentado nesta seção foram baseados em Anderson (2010).

#### 3.2.3.1 Equação da continuidade

Dado um volume de controle fixo, a massa no seu interior deve ser conservada devido ao princípio da física de conservação da matéria, desde que não exista neste volume de controle nenhum sorvedouro ou fonte de massa, lei de Lavoisier (MORRIS, 1972). Logo, o fluxo de massa que entra e sai da superfície deste volume de controle deve ser igual à taxa de decaimento ou crescimento de massa neste volume de controle. Estabelece-se que há um aumento de fluxo de massa saindo pela superfície do volume de controle e por sua vez existe uma taxa de decaimento de massa em relação ao tempo. Logo, é possível estabelecer a equação (3.82):

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \quad (3.82)$$

onde  $\mathbf{V}$  é o vetor velocidade descrito pela eq. (3.83),  $S$  é a superfície que envolve o volume de controle e  $\mathcal{V}$  é o volume de controle.

$$\mathbf{V} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3 \quad (3.83)$$

Na equação (3.82) o termo do lado esquerdo da igualdade apresenta o fluxo de massa que sai do volume de controle, já no termo da direita da igualdade o sinal negativo é devido ao decaimento da massa do volume de controle, a derivada parcial com relação ao tempo é devido à taxa de variação no tempo e a integral de volume é a massa total que o volume de controle possui.

Logo, trazendo o termo da direita da igualdade da eq. (3.82) para esquerda obtém-se a eq. (3.84)

$$\oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 \quad (3.84)$$

A equação eq. (3.84) é conhecida como a equação da continuidade em sua forma integral. No entanto, para o problema proposto a forma que melhor se aplica é esta equação em sua forma diferencial. Para tanto, deve-se continuar o manuseio desta para obtenção da forma diferencial.

Dado o teorema da divergência, eq. (3.85), é possível transformar a integral de superfície da eq. (3.84), referente fluxo de massa que sai, em um integral de volume:

$$\oiint_S A \cdot dS = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot A d\mathcal{V} \quad (3.85)$$

A eq. (3.85) é conhecida como o teorema da divergência. Tal teorema pode ser aplicado se o volume de controle  $\mathcal{V}$  é definido como um subconjunto compacto do espaço  $\mathbb{R}^3$ , que é o caso, além disso se é uma função definida por partes em sua fronteira  $\partial\mathcal{V} = S$ . Por fim, o campo vetorial  $A$  deve ser contínuo e diferenciável definido na vizinhança de  $\mathcal{V}$ . Dado que o volume de controle  $\mathcal{V}$  é definido como um subconjunto  $\mathbb{R}^3$ , compacto e sua fronteira é bem definida e o campo vetorial,  $\rho\mathbf{V}$ , é contínuo e diferenciável definido na vizinhança de  $\mathcal{V}$ , pode-se aplicar a eq. (3.85) no termo da esquerda da eq. (3.84). Com isso, obtém-se a eq.(3.86):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 \quad (3.86)$$

Dado que o volume de controle  $\mathcal{V}$  é fixo no espaço, logo os seus limites de integração também são fixos. Portanto, a derivada parcial do termo da direita da eq. (3.86) pode permutar com a integração, logo obtém-se a eq. (3.87):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \quad (3.87)$$

Observa-se que na eq. (3.87) os limites de integração são os mesmos nas duas integrais. Com isso, é possível aglutinar os integrandos obtendo-se a eq. (3.88):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[ \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (3.88)$$

Observa-se que o resultado da integração da eq. (3.88) é nulo. Supondo que o integrando é um número diferente de zero é necessário que a integração sobre o volume de controle seja nula, no entanto da construção do problema o volume de controle é arbitrário no espaço, logo não há justificativa para esta suposição. Com isso, para que o resultado da eq. (3.88) seja nulo para um volume de controle arbitrário é necessário que o integrando desta seja nulo. Dessa forma é obtida a eq. (3.89):

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.89)$$

A equação (3.89) é a equação da continuidade em sua forma diferencial. Algumas simplificações são realizadas nesta equação devido as condições de contorno do problema. A primeira delas é a aproximação de Boussinesq (TRITTON, 2012), a qual implica que a densidade varia linearmente com a temperatura. A variação temporal desta é ignorada. Logo,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , para todos os pontos do domínio, com isso obtém-se a eq. (3.90):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.90)$$

A segunda simplificação que deve ser feita é quanto a compressibilidade do escoamento. Para justificar esta deve-se basear na definição de compressibilidade apresentada em Anderson (2010). Sendo considerado um volume de controle  $\mathcal{V}$  a pressão exercida nas laterais do elemento é dada por  $P$ . Supondo que a pressão  $P$  é aumentada por uma quantidade infinitesimal  $dP$ , o que implica que o volume de controle será reduzido de uma quantidade  $d\mathcal{V}$ , proporcional à pressão, eq. (3.91):

$$dP \propto -d\mathcal{V} \quad (3.91)$$

Assume-se que a variação do volume de controle devido à variação de pressão é proporcional à uma constante de proporcionalidade, a qual é definida como compressibilidade.  $\tau'$ , Logo a expressão dada pela eq. (3.91), assume a forma da eq. (3.92):

$$\tau' \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{dP} \quad (3.92)$$

Assume-se que o volume de controle  $\mathcal{V}$  trata-se de um volume específico (volume por unidade de massa). Então é possível estabelecer a relação dada pela eq. (3.93):

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\rho} \quad (3.93)$$

Substituindo a eq. (3.93) na eq. (3.92) chega-se à eq. (3.94):

$$\tau' = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad (3.94)$$

Isolando-se o termo da variação infinitesimal da densidade da eq. (3.94) chega-se à eq. (3.95):

$$d\rho = \rho \tau' dP \quad (3.95)$$

A equação (3.95) estabelece a relação da variação da densidade de um fluido com as grandezas que a determinam. A primeira delas é a compressibilidade  $\tau'$  a qual é inata ao fluido, esta para o caso de gases possui ordens de grandezas superior aos líquidos. Com isso, a variação da densidade em líquidos não é constante mas pode ser negligenciada dado que a sua compressibilidade é muito pequena.

Uma outra possibilidade para se negligenciar a variação de densidade de um fluido é quando a variação de pressão deste é muito pequena. Para o caso de gases, quando o escoamento apresenta "baixas velocidades" mesmo que a sua compressibilidade  $\tau'$  seja muito alta o termo a direita da igualdade da eq. (3.95) será muito pequeno devido à variação da pressão  $dP$  ser muito pequena. Logo, a variação da densidade pode ser negligenciada.

Assume-se e é demonstrado que um gás possui baixas velocidades quando o seu número de Mach, eq. (3.96),  $M$ , é menor que 0,3 (ANDERSON, 2010):

$$M \equiv \frac{V}{a} \quad (3.96)$$

onde  $a$  é a velocidade local do som.

Para o caso do problema estudado a velocidade do escoamento é muito pequena. Com isso,  $M < 0,3$  o que implica que a variação da pressão é muito pequena. Logo, a eq. (3.95) é aproximadamente dada pela eq. (3.97):

$$d\rho \simeq 0 \quad (3.97)$$

Com a posse do resultado da eq. (3.97), aplica-se a propriedade do cálculo vetorial dada pela eq. (3.98) na eq. (3.90):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \equiv \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho \quad (3.98)$$

Logo, chega-se à eq. (3.99):

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.99)$$

O segundo termo a esquerda da igualdade da eq. (3.99) pode ser negligenciado devido ao resultado obtido pela eq. (3.97). Com isso chega-se à eq. (3.100):

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.100)$$

Logo, a eq. (3.90), dado que a densidade não varia espacialmente assume a forma dada pela eq. (3.100), pois o operador nabla apenas opera sobre o campo de

velocidades. Para que o resultado dado pela eq. (3.100) seja atendido é possível duas alternativas: ou o campo de densidade  $\rho$  é nulo, o que não faz sentido físico; ou operador nabla operando sobre o vetor de velocidades é nulo. Logo, a eq. (3.100), assume a forma dada pela eq. (3.101):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.101)$$

A equação (3.101) é a equação da continuidade diferencial para um escoamento incompressível e estacionário.

Porém, uma ressalva deve ser feita. Devido à aproximação de Boussinesq a variação da densidade só possui relevância quando acoplada ao termo fonte da gravidade e possui uma relação linear com a temperatura. Logo, a equação (3.101), com a aproximação de Boussinesq, representa a equação da continuidade de um escoamento não estacionário.

Conforme será melhor explicado na seção, para se chegar as equações da turbulência óptica, apenas será considerado para resolução do escoamento a seção transversal do escoamento que interage com o laser. Logo,  $w = 0$  e daí a o vetor velocidade dado pela eq. (3.83), com base nesta simplificação, assume a forma dada pela eq. (3.102):

$$\mathbf{V} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 \quad (3.102)$$

Substituindo a eq. (3.102) na eq. (3.101), chega-se à eq. (3.103):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.103)$$

### 3.2.3.2 Equação da conservação do momento

Partindo-se da segunda lei de Newton, eq. (3.104):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{V}) \quad (3.104)$$

A eq. (3.104) estabelece o princípio físico de que a força é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento. O lado esquerdo da equação (3.104) pode ser dividido em dois conjuntos de fontes de força:

- Forças de campo: gravidade, forças eletromagnética, tipos de forças que atuam a uma certa distância do fluido que está dentro de um volume de controle  $\mathcal{V}$ ; e
- Forças de superfície: pressão, tensão de cisalhamento, forças que atuam sobre a superfícies de controle  $S$  do volume de controle  $\mathcal{V}$ .

Seja  $\mathbf{f}$  a força resultante de campo por unidade de massa exercida sobre o fluido que está dentro de  $\mathcal{V}$ . Então, a resultante das forças de campo em cada ponto do volume de controle é dada pela expressão eq. (3.105):

$$\rho \mathbf{f} d\mathcal{V} \quad (3.105)$$

Já a resultante das forças de campo sobre todo o volume de controle é a integral de volume sobre este, conforme eq. (3.106):

$$F_b \equiv \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} \quad (3.106)$$

A força de superfície sobre um elemento de área  $dS$  é dada pela expressão (3.107):

$$-P dS \quad (3.107)$$

Já a resultante das forças de pressão sobre a superfície de controle  $S$  é a integral de superfície sobre a área  $S$ , conforme eq. (3.108):

$$F_p \equiv - \oiint_S P dS \quad (3.108)$$

Quando trata-se de um fluido viscoso as tensões viscosas e de cisalhamento também são um tipo de força de superfície as quais serão tratadas, inicialmente, como  $F_v$ . Logo, o lado esquerdo da eq. (3.104), pode ser escrito, conforme eq. (3.109):

$$\mathbf{F} = F_b + F_p + F_v = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \oiint_S P dS + F_v \quad (3.109)$$

Quanto ao lado direito da eq. (3.104), o mesmo trata-se da composição de dois termos. O primeiro é devido ao balanço da quantidade de movimento que entra e sai da superfície do volume de controle o qual é dado pelo somatório dos elementos de superfície do fluxo de massa que entra e sai, que já foi apresentado pela eq. (3.82) multiplicado pela velocidade, conforme eq. (3.110):

$$Q_{\dot{m}} \equiv \oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot dS) \mathbf{V} \quad (3.110)$$

O segundo termo para compor o lado direito da equação (3.104) é dado pela taxa de variação no tempo da quantidade de movimento das partículas que estão no interior do volume de controle. O elemento infinitesimal de massa é dado pela expressão (3.111):

$$\rho d\mathcal{V} \quad (3.111)$$

Logo, a quantidade de movimento infinitesimal é dada pela multiplicação do elemento infinitesimal de massa pelo vetor velocidade, conforme eq. (3.112):

$$(\rho d\mathcal{V})\mathbf{V} \quad (3.112)$$

Já a quantidade de movimento no interior do volume de controle é dada pelo somatório das quantidades de movimento infinitesimais, eq. (3.112) no interior deste volume de controle, conforme eq. (3.113):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (3.113)$$

Por fim, a taxa de variação temporal da quantidade de movimento é dada pela derivada parcial da expressão eq. (3.113). Com isso chega-se à eq. (3.114):

$$Q_{mv} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (3.114)$$

Logo, a partir das eq. (3.108) e eq. (3.114) o lado direito da igualdade da eq. (3.104) pode ser escrito conforme eq. (3.115):

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{V}) = Q_{\dot{m}} + Q_{mv} = \iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (3.115)$$

Logo, substitui-se a eq. (3.109) e eq. (3.115) na eq. (3.104), chega-se à eq. (3.116):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \iint_S P d\mathbf{S} + F_v = \iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (3.116)$$

Aplicando o teorema da divergência, eq. (3.85), no segundo termo à esquerda da igualdade da eq. (3.116), chega-se à eq. (3.117):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla P d\mathcal{V} + F_v = \iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (3.117)$$

A equação (3.117) é uma equação vetorial a qual pode ser desmembrada em equações escalares para cada uma das componentes espaciais. Dado que para a equação



da continuidade a componente da velocidade  $w$  já foi assumida que é nula, eq. (3.102), por coerência e simplificação a força resultante de campo é dada pela eq. (3.118), a qual não possui componente em  $\vec{e}_3$ , bem como as forças viscosas são dadas pela eq. (3.119) a qual também não possui componente em  $\vec{e}_3$ :

$$\mathbf{f} = f_x \vec{e}_1 + f_y \vec{e}_2 \quad (3.118)$$

$$F_v = \mathcal{F}_x \vec{e}_1 + \mathcal{F}_y \vec{e}_2 \quad (3.119)$$

Substituindo as eq. (3.102), eq. (3.118) e eq. (3.119) na eq. (3.117), chega-se às duas equações escalares (3.120) e (3.121):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho f_x d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial P}{\partial x} d\mathcal{V} + \mathcal{F}_x = \oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S})u + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (3.120)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho f_y d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial P}{\partial y} d\mathcal{V} + \mathcal{F}_y = \oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S})v + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (3.121)$$

Os primeiros termos a direita da igualdade das eq. (3.120) e (3.121) é possível aplicar o teorema da divergência, eq. (3.85), com isso chega-se às eq. (3.122) e (3.123):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho f_x d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial P}{\partial x} d\mathcal{V} + \mathcal{F}_x = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (3.122)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho f_y d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial P}{\partial y} d\mathcal{V} + \mathcal{F}_y = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (3.123)$$

As equações (3.122) e (3.123) apresentam todos os termos como integrais de volume sobre um mesmo volume de controle  $\mathcal{V}$ , com exceção dos termos  $\mathcal{F}_x$  e  $\mathcal{F}_y$ , definindo os mesmos como integrais de volume conforme eq. (3.124) e (3.125):

$$\mathcal{F}_x \equiv \iiint_{\mathcal{V}} F_x d\mathcal{V} \quad (3.124)$$

$$\mathcal{F}_y \equiv \iiint_{\mathcal{V}} F_y d\mathcal{V} \quad (3.125)$$

Substituindo a eq.(3.124) na eq. (3.122) e colocando todos os termos a direita da igualdade chega-se à eq. (3.126):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[ -\rho f_x + \frac{\partial P}{\partial x} - F_x + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (3.126)$$

Conforme as mesmas explicações para justificar a obtenção da equação da continuidade na forma diferencial a equação (3.126) é simplificada e chega-se à eq. (3.127):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + F_x \quad (3.127)$$

Substituindo a eq. (3.125) na eq. (3.123) aplicando-se as mesmas operações que resultaram na eq. (3.126) chega-se à eq. (3.128):

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho f_y + F_y \quad (3.128)$$

As equações (3.127) e (3.128) são as equações de Navier-Stokes para conservação da quantidade de movimento nas direções x e y. Algumas simplificações serão realizadas nestas devido às condições de contorno do problema que será estudado. Dado que tais equações são similares irá se trabalhar apenas com a eq. (3.127) e os resultados obtidos serão replicados na eq. (3.128).

Dado a propriedade do cálculo vetorial expressa pela eq. (3.98) aplica-se esta no segundo termo a esquerda da igualdade da eq. (3.127) e expande-se também o primeiro termo desta equação e chega-se à eq. (3.129):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + (\rho \mathbf{V}) \cdot \nabla u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + F_x \quad (3.129)$$

Agrupam-se o segundo e terceiro termos a esquerda da igualdade da eq. (3.129), obtém a eq. (3.130):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + (\rho \mathbf{V}) \cdot \nabla u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + F_x \quad (3.130)$$

Substitui-se o resultado dado pela eq. (3.89), na expressão dentro dos colchetes da eq. (3.130), a qual trata-se da equação da continuidade em sua forma diferencial, obtém-se a eq. (3.131):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + F_x \quad (3.131)$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento da equação (3.131) deve se obter expressões para o termo que representa as tensões viscosas  $F_x$  que com a sua integração no volume são obtidas as forças viscosas  $\mathcal{F}_x$ . Para tanto, inicia-se com a definição de taxa de deformação  $\varepsilon$ , dado que o nosso escoamento é bidimensional a mesma é dada pela eq. (3.132) (ANDERSON, 2010):

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.132)$$

Destaca-se que as demais componentes da taxa de deformação são nulas por se tratar de um escoamento bidimensional, conforme estabelecido pela eq. (3.133):

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3.133)$$

As tensões de cisalhamento são proporcionais à taxa de deformação  $\tau_{xy} \propto \varepsilon_{xy}$  e a constante de proporcionalidade é definida como viscosidade dinâmica  $\mu$ . Além disso, assume-se que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Logo, as tensões de cisalhamento são dadas pelas eq. (3.134) e eq. (3.135):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.134)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.135)$$

Um segundo conjunto de tensões que compõe as forças viscosas são as tensões normais à superfície de controle as quais são dadas pelas eq.

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.136)$$

$$\tau_{yy} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.137)$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (3.138)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade *bulk* dado pela eq. (3.139):

$$\lambda \equiv -\frac{2}{3}\mu \quad (3.139)$$

Com a posse das equações (3.134) a (3.138) e realizando o balanço de forças viscosas no volume de controle é possível obter as expressões para as tensões viscosas  $F_x$  e  $F_y$  dadas pelas eq. (3.140) e eq.(3.141):

$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (3.140)$$

$$F_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (3.141)$$

Substituindo as eq. (3.134), eq. (3.135) e eq. (3.136) na eq. (3.140), chega-se à eq.(3.142):

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (3.142)$$

A equação (3.142) são as tensões viscosas de um escoamento bidimensional. Substituindo esta expressão na eq. (3.131), chega-se à expressão da equação de Navier-Stokes para um escoamento compressível e viscoso (3.143):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (3.143)$$

Dando continuidade no desenvolvimento do problema, utiliza-se da condição de que o escoamento que irá se trabalhar é incompressível. Logo, é possível utilizar a eq. (3.100). Além disso, assume-se que a viscosidade dinâmica é constante ao longo de domínio espacial. Com isso, substituindo a eq. (3.100) e a hipótese de que  $\mu$  é constante na eq. (3.142), chega-se à eq. (3.144):

$$F_x = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.144)$$

Dado que o fluido é incompressível e bidimensional com base na eq. (3.103) chega-se na equação (3.145):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.145)$$

Deriva-se os dois lados da equação (3.145) com relação a variável independente x e chega-se à eq.(3.146):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.146)$$

Substitui-se a eq.(3.146) na eq. (3.144) e chega-se à eq. (3.147):

$$F_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.147)$$

Substitui-se a eq. (3.147) na eq. (3.131) e chega-se à equação de Navier-Stokes para conservação do momento bidimensional, incompressível e viscosa para a componente x, eq. (3.148):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho f_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.148)$$

Realizando-se estes mesmos procedimentos para se chegar a eq. (3.148) com relação à componente y da conservação do momento chega-se à eq. (3.149):

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho f_y + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.149)$$

A única força de campo que será considerada para atuar nas equações de Navier-Stokes será a da força da gravidade, ou seja, a mesma só atua na direção vertical. Com isso, assume-se que a força de campo da equação de Navier-Stokes (3.148) é dada pela eq. (3.150):

$$f_x = 0 \quad (3.150)$$

Substituindo a eq. (3.150) na eq. (3.148) chega-se à eq.(3.151):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.151)$$

Já a força de campo da equação de Navier-Stokes (3.149) é dada pela eq. (3.152):

$$f_y = g \quad (3.152)$$

onde g a gravidade local.

Substituindo a eq. (3.152) na eq. (3.149) chega-se à eq. (3.153):

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.153)$$

Na aproximação de Boussinesq das equações de Navier-Stokes as variações da densidade que estão acopladas com o termo fonte, quando este é a gravidade, são as que irão sofrer alterações substanciais. Pois é através deste termo, ou melhor da variação da densidade, que o efeito de convecção irá surgir no escoamento. Logo, a densidade

para este termo passa a ser apresentada como a variação da densidade a qual varia linearmente com a alteração da temperatura, conforme estabelecido na aproximação de Boussinesq, eq. (3.78). Logo,  $\rho \propto T$  e a constante que torna esta variação linear é o coeficiente de expansão do fluido  $\alpha$ . Logo, a variação da densidade pode ser representada pela eq. (3.154):

$$\rho = \alpha\rho_0 T \quad (3.154)$$

Dado que o escoamento é incompressível considera-se  $\alpha = 1$  e assim chega-se à eq. (3.155):

$$\rho = \rho_0 T \quad (3.155)$$

Substitui-se a eq. (3.155) na eq. (3.153) e chega-se à eq. (3.156):

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g T + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.156)$$

### 3.2.3.3 Equação da Conservação da Energia

O fluido de trabalho, conforme já explicado anteriormente é incompressível. Logo, o problema de fechamento das equações de Navier-Stokes estaria resolvido pois os campos que seriam incógnitas do problema seriam o campo de velocidade  $\mathbf{V}$  e o campo de pressão  $P$ . Portanto, as duas equações escalares de conservação da quantidade de movimento e a equação da continuidade seriam suficientes. No entanto, o índice de refração é alterado com base no campo de temperatura e este campo sofre a influência de um termo fonte que é dependente da potência do laser, o que implica na necessidade de inclusão da equação da conservação da energia para determinação desta outra incógnita.

O princípio físico, o qual deve ser seguido para determinação da equação da energia, é de que a energia não pode ser criada ou destruída ela apenas pode ser transformada, primeira lei da termodinâmica (WISNIAK, 2008). A qual em termo de equação é representada pela eq. (3.157):

$$\delta q + \delta w = de \quad (3.157)$$

onde  $\delta q$  é a variação de calor,  $\delta w$  o trabalho e  $de$  é a variação da energia interna.

Para estabelecer a conservação de energia para um fluido a metodologia é a mesma apresentada anteriormente, estabelece-se um volume de controle e neste volume de controle a energia deve ser conservada, ou seja, deve-se aplicar a primeira lei da termodinâmica eq. (3.157). Isto implica que para um fluido, dado um volume de controle:  $\delta q$  é interpretado como a taxa de calor adicionada ou retirada do fluido no interior do

volume de controle por sua vizinhança;  $\delta w$  é a taxa de trabalho realizado sobre ou pelo fluido no interior do volume de controle; e  $de$  é a taxa de variação de energia conforme o fluido flui através do volume de controle.

Quanto à taxa de adição ou remoção de calor  $\delta q$  a qual é dada por uma taxa volumétrica de variação do calor por unidade de massa, a qual é definida como  $\dot{q}$  vezes a massa do elemento de volume,  $\rho d\mathcal{V}$ , e somado em todo o volume de controle. Além disso, deve-se acrescentar a taxa de variação de calor devido às forças viscosas, a qual é definida como  $\dot{Q}$ . Com isso chega-se à eq. (3.158):

$$\delta q = \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} + \dot{Q} \quad (3.158)$$

A taxa de variação de trabalho é dada pelo produto escalar entre a resultante das forças que atuam no volume de controle e o vetor velocidade deste corpo. As componentes de forças que atuam sobre um elemento de fluido são de três tipos, logo  $\delta w$  é composta por três componentes.

A primeira delas é devido às forças de pressão. A força de pressão sobre o elemento de área do fluido é dada pela expressão  $-PdS$ . A taxa de trabalho de um elemento fluido que atravessa com uma velocidade  $\mathbf{V}$  este elemento de área é dada por  $(-PdS) \cdot \mathbf{V}$ . Então, a taxa de variação de trabalho devido às forças de pressão sobre a superfície de controle é a soma de todas partes infinitesimais deste tipo de força em toda a superfície de área, a qual é dada pela eq. (3.159):

$$- \oiint_S (PdS) \cdot \mathbf{V} \quad (3.159)$$

Um segundo tipo de variação de trabalho é devido às forças de campo. A força de campo que é exercida sobre um elemento infinitesimal do volume de controle é dada por  $\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}$ . A taxa de trabalho desta força sobre este elemento infinitesimal é dada pelo produto interno entre ela e a velocidade deste elemento infinitesimal  $(\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}) \cdot \mathbf{V}$ . Já a taxa de trabalho em todo o volume de controle é igual à soma de todas estas taxas de variação de trabalho sobre estes elementos infinitesimais que compõe o volume de controle eq. (3.160):

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.160)$$

O terceiro tipo de força que é exercida sobre o volume de controle são as forças viscosas. A taxa de variação de trabalho devido às forças viscosas é definida como

$\dot{W}$ . Com isso, chega-se à expressão para taxa de variação de trabalho em um volume de controle, eq. (3.161):

$$\delta w = - \oint_S (P dS) \cdot \mathbf{V} + \iiint_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}) \cdot \mathbf{V} + \dot{W} \quad (3.161)$$

A taxa de variação da energia dentro do volume de controle é dada pela soma da taxa de variação de energia interna mais a taxa de variação de energia cinética de cada um componentes infinitesimais que compões o volume de controle. Esta taxa de variação da energia do volume de controle é composta por dois termos. O primeiro é devido aos elementos de massa que entram e saem da superfície de controle. Um elemento de massa que atravessa a superfície  $dS$  é dado por  $\rho \mathbf{V} \cdot dS$ , logo a taxa de variação de energia sobre a superfície de controle é dada pela eq. (3.162):

$$\oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot dS) \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (3.162)$$

onde  $e$  é a energia interna por unidade de massa e  $\frac{V^2}{2}$  é a energia cinética por unidade de massa.

O segundo termo é devido às taxas de variações da energia total dos elementos no interior do volume de controle, a qual é dada pela eq. (3.163):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} \quad (3.163)$$

Logo, a taxa de variação da energia com base nas eq. (3.162) e (3.163) é dada pela eq. (3.164):

$$\delta e = \oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot dS) \left( e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} \quad (3.164)$$

Sendo assim, substitui-se as equações (3.158), (3.161) e (3.164) na eq. (3.157) e chega-se a eq. (3.165):

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} + \dot{Q} - \oint_S (P dS) \cdot \mathbf{V} + \iiint_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{f} d\mathcal{V}) \cdot \mathbf{V} + \dot{W} = \\ \oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot dS) \left( e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.165)$$

A equação (3.165) é a equação da energia em sua forma integral cuja a origem é a primeira lei da termodinâmica. Sobre esta equação nos termos que são integrais de



superfície, terceiro termo a esquerda da igualdade e primeiro termo a direita da igualdade aplica-se o teorema da divergência, eq. (3.85) e obtém-se a eq. (3.166):

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\rho d\mathcal{V} + \dot{Q} - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (P\mathbf{V}) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} (\rho\mathbf{f}d\mathcal{V}) \cdot \mathbf{V} + \dot{W} = \\ \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] d\mathcal{V} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.166)$$

A equação (3.166) apresenta todos os termos como integrais de volume sobre um mesmo volume de controle  $\mathcal{V}$ , com exceção dos termos  $\dot{Q}$  e  $\dot{W}$ , definindo os mesmos como integrais de volume conforme eq. (3.167) e (3.168):

$$\dot{Q} = \iiint_{\mathcal{V}} \dot{Q}' d\mathcal{V} \quad (3.167)$$

onde  $\dot{Q}'$  é a variação de calor por unidade de volume.

$$\dot{W} = \iiint_{\mathcal{V}} \dot{W}' d\mathcal{V} \quad (3.168)$$

onde  $\dot{W}'$  é a variação de trabalho das forças viscosas por unidade de volume.

Sobre a eq. (3.166) o último termo a direita da igualdade é realizado a permutação entre a derivada parcial com relação ao tempo e a integração, são substituídas as eq. (3.167) e (3.168) na eq. (3.166) e todos os termos são colocados a direita da igualdade. Logo, é possível juntar todos os integrandos em um único, dado que a integração de volume é sobre um mesmo volume de controle, conforme eq. (3.169):

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ -\dot{q}\rho - \dot{Q}' + \nabla \cdot (P\mathbf{V}) - (\rho\mathbf{f}) \cdot \mathbf{V} - \dot{W}' \right. \\ \left. + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] \right\} d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad (3.169)$$

Conforme as mesmas explicações para justificar a obtenção da equação da continuidade na forma diferencial eq. (3.89) e a equação da conservação do momento eq. (3.126), o integrando da equação (3.169) é igualado a zero e os termos são rearranjados e chega-se à eq. (3.170):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = \rho\dot{q} - \nabla \cdot (P\mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.170)$$

A equação (3.170) é a equação da energia em sua forma diferencial. Dada as condições de contorno do problema que será estudado algumas simplificações podem ser realizadas na mesma. A primeira delas é de que a variação da energia cinética das partículas é muito menor do que a variação da energia interna. Com isso, os termos  $\frac{V^2}{2}$  são considerados nulos. Logo, chega-se à eq. (3.171):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = \rho \dot{q} - \nabla \cdot (P \mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.171)$$

Aplica-se a eq. (3.98) no segundo termo a esquerda da eq. (3.171) e realiza-se no primeiro termo a esquerda da igualdade a derivada parcial em relação ao tempo nos dois escalares e chega-se à eq. (3.172):

$$e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + (\rho \mathbf{V}) \cdot \nabla e = \rho \dot{q} - \nabla \cdot (P \mathbf{V}) + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.172)$$

Agrupando-se o primeiro e terceiro termo da eq. (3.172) a esquerda da igualdade e aplica-se a eq. (3.98) no segundo termo a direita da igualdade chega-se à eq. (3.173):

$$e \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + (\rho \mathbf{V}) \cdot \nabla e = \rho \dot{q} - P \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla P + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.173)$$

Observa-se que o termo entre colchetes possui a mesma expressão da equação da continuidade para o caso de um fluido compressível, eq. (3.89). O que implica que este termo é nulo. Uma segunda simplificação surge da hipótese que o fluido é incompressível, com a posse desta o segundo termo a direita da igualdade também é nulo, eq. (3.100). Com isso, chega-se eq. (3.178):

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla e \right) = \rho \dot{q} - \mathbf{V} \cdot \nabla P + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.174)$$

Para dar continuidade à solução do problema de fechamento das equações e simplificação da equação da energia é necessário assumir mais uma hipótese sobre o fluido. Assume-se que trata-se de um gás perfeito, com esta hipótese duas equações podem ser adicionadas ao sistema. A primeira delas é a equação de estado de um gás perfeito, eq. (3.175), (ANDERSON, 2010):

$$P = \rho RT \quad (3.175)$$

onde  $R$  é a constante universal do gases.

A segunda destas equações advém de que da aproximação de Boussinesq é possível assumir que as capacidades caloríficas à pressão constante e à volume constante de um gás ideal ideal podem ser similares (TRITTON, 2012), eq. (3.176):

$$c_v \approx c_p \quad (3.176)$$

onde  $c_p$  é o calor específico de um gás ideal a pressão constante e  $c_v$  é o calor específico de um gás ideal a volume constante.

Com isso, a energia interna de um gás perfeito, com a aproximação de Boussinesq, pode ser escrita, conforme eq. (3.177):

$$e = c_v T \approx c_p T \quad (3.177)$$

Assumindo que a variação da energia interna se dá a pressão constante substitui-se a eq. (3.177) na eq. (3.174). Adicionalmente, o segundo termo a direita da igualdade da eq. (3.174), o qual contempla o divergente da pressão é nulo, ao se considerar que a variação de energia se dá a pressão constante. Logo, chega-se à eq. (3.178):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \rho \dot{q} + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.178)$$

A forças de campo, quanto à variação da energia interna dos elementos de fluido são desprezíveis. Pois, a única força de campo que será considerada é a gravidade a qual não possui significância quanto alteração da temperatura para o exemplo que será aplicado o sistema. Portanto o segundo termo a direita da igualdade da eq. (3.178) é considerado nulo e chega-se à eq. (3.179):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \rho \dot{q} + \dot{Q}' + \dot{W}' \quad (3.179)$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento da equação da energia será obtida a expressão para a variação de trabalho das forças viscosas por unidade de volume  $\dot{W}'$ .

A variação das forças viscosas por unidade de volume se dá em linha gerais pelo divergente do produto do campo de velocidade com as tensões viscosas, eq. (3.180), (ANDERSON, 2010):

$$\dot{W}' = \nabla \cdot [V_i (\tau_{ii} + \tau_{ij})] \quad (3.180)$$

onde  $V_i$  são as componentes do campo de velocidades,  $\tau_{ii}$  são as tensões normais e  $\tau_{ij}$  são as tensões de cisalhamento. Logo, expandindo-se a eq. (3.180), chega-se à eq. (3.181)

$$\begin{aligned} \dot{W}' = & \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(u\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.181)$$

Dado que o escoamento é bidimensional e incompressível, conforme eq. (3.135) o terceiro e do sexto ao nono termo a direita da igualdade da eq. (3.181), são nulos. Com isso, chega-se à eq. (3.182):

$$\dot{W}' = \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \quad (3.182)$$

Utilizando-se da hipótese de escoamento incompressível as eq. (3.136) e (3.137) assumem a forma das pelas eq. (3.183) e (3.184):

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.183)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.184)$$

Logo, a soma das equações (3.183) e (3.184) podem ser representadas como a eq. (3.185):

$$\mathbf{T} = \tau_{xx} + \tau_{yy} = 2\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.185)$$

Observa-se por fim, que a variação do trabalho das forças viscosas diz respeito a contribuição da taxa de variação de velocidade. No entanto, já foi assumido, inicialmente, para dedução do lado esquerdo da igualdade da equação da energia, que a contribuição do termo na derivada total da variação da energia cinética é irrelevante. Logo, pelo mesmo motivo, contribuição da variação da velocidade, a contribuição deste termo é considerado irrelevante. Com isso, assume-se que:

$$\dot{W}' = 0 \quad (3.186)$$

Substituindo a eq. (3.186) na eq. (3.179), chega-se à eq. (3.187):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \rho \dot{q} + \dot{Q}' \quad (3.187)$$

Por último, é necessário deduzir um expressão para a variação de calor por unidade de volume  $\dot{Q}'$ . Aos moldes do desenvolvimento da expressão para as tensões de cisalhamento a taxa de variação de calor por unidade de área é proporcional ao gradiente de temperatura,  $\dot{q}_y \propto \nabla T$ , e a constante de proporcionalidade é definida como condutividade térmica  $\kappa$ . Logo, a integração em toda a superfície do volume de controle é dada pela eq. (3.188):

$$\dot{Q} = \iint_S \kappa \nabla T \cdot dS \quad (3.188)$$

Aplica-se o teorema da divergência, eq. (3.85), na eq. (3.188) e chega-se à eq. (3.189):

$$\dot{Q} = \iiint_V \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV \quad (3.189)$$

Da definição da taxa de variação de calor por unidade de volume eq. (3.167) e com o resultado obtido na eq. (3.189), chega-se na eq. (3.190):

$$\dot{Q}' = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.190)$$

Expande-se a eq. (3.190) em coordenadas cartesianas em um domínio bidimensional e chega-se na eq. (3.191):

$$\dot{Q}' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.191)$$

Assume-se que a condutividade térmica é constante em todo domínio espacial e com base na eq. (3.191), chega-se à eq. (3.192):

$$\dot{Q}' = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.192)$$

Substituindo a eq. (3.192) na eq. (3.187), chega-se na eq. (3.193):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \rho \dot{q} + \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.193)$$

A taxa de adição de calor para o caso do problema a ser estudada é proporcional ao módulo quadrado da amplitude do laser. Logo, a taxa de adição de calor  $\dot{q}$  é definida como:

$$\dot{q} = |V|^2 \quad (3.194)$$

onde  $V$  é a amplitude do laser.

Substituindo a eq. (3.194) na eq. (3.193), chega-se à eq. (3.195):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho |V|^2 \quad (3.195)$$

As equações (3.103), (3.151), (3.156) e (3.195), são as equações bidimensionais, não estacionárias, incompressíveis e dimensionais que regem o fluido que será estudado. Para resolução das mesmas é necessário, em primeiro lugar, aplicar a técnica de adimensionalização que será demonstrada na seção 3.2.4.

### 3.2.4 Adimensionalização das Equações de Navier-Stokes

O conjunto de equações (3.103), (3.151), (3.156) e (3.195) que será adimensionalizado é repetido a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.103)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.151)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g T + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.156)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho |V|^2 \quad (3.195)$$

Será realizado uma mudança de variável para facilitar o entendimento do desenvolvimento. Logo, as variáveis dimensionais serão adicionadas o sobrescrito '. Logo, as equações (3.103), (3.151), (3.156) e (3.195) assumem a forma das eq. (3.196) a eq. (3.199):

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (3.196)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \mathbf{V}' \cdot \nabla u' \right) = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (3.197)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \mathbf{V}' \cdot \nabla v' \right) = -\frac{\partial P'}{\partial y'} + \rho_0 g T + \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \quad (3.198)$$

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{V}' \cdot \nabla T' \right) = \kappa \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) + \rho_0 |V|^2 \quad (3.199)$$

O termo das forças de campo da eq. (3.198) dependem da variação da temperatura, portanto a mesma é uma entrada desta equação. Logo, assume-se que este termo já é adimensional.

Para obtenção das equações linearizadas é necessário realizar a adimensionalização das variáveis do problema. A seguir são apresentadas as adimensionalizações adotadas para substituição nas equações (3.196), (3.197), (3.198) e (3.199).

$$u = \frac{u'}{U} \quad (3.200)$$

onde  $U$  é a velocidade característica.

$$v = \frac{v'}{U} \quad (3.201)$$

$$x = \frac{x'}{L} \quad (3.202)$$

onde  $L$  é o comprimento característico.

$$y = \frac{y'}{L} \quad (3.203)$$

$$t = \frac{t' U}{L} \quad (3.204)$$

$$T = \frac{T'}{T_c} \quad (3.205)$$

onde  $T_c$  é a temperatura característica.

$$P = \frac{P'}{\rho_0 U^2} \quad (3.206)$$

$$|V|^2 = \frac{|V|^2}{\beta V_c^2} \quad (3.207)$$

onde  $\beta$  é a absorvidade e  $V_c$  é a amplitude do feixe de laser.

### 3.2.4.1 Adimensionalização da equação da continuidade

Para obtenção da equação da continuidade em sua forma adimensional, utiliza-se das eq. (3.200) a eq. (3.203). Com estas equações são obtidas as derivações adimensionais (3.208) e (3.209):

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = U \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{L} = \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.208)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = U \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{L} = \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.209)$$

As equações (3.208) e (3.209) são substituídas na eq. (3.196) e chega-se à eq. (3.210):

$$\frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.210)$$

A equação (3.210) pode ser simplificada isolando os termos constantes e chega-se à eq. (3.211):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.211)$$

A equação (3.211) é a equação da continuidade em sua forma adimensional, a qual será utilizada para obtenção da solução do problema.

### 3.2.4.2 Adimensionalização das equações de conservação do momento

Para obtenção das equações da conservação do momento em sua forma adimensional será demonstrado o desenvolvimento sobre a eq. (3.198) e por similaridade será apresentado o resultado da eq. (3.197). Para tanto, utiliza-se das eq. (3.200) a eq. (3.206). Com estas equações são obtidas as derivações adimensionais eq. (3.212) a eq. (3.216):

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} = \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = U \frac{\partial v}{\partial t} \frac{U}{L} = \frac{U^2}{L} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.212)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial y'} = \frac{\partial P'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = \rho_0 U^2 \frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{L} = \frac{\rho_0 U^2}{L} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.213)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = U \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{L} = \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.214)$$



$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U \partial v}{L \partial x} \right) \frac{1}{L} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.215)$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U \partial v}{L \partial y} \right) \frac{1}{L} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.216)$$

Substituindo as eq. (3.212) a eq. (3.216) na eq. (3.198), chega-se na eq. (3.217):

$$\rho_0 \left( \frac{U^2}{L} \frac{\partial v}{\partial t} + Uu \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial x} + Uv \frac{U}{L} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\rho_0 U^2}{L} \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g T + \mu \frac{U}{L^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.217)$$

Os termos constantes à esquerda da igualdade da eq. (3.217) são isolados,  $\frac{\rho_0 U^2}{L}$ , e passam para a direita da igualdade, com isso chega-se à eq. (3.218):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{gL}{U^2} T + \frac{\mu}{\rho_0 LU} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.218)$$

Para dar continuidade dois números adimensionais são apresentados o número de Richardson (Ri), eq. (3.219), e o número de Reynolds (Re), eq. (3.220):

$$Ri \equiv \frac{gL}{U^2} \quad (3.219)$$

$$Re \equiv \frac{UL\rho_0}{\mu} \quad (3.220)$$

Substituindo as eq. (3.219) e eq. (3.220) na eq. (3.218), chega-se à eq. (3.221):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Ri T \quad (3.221)$$

A equação (3.221) é a equação da conservação do momento da componente vertical com aproximação de Boussinesq, adimensional, não estacionária e incompressível.

Para desenvolvimento da equação da conservação do momento da componente horizontal, o procedimento é similar ao da obtenção da eq. (3.221), com exceção que esta não possui forças de campo. Para tanto, utiliza-se das eq. (3.200) a eq. (3.206). Com estas equações são obtidas as derivações adimensionais eq. (3.222) a eq. (3.226):

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = U \frac{\partial u}{\partial t} \frac{U}{L} = \frac{U^2}{L} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.222)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial x'} = \frac{\partial P'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \rho_0 U^2 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{L} = \frac{\rho_0 U^2}{L} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.223)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = U \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{L} = \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.224)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1}{L} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.225)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{1}{L} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.226)$$

Substitui-se a eq. (3.208) e eq. (3.222) a eq. (3.226) na eq. (3.197). O resultado será similar ao encontrado na eq. (3.217), com exceção do termo da força de campo que neste caso é nulo. Logo, com a posse da definição do número de Reynolds, eq. (3.220), chega-se à eq. (3.227):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.227)$$

A equação (3.227) é a equação da conservação do momento da componente horizontal com aproximação de Boussinesq, adimensional, não estacionária e incompressível.

### 3.2.4.3 Adimensionalização da equação da energia

Para obtenção da equação da conservação da energia em sua forma adimensional, será demonstrado o desenvolvimento sobre a eq. (3.199). Para tanto, utiliza-se das eq. (3.200) a eq. (3.205). Com estas equações são obtidas as derivações adimensionais eq. (3.228) a eq. (3.232):

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial T'}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = T_c \frac{\partial T}{\partial t} \frac{U}{L} = \frac{T_c U}{L} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.228)$$

onde  $T_c$  é a temperatura característica.

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial T'}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = T_c \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{L} = \frac{T_c}{L} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.229)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{\partial T'}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = T_c \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{L} = \frac{T_c}{L} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.230)$$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_c}{L} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{1}{L} = \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.231)$$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \frac{\partial T}{\partial T'} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T_c}{L} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{1}{L} = \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.232)$$

Substituindo a eq. (3.228) a eq. (3.232) na eq. (3.199), chega-se à eq. (3.233):

$$\rho_0 c_p \left( \frac{T_c U}{L} \frac{\partial T}{\partial t} + u U \frac{\partial T}{\partial x} \frac{T_c}{L} + v U \frac{\partial T}{\partial y} \frac{T_c}{L} \right) = \kappa \left( \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta V_c^2 |V|^2 \quad (3.233)$$

Isolando os termos constantes a esquerda da eq. (3.233),  $\frac{\rho_0 c_p T_c U}{L}$ , para direita da igualdade, chega-se à eq. (3.234):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p L U} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta V_c^2 L}{c_p T_c U} |V|^2 \quad (3.234)$$

Para dar continuidade mais dois números adimensionais são apresentados o número de Stanton (St), eq. (3.235), e o número de Prandtl (Pr), eq. (3.236):

$$St \equiv \frac{\beta V_c^2 L}{c_p T_c U} \quad (3.235)$$

$$Pr \equiv \frac{c_p \rho_0}{\kappa} \quad (3.236)$$

Substituindo as eq.: (3.220), (3.235) e (3.236) na eq. (3.234) chega-se à eq. (3.237):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + St |V|^2 \quad (3.237)$$

A equação (3.237) é a equação da conservação da energia com aproximação de Boussinesq, adimensional, não estacionária e incompressível.

3.2.5 Equações de Navier-Stokes 2D com aproximação de Boussinesq, adimensionais, não estacionárias e incompressíveis com inclusão dos efeitos da cintilação.

As equações que regem a dinâmica dos fluidos em regime não-estacionário, incompressível com aproximação de Boussinesq são as equações N-S: (3.211), (3.221), (3.227) e (3.237). Tais equações são rerepresentadas a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.211)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + RiT \quad (3.221)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.227)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \quad (3.237)$$

Para adicionar o efeito da cintilação no modelo assume-se que os campos são dependentes de um fator  $\delta$  o qual é decomposto em séries de potências conforme estabelecido na eq. (3.238):

$$f(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n \quad (3.238)$$

Logo, os campos de temperatura, pressão e velocidades são escritos conforme eq. (3.239) a eq. (3.242):

$$u(x, y, t, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) \delta^n \quad (3.239)$$

$$v(x, y, t, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, y, t) \delta^n \quad (3.240)$$

$$T(x, y, t, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x, y, t) \delta^n \quad (3.241)$$

$$P(x, y, t, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y, t) \delta^n \quad (3.242)$$

Assume-se que apenas os termos de ordem zero e primeira são relevantes, com isso as eq. (3.239) a eq.(3.242) são simplificadas e assumem a forma dada pelas eq. (3.243) a eq. (3.246):

$$u(x, y, t, \delta) = u_0(x, y, t) + \delta u_1(x, y, t) \quad (3.243)$$

$$v(x, y, t, \delta) = v_0(x, y, t) + \delta v_1(x, y, t) \quad (3.244)$$

$$T(x, y, t, \delta) = T_0(x, y, t) + \delta T_1(x, y, t) \quad (3.245)$$

$$P(x, y, t, \delta) = P_0(x, y, t) + \delta P_1(x, y, t) \quad (3.246)$$

Dado que os demais termos são coeficientes da expansão em série de potência da variável  $\delta$  todos os outros termos em (3.243), (3.244), (3.245) e (3.246) são  $O(1)$ .

Assim, substituindo as eq. (3.243) e (3.244) na eq. (3.211), chega-se à eq. (3.247):

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_0(x, y, t) + \delta u_1(x, y, t)] + \frac{\partial}{\partial y} [v_0(x, y, t) + \delta v_1(x, y, t)] = 0 \quad (3.247)$$

Separando os termos que possuem o fator delta em comum chega-se na eq. (3.248):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.248)$$

A equação (3.248) pode ser separada em duas equações dado que  $\delta$  é diferente de zero e o mesmo estabelece uma diferença de ordem de grandeza quanto aos termos que são multiplicados, daqueles que não o são. Com isso, chega-se a duas equações para continuidade, eq. (3.249) e eq. (3.250):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (3.249)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.250)$$

Substituindo as eq. (3.243) a (3.246) na eq. (3.221) chega-se na eq. (3.251). Por simplificação da notação as variáveis independentes das séries de potência são omitidas:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(v_0 + \delta v_1)}{\partial t} + (u_0 + \delta u_1) \frac{\partial(v_0 + \delta v_1)}{\partial x} + (v_0 + \delta v_1) \frac{\partial(v_0 + \delta v_1)}{\partial y} = \\ & - \frac{\partial(P_0 + \delta P_1)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2(v_0 + \delta v_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(v_0 + \delta v_1)}{\partial y^2} \right] + Ri(T_0 + \delta T_1) \end{aligned} \quad (3.251)$$

Realizando as diferenciações e separando os termos com base na potência de  $\delta$  na eq. (3.251) chega-se à eq. (3.252):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \delta^2 \left( u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 + \delta \left[ - \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + RiT_1 \right] \end{aligned} \quad (3.252)$$

Observa-se que a eq. (3.252) possui termos de segunda ordem os quais, por simplificação da série de potência com relação a  $\delta$  não são relevantes. Logo, a eq. (3.252) assume a forma dada pela eq. (3.253):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 + \delta \left[ - \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + RiT_1 \right] \end{aligned} \quad (3.253)$$

Separa-se os termos da eq. (3.253) com base na série de potência em relação a  $\delta$ . Com isso, chega-se à uma equação diferencial parcial de ordem zero, eq. (3.254), e outra de ordem um, eq. (3.255):

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 \quad (3.254)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = - \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + RiT_1 \quad (3.255)$$

O desenvolvimento das equações da conservação do momento na coordenada horizontal são similares aos para obtenção das eq. (3.254) e eq. (3.255).

Substitui-se as eq. (3.243) a eq. (3.246) na eq. (3.227) chega-se na eq. (3.256). Por simplificação da notação, as variáveis independentes das série de potência são omitidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_0 + \delta u_1)}{\partial t} + (u_0 + \delta u_1) \frac{\partial(u_0 + \delta u_1)}{\partial x} + (v_0 + \delta v_1) \frac{\partial(u_0 + \delta u_1)}{\partial y} = \\ - \frac{\partial(P_0 + \delta P_1)}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2(u_0 + \delta u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_0 + \delta u_1)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.256)$$

Realiza-se as diferenciações e separa-se os termos com base na potência de  $\delta$  na eq. (3.256) e chega-se na eq. (3.257):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\
+ \delta^2 \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \delta \left[ -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.257}$$

Observa-se que na eq. (3.257) há termos de segunda ordem os quais, por simplificação da série de potência com relação a  $\delta$  devem ser negligenciados. Logo, a eq. (3.257) assume a forma dada pela eq. (3.258):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \\
& -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \delta \left[ -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.258}$$

Os termos da eq. (3.258) são separados com base na série de potência em relação a  $\delta$ . Com isso, chega-se a uma equação diferencial parcial de ordem zero, eq. (3.259), e outra de ordem um, eq. (3.260):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \tag{3.259}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \tag{3.260}$$

O procedimento para obtenção das equações da energia é similar. Substitui-se as eq. (3.243) a (3.246) na eq. (3.237) e chega-se na eq. (3.261). Por simplificação da notação, as variáveis independentes da série de potência são omitidas:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(T_0 + \delta T_1)}{\partial t} + (u_0 + \delta u_1) \frac{\partial(T_0 + \delta T_1)}{\partial x} + (v_0 + \delta v_1) \frac{\partial(T_0 + \delta T_1)}{\partial y} = \\
& \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2(T_0 + \delta T_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(T_0 + \delta T_1)}{\partial y^2} \right) + St|V|^2
\end{aligned} \tag{3.261}$$

Realiza-se as diferenciações e separa-se os termos com base nas potências de  $\delta$  na eq. (3.261) chega-se na eq. (3.262):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \\
+ \delta^2 \left( u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) &= \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 + \delta \left[ \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.262}$$

Conforme já explicado anterior para as equações de conservação do momento a eq. (3.262), também possui termos de segunda ordem com relação a variável  $\delta$  os quais pelos mesmos motivos já apresentados serão desconsiderados. Com isso, chega-se na eq. (3.263):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \\ = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 + \delta \left[ \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.263)$$

Os termos da eq. (3.263) são separados com base na série de potência em relação a  $\delta$ . Com isso, chega-se a uma equação diferencial parcial de ordem zero, eq. (3.264), e outra de ordem um, eq. (3.265):

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \quad (3.264)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (3.265)$$

Após este desenvolvimento chega-se a dois conjuntos de equações que regem a dinâmica dos fluidos. Um que estabelece como se desenvolve o escoamento médio dado pelas eq. (3.249), eq. (3.254), eq. (3.259) e eq. (3.264):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (3.249)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 \quad (3.254)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.259)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \quad (3.264)$$

Um segundo conjunto de equações que estabelece como se desenvolve as flutuações de ordem. Tal conjunto é dados pelas eq. (3.250), eq. (3.255), eq. (3.260), (3.265):



$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.250)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + RiT_1 \quad (3.255)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (3.260)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (3.265)$$

Este conjunto de oito equações diferenciais parciais (EDP) são as equações de Navier-Stokes 2D com aproximação de Boussinesq, adimensionais, não estacionárias e incompressíveis, estabelecendo que apenas a primeira ordem das flutuações do escoamento são relevantes. No entanto, mesmo com todas estas simplificações tal sistema não possui solução analítica. Logo, serão utilizados métodos numéricos para se obter as soluções deste sistema os quais serão apresentados em seção específica, seção 3.3.

### 3.2.6 Turbulência óptica

Devido ao fenômeno de cintilação, a variação do índice de refração da atmosfera é tratada como um processo aleatório. Sendo assim, o modelo utilizado nesta solução, propõe representar estatisticamente a primeira ordem das flutuações de temperatura.

A cintilação é um fenômeno relacionado com variações na intensidade da fonte de luz causadas por distorções de fase no espaço entre o observador e a fonte de luz. A distorção de fase pode ser considerada como a turbulência atmosférica (ANDREWS; PHILLIPS, 2005).

A cintilação é uma parte essencial da interação fluido-laser. Esta é consequência das alterações localizadas do índice de refração do meio. Estas alterações são originadas, principalmente, por alterações no campo escalar de temperatura. A cintilação poderá ser incorporada ao modelo feixe laser-fluido utilizando a metodologia da tela de fase, conforme descrito em Harding et al. (1999), Beghi et al. (2008b), Sriram e Kearney (2007), Roggemann et al. (1996), Assémat et al. (2006), Herman e Strugala (1990), Lane et al. (1992), Jakobsson (1996), Welsh e Base (1997).

O principal desafio do modelo de telas de fase é gerar realizações individuais de um processo aleatório. Este trabalho é baseado na geração de telas de fase por séries

de Fourier. Para tanto assume-se que as flutuações de temperatura são função de uma transformada de Fourier, cuja representação integral é dada pela eq. (3.266):

$$T_1(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.266)$$

onde  $F(k_x, k_y)$  é uma função que representa a representação no espaço dual da fase. Cabe destacar,  $T_1(x, y)$  é a representação de um processo aleatório o qual possui uma densidade de potência dada por  $\mathcal{T}_1(k_x, k_y)$ . Dado que a metodologia de tela de fase se dá em domínio bidimensional, a relação entre as funções  $T_1(x, y)$  e  $\mathcal{T}_1(k_x, k_y)$  é estabelecida pelo teorema de Parseval, conforme eq. (3.267):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T_1(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_1(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (3.267)$$

A justificativa de se utilizar a transformada de Fourier é com o objetivo de assumir que a mesma pode ser representada por uma representação em forma discreta e com isso, utilizar os algoritmos desenvolvidos de FFT e obter de forma numérica o resultado da eq. (3.266). Logo, esta equação assume a forma dada pela eq. (3.268):

$$T_1(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i(k_{xm}x + k_{yn}y)} \quad (3.268)$$

onde  $k_{xm}$  e  $k_{yn}$  são os números de onda discretizados nas direções transversais.

Para que a eq. (3.268) represente o sinal contínuo dado pela eq. (3.266) o mesmo deve obedecer o critério de Nyquist, dado pela eq. (3.269):

$$f_s \geq 2f_m \quad (3.269)$$

onde  $f_s$  é a frequência de amostragem e  $f_m$  é a maior frequência do sinal. A frequência de amostragem do sinal é dada com base no espaçamento da malha. Dado que o domínio é bidimensional, a frequência de amostragem é dada pela eq. (3.270):

$$f_s = \min\left(\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y}\right) \quad (3.270)$$

onde  $\Delta x$  é o espaçamento da malha horizontal e  $\Delta y$  é o espaçamento da malha vertical.

Substitui-se a eq. (3.270) na eq. (3.269) e chega-se na eq. (3.271):

$$f_{m_{max}} = \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y}\right) \quad (3.271)$$

onde  $f_{m_{max}}$  é a máxima frequência do sinal representado. Logo, até o valor dado pela eq. (3.271) a eq. (3.268) de um sinal discretizado representa o sinal dado pela eq. (3.266) para

um sinal contínuo. Após este valor inicia-se o fenômeno de *aliasing* e já não é possível representar o sinal dado pela eq. (3.268).

Como já informado anteriormente, as flutuações da temperatura possuem uma variação aleatória. Logo, utiliza-se do teorema do limite central para determinar os coeficientes  $c_{k_{xm}, k_{yn}}$ . Com isto, estes coeficientes possuem uma distribuição Gaussiana, com suas partes reais e imaginária ambas independentes, médias iguais a zero, variâncias iguais e covariância igual a zero (COLES et al., 1995). Logo, a variância é dada pela eq. (3.272):

$$\sigma^2 = \langle |c_{k_{xm}, k_{yn}}|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn}) \Delta k_{xm} \Delta k_{yn} \quad (3.272)$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão.

Como para o problema deste trabalho a grade é igualmente espaçada  $\Delta k_{xm}$  e  $\Delta k_{yn}$  são dados pelas eq. (3.273) e eq. (3.274):

$$\Delta k_{xm} = \frac{2\pi}{L_x} \quad (3.273)$$

$$\Delta k_{yn} = \frac{2\pi}{L_y} \quad (3.274)$$

onde  $L_x$  é o comprimento da malha horizontal e  $L_y$  é o comprimento da malha vertical.

Substitui-se as eq. (3.273) e eq. (3.274) na eq. (3.272) e chega-se na eq. (3.275):

$$\sigma^2 = \langle |c_{k_{xm}, k_{yn}}|^2 \rangle = \frac{\mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn})}{L_x L_y} \quad (3.275)$$

Para obtenção dos coeficientes deve-se ter em mente que devido ao teorema do limite central é possível fazer uma simples transformação para obtenção destes. Dada uma variável que possui uma distribuição Gaussiana que neste caso é o coeficiente  $c_{k_{xm}, k_{yn}}$  através da eq. (3.276) é possível o relacionar com a distribuição normal padrão  $z$  que possui média  $\mu_e = 0$  e variância  $\sigma^2 = 1$ :

$$z = \frac{c_{k_{xm}, k_{yn}} - \mu}{\sigma} \quad (3.276)$$

Conforme estabelecido, a média das flutuações da variável  $c_{k_{xm}, k_{yn}}$  é zero,  $\mu = 0$ , e o desvio padrão é dado pela eq. (3.275). Com isso, substitui-se a eq. (3.275) na eq. (3.276) e chega-se que os coeficientes da série de Fourier são dados pela eq. (3.277):

$$c_{k_{xm}, k_{yn}} = z \sqrt{\frac{\mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn})}{L_x L_y}} \quad (3.277)$$

onde  $z$  é composto por:

$$z \equiv r(k_{xm}, k_{yn}) + ji(k_{xm}, k_{yn}) \quad (3.278)$$

onde as funções  $r(k_{xm}, k_{yn})$  e  $i(k_{xm}, k_{yn})$  são funções aleatórias com distribuição Gaussiana com média zero e variância unitária, ou seja, distribuição normal padronizada. Substitui-se a eq. (3.278) na eq. (3.277) e chega-se na eq. (3.279):

$$c_{k_{xm}, k_{yn}} = [r(k_{xm}, k_{yn}) + ji(k_{xm}, k_{yn})] \sqrt{\frac{\mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn})}{L_x L_y}} \quad (3.279)$$

A equação (3.279) estabelece como se obter os coeficientes da série de fourrier dada pela eq. (3.268). Restando apenas definir a função de distribuição de temperatura no espaço dual  $\mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn})$ .

Esta função trata-se de uma densidade espectral de potência que é oriunda da teoria de Kolmogorov. Kolmogorov estabeleceu por hipótese que as pequenas escalas de turbulência são isotrópicas. Logo, para valores de comprimentos característicos de vórtices inferiores  $l \ll L_0$  as propriedades do fluido são as mesmas, já para valores superiores a  $L_0$  as propriedades do escoamento dependem das condições de contorno e do escoamento médio (KOLMOGOROV, 1991).

A segunda hipótese que Kolmogorov estabeleceu foi que para esta escala do escoamento isotrópico, todo escoamento turbulento é similar estatisticamente a qual é determinada exclusivamente pela viscosidade cinemática  $\eta$  e a taxa de dissipação  $\varepsilon$  (KOLMOGOROV, 1991).

A última hipótese de Kolmogorov estabelece que para a faixa de  $\eta \ll l \ll L_0$ . O decaimento da energia dos vórtices maiores para os menores é apenas dependente da taxa de dissipação  $\varepsilon$ , onde  $\eta$  é definido como a escala de comprimento de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1991):

$$\eta \equiv \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.280)$$

A faixa que apenas é dependente da taxa de dissipação é conhecida como faixa inercial de energia. O trabalho de Kolmogorov estabeleceu que nesta região a distribuição da energia se dá através de uma função de segunda ordem da velocidade, função de estrutura, a qual por definição é a covariância da diferença da velocidade entre dois pontos (POPE, 2000). A qual para o caso do escoamento bidimensional é dada pela eq. (3.281):

$$D_{i,j}(\vec{r}, \vec{x}, t) = \langle [U_i(\vec{x} + \vec{r}, t) - U_i(\vec{x}, t)] [U_j(\vec{x} + \vec{r}, t) - U_j(\vec{x}, t)] \rangle \propto U^2 \quad (3.281)$$

onde  $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  e  $\vec{r} = r_x\vec{e}_1 + r_y\vec{e}_2 + r_z\vec{e}_3$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Logo, da definição de covariância, eq. (3.281), a distribuição de energia possui dimensão de velocidade ao quadrado. Portanto, em termos dimensionais onde  $U$  é dimensão de velocidade e  $E$  é a energia, tem-se que em termos dimensionais a energia é dada pela eq. (3.282):

$$E \propto U^2 \quad (3.282)$$

A escala de tempo é dada pela equação (3.283):

$$T \propto \frac{l}{U} \quad (3.283)$$

A taxa de dissipação de energia,  $\varepsilon$ , em termos de dimensão é o quanto de energia é dissipada por tempo, eq. (3.284):

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{T} \quad (3.284)$$

Portanto, na faixa inercial diante das três hipóteses estabelecidas por Kolmogorov, substitui-se a eq. (3.282) e eq. (3.283) na eq. (3.284) e chega-se à eq. (3.285):

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{T} \propto \frac{U^3}{l} \quad (3.285)$$

Portanto, para a faixa inercial, com base na eq. (3.285), chega-se à relação dada pela eq. (3.286):

$$U \propto (\varepsilon l)^{1/3} \quad (3.286)$$

Velocidade e temperatura são variáveis do escoamento que possuem, em termos estatísticos, comportamentos similares. Portanto, a análise realizada para velocidade é a mesma que para temperatura, com a diferença de uma constante de proporcionalidade para diferenciar em termos dimensionais a função de estrutura de velocidade para a função de estrutura da temperatura. Logo, em termos de distribuição de energia, considerando apenas a variação em termos de número de onda, com base nas eq. (3.286), (3.282) e (3.281), chega-se que para a faixa inercial a função de estrutura da temperatura é dada pela eq. (3.287):

$$D_T(r) = C_T^2 r^{2/3}, l_0 \ll r \ll L_0 \quad (3.287)$$

onde  $C_T^2$  é a constante de proporcionalidade da função de estrutura de temperatura  $D_T(r)$ .

Para um meio estatisticamente homogêneo e isotrópico, que é o caso da faixa inercial de Kolmogorov. A função de distribuição espectral de potência, PSD, é obtida através da eq. (3.288) (ANDREWS; PHILLIPS, 2005):

$$\Phi(k) = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} \frac{d}{dR} \left[ R^2 \frac{d}{dR} D(R) \right] dR \quad (3.288)$$

Logo, particularizando para o caso da PSD de temperatura substituindo a eq. (3.287) na eq. (3.288), chega-se na eq. (3.289):

$$\mathcal{T}_1(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2(k_x^2 + k_y^2)} \int_0^\infty \frac{\sin\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}r\right)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}r} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} D_T(r) \right] dr \quad (3.289)$$

A solução da eq. (3.289) é apresentada em Schmidt (2010):

$$\mathcal{T}_1(k_x, k_y) = \frac{0,033C_T^2}{(k_x^2 + k_y^2)^{11/6}} \quad (3.290)$$

Conforme já citado anteriormente, a PSD dada pela eq. (3.290), é obtida teoricamente e sua aplicação é apenas para a faixa inercial. Logo, a utilização desta é muito limitada. Com isso, modelos teórico experimentais foram desenvolvidos para contemplar a faixa de dissipação  $k \ll \frac{1}{l_0}$  e a faixa de baixa frequências,  $k \gg \frac{1}{L_0}$ . O modelo adotado neste trabalho é conhecido como PSD von Kármán modificado, cuja faixa espectral é  $0 \leq k < \infty$  é baseado na eq. (3.290) e é dado pela eq. (3.291):

$$\mathcal{T}_1(k_x, k_y) = 0,033C_T^2 \frac{e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_m^2}}}{(k_x^2 + k_y^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad (3.291)$$

onde  $k_m = \frac{5,93}{l_0}$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ,  $l_0$  é a escala interna de turbulência e  $L_0$  é a escala externa de turbulência.

A constante  $C_T$  é oriunda da função de covariância cujo o significado físico e medidas não são fáceis de ser obtidos. Com isso, são realizadas suposições para substituição deste pelo diâmetro de coerência atmosférica  $r_0$ . Em ANDREWS e Phillips (2005) é apresentado a aproximação algébrica para a função de estrutura da temperatura em função do diâmetro de coerência atmosférica  $r_0$ . Com isso, substituindo esta expressão na eq. (3.288), obtém-se a PSD von Kármán modificada em função de  $r_0$ , dada pela

eq. (3.292):

$$\mathcal{T}_1(k_x, k_y) = 0,49r_0^{-5/3} \frac{e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{k_m^2}}}{(k_x^2 + k_y^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad (3.292)$$

Estabelece-se que a distribuição espectral dada pela eq. (3.292), possui a mesma discretização dada pela eq. (3.268) e chega-se na eq. (3.293):

$$\mathcal{T}_1(k_{xm}, k_{yn}) = 0,49r_0^{-5/3} \frac{e^{-\frac{k_{xm}^2+k_{yn}^2}{k_m^2}}}{(k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad (3.293)$$

Substitui-se a eq. (3.293) na eq. (3.279), chega-se na equação dos coeficientes da transformada de Fourier, eq. (3.294):

$$c_{k_{xm}, k_{yn}} = (r(k_{xm}, k_{yn}) + ji(k_{xm}, k_{yn})) \sqrt{\frac{0,49r_0^{-5/3} e^{-\frac{k_{xm}^2+k_{yn}^2}{k_m^2}}}{L_x L_y (k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_0^2)^{11/6}}} \quad (3.294)$$

Substituindo a eq. (3.294) na eq. (3.268), a equação (3.295) é obtida:

$$T_1(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (r(k_{xm}, k_{yn}) + ji(k_{xm}, k_{yn})) \sqrt{\frac{0,49r_0^{-5/3} e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{k_m^2}}}{L_x L_y (k_x^2 + k_y^2 + k_0^2)^{11/6}}} e^{i(k_{xm}x+k_{yn}y)} \quad (3.295)$$

Para incorporar a turbulência na amplitude  $V$  do feixe de laser, devido às flutuações de temperatura, retorna-se a aproximação de Boussinesq, portanto há uma relação direta entre as flutuações de temperatura e a alteração do índice de refração. Logo, devido as flutuações de temperatura, dado o modelo de tela de fase, o meio é randomicamente não homogêneo. Com isso, é necessário a utilização das funções de Green para solução do problema. Utilizando-se o método de Rytov, a amplitude do campo elétrico é dada pela eq. (3.296), (SCHMIDT, 2010):

$$V(x, y) = V_p(x, y, z) e^{\psi(x,y)} \quad (3.296)$$

onde  $\psi$  é uma função complexa de perturbação de fase e  $v_p$  será apresentado posteriormente.

Conforme apresentado, para obtenção da equação paraxial, as alterações do campo elétrico são devido às alterações do índice de refração. Este por sua vez, em consequência da aproximação de Boussinesq é alterado exclusivamente pelas alterações

do campo de temperatura. Logo, a função  $\psi$  pode ser definida como as variações de temperatura e dependem do fator de cintilação. O que implica que a mesma é função das flutuações de temperatura.

Conforme estabelecido na eq. (3.245), as flutuações de temperatura são dependentes de um parâmetro  $\delta$ , arbitrário, até a sua primeira ordem. Com isso, assume-se para o modelo que a função de perturbação de fase complexa é dada pela eq. (3.297):

$$\psi(x, y) = j\delta T_1(x, y) \quad (3.297)$$

Substituindo a eq. (3.297) na eq. (3.296), chega-se na eq. (3.298):

$$V(x, y, z + \Delta z) = V_p(x, y, z)e^{j\delta T_1(x, y)} \quad (3.298)$$

onde  $V_p$  é a solução da equação paraxial dada pela eq. (3.75) e  $T_1$  é a solução da eq. (3.295).

### 3.3 Métodos numéricos de simulação

Conforme já apresentado, as equações de Navier-Stokes não são possíveis de serem resolvidas analiticamente para o caso deste problema. Com isso, a alternativa encontrada é a solução via métodos numéricos. A metodologia adotada neste trabalho foi introduzida, inicialmente, por Chorin (1967), atualmente conhecido como compressibilidade artificial. A motivação do desenvolvimento deste método, conhecido como compressibilidade artificial, é que diante da dificuldade para obtenção da solução numérica de escoamentos incompressíveis e não estacionários é necessário uma reestruturação das equações de Navier-Stokes para obtenção de uma solução aproximada. Nestes casos, a equação da continuidade não possui derivada temporal com isso a mesma é uma EDP parabólica, sendo que as demais equações são do tipo hiperbólico. Logo a solução por métodos explícitos torna-se inviável. Além disso, a relação entre o campo de pressão e de velocidade é desacoplada.

A metodologia de resolução deste sistema adotada foi a da compressibilidade artificial, a qual adiciona um termo de derivada temporal de pressão com um parâmetro de compressibilidade artificial na equação da continuidade (FERZIGER et al., 2020). Este termo na convergência tende a zero. Assim, a solução satisfaz as equações incompressíveis. Esta abordagem foi proposta primeiramente por Chorin (1967).

A metodologia apresentada por Chorin (1967) introduz um fator arbitrário de compressibilidade artificial  $\gamma$  e uma derivada temporal em uma escala conhecida como pseudo tempo. Logo, o conjunto de equações de Navier-Stokes já apresentado, (3.249), eq.



(3.254), eq. (3.259), eq. (3.264), eq. (3.250), eq. (3.255), eq. (3.260) e (3.265) assumem a forma das equações. Para o escoamento médio, eq. (3.299) a eq. (3.302):

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (3.299)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.300)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 \quad (3.301)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} + \frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \quad (3.302)$$

Já o conjunto de equações que rege as flutuações assume a forma das eq. (3.303) a eq. (3.306):

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.303)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (3.304)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + RiT_1 \quad (3.305)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (3.306)$$

Observa-se que nas equações (3.299) e (3.303) foi adicionado um termo de derivada no tempo da pressão na escala de tempo  $\tau$ , que é o pseudo-tempo, e o parâmetro  $\gamma$ , que é a compressibilidade artificial. Como consequência, as eq. (3.300) a (3.302) e (3.304) a (3.306) possuem dois termos de derivadas temporais, sendo um na escala do pseudo-tempo  $\tau$  e outro na escala de tempo físico  $t$ .

Para apresentação da metodologia de solução será desenvolvido o método com o conjunto de equações de (3.299) a (3.302), a solução para os campos de flutuações se dá de forma similar alterando-se apenas as derivadas espaciais.

O primeiro passo é isolar as derivadas do pseudo tempo da eq. (3.299) a eq. (3.302). Com isso, obtém-se as eq. (3.307) a (3.310):

$$\frac{\partial P_0}{\partial \tau} = -\gamma \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \quad (3.307)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\frac{\partial u_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.308)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} = -\frac{\partial v_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 \quad (3.309)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} = -\frac{\partial T_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \quad (3.310)$$

Para o conjunto de EDP, eq. (3.307) a eq. (3.310), pode ser obtida uma solução numérica através de métodos explícitos. Para simplificar a notação, os termos das derivadas espaciais serão aglutinados. Os pontos da malha são discretizados conforme eq. (3.311) e (3.312):

$$1 \leq i \leq N_x - 1 \quad (3.311)$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (3.312)$$

onde  $N_x$  é a quantidade de pontos na direção horizontal e  $N_y$  é a quantidade de pontos na direção vertical. Com isso, cada ponto da malha possui um conjunto de termos de derivadas espaciais que pode ser representado conforme eq. (3.313):

$$R_{i,j} \equiv \begin{pmatrix} -\gamma \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ -u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\ -u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + RiT_0 \\ -u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \right) + St|V|^2 \end{pmatrix} \quad (3.313)$$

Quanto às derivadas temporais é introduzido a variável generalizada  $\phi$ , dada pela eq. (3.314):

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} P_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (3.314)$$

Define-se a derivada com relação a  $t$  de  $\phi$  pela eq. (3.315):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.315)$$

Define-se a derivada com relação a  $\tau$  de  $\phi$  pela eq. (3.316):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial P_0}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \\ \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \\ \frac{\partial T_0}{\partial \tau} \end{pmatrix} \quad (3.316)$$

Substitui-se as eq.: (3.313), (3.315) e (3.316) no conjunto de equações (3.307) a (3.310) e chega-se que para cada par ordenado da malha  $(i, j)$  a equação matricial dada pela eq. (3.317):

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial t} + R_{i,j} \quad (3.317)$$

A discretização da malha com relação a  $t$  é realizada através de um Euler-forward, eq. (3.318), conforme apresentado em (FERZIGER et al., 2020):

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^n \approx \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.318)$$

onde o sobrescrito  $n$  refere-se à discretização com relação  $t$ , dada pela eq. (3.319):

$$t_{final} = n\Delta t \quad (3.319)$$

Um esquema de *Runge-Kutta* de quarta ordem, eq. (3.320), foi usado para obtenção da solução na escala do pseudo-tempo:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n,k+1/4} &= \phi_{i,j}^{n,k} + \frac{1}{4}\Delta\tau \left[ -\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n,k} + R_{i,j}^{n,k} \right] \\ \phi_{i,j}^{n,k+2/4} &= \phi_{i,j}^{n,k} + \frac{1}{3}\Delta\tau \left[ -\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n,k+1/4} + R_{i,j}^{n,k+1/4} \right] \\ \phi_{i,j}^{n,k+3/4} &= \phi_{i,j}^{n,k} + \frac{1}{2}\Delta\tau \left[ -\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n,k+2/4} + R_{i,j}^{n,k+2/4} \right] \\ \phi_{i,j}^{n,k+1} &= \phi_{i,j}^{n,k} + \Delta\tau \left[ -\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^{n,k+3/4} + R_{i,j}^{n,k+3/4} \right] \end{aligned} \quad (3.320)$$

onde o sobrescrito  $k$  refere-se às iterações no pseudo tempo.

A convergência do método se dá quando as derivadas temporais com relação a  $\tau$  tendem a zero, conforme eq. (3.321):

$$\max \left( \frac{\phi_{i,j}^{n,k+1} - \phi_{i,j}^{n,k}}{\Delta\tau} \right) < \varepsilon \quad (3.321)$$

onde  $\varepsilon$  em termos matemáticos é uma variável infinitesimal. Então, a eq. (3.317), dada eq. (3.321), assume a forma da eq. (3.322):

$$-\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial t} + R_{i,j} < \varepsilon \quad (3.322)$$

No limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  a eq. (3.322) assume a forma:

$$-\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial t} + R_{i,j} = 0 \quad (3.323)$$

A eq. (3.323) é a forma matricial do conjunto de equações eq. (3.249), eq. (3.254), eq. (3.259), eq. (3.264). Logo, em termos numéricos o  $\varepsilon$  deve ser um valor muito inferior às dimensões da malha. Para este trabalho, o valor utilizado para  $\varepsilon$  foi de  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Quanto às discretizações das derivadas espaciais as mesmas são realizadas conforme estabelecido em Ferziger et al. (2020), apresentadas nas eq. (3.324) a eq. (3.327):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.324)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} \quad (3.325)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.326)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.327)$$

As equações (3.324) a (3.327) são substituídas na eq. (3.313) para se obter a discretização espacial do sistema.

A implementação da integração numérica é realizada com a utilização do *software* Matlab através de licença fornecida pela USP.

Os parâmetros para estabilidade da solução foram: Quanto a compressibilidade artificial,  $\gamma$  eq. (3.328), conforme estabelecido em Kim e Menon (1999):

$$\gamma \approx 20 \quad (3.328)$$

O critério para dimensionamento de  $\Delta \tau$ , eq. (3.329), foi tomado por referência Louda et al. (2008):

$$\Delta \tau < 10^{-3} \quad (3.329)$$

O critério para discretização de  $\Delta t$ , eq. (3.330), foi obtido de Chorin (1967):

$$\Delta t \approx \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{U + \sqrt{U^2 + \gamma}} \quad (3.330)$$

As discretizações espaciais são baseadas em Akers e Reeger (2019), eq.

(3.331):

$$\Delta x = \Delta y = \frac{4\pi}{256} \approx 0,05 \quad (3.331)$$

Para análise da estabilidade da solução para o escoamento bidimensional dois números são estudados. O primeiro deles é o número de Courant o qual é dado pela eq.

(3.332):

$$\mu_c \equiv U \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.332)$$

onde  $U$  dado que as equações são não-lineares será o ponto de maior velocidade na malha.

O segundo número adimensional é o número de Neumann dado pela eq.

(3.333):

$$\nu_n \equiv A \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.333)$$

onde  $A$  é a constante que multiplica os termos difusivos. Logo, para as equações de conservação do momento, eq. (3.334):

$$A_m = \frac{1}{Re} \quad (3.334)$$

Para a equação da energia, eq. (3.335):

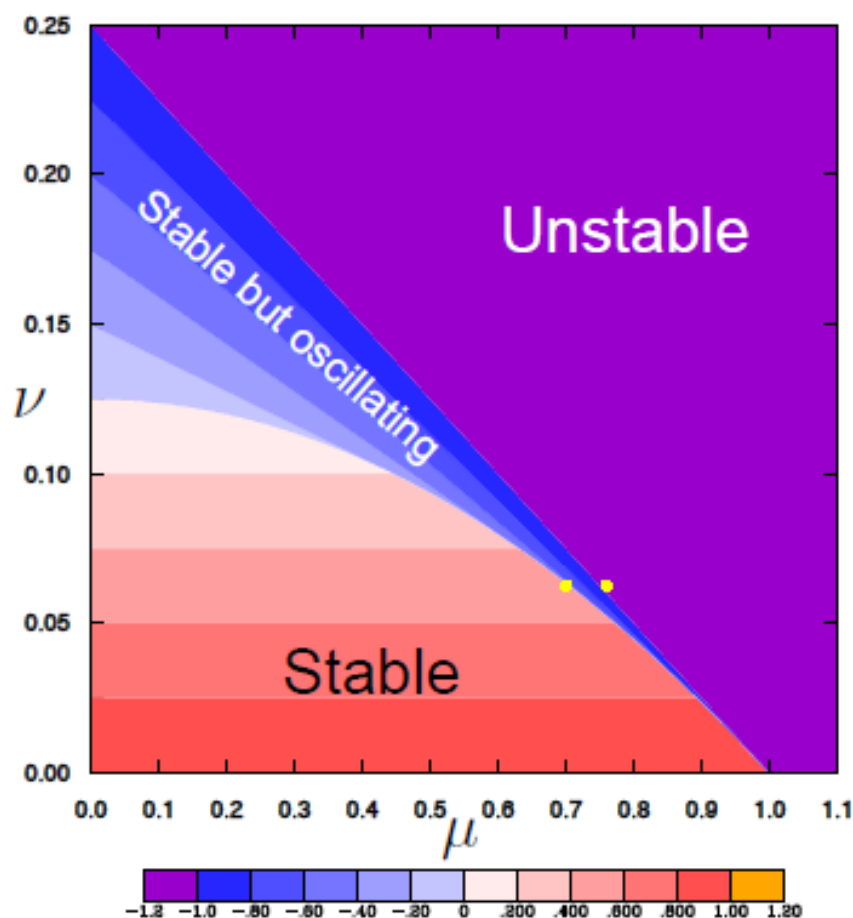
$$A_e = \frac{1}{PrRe} \quad (3.335)$$

Os números de Courant e Neuman devem ser obtidos em conjunto e, independente da discretização e método de integração, a tendência para obtenção de uma resposta estável é a mesma. A figura 4 apresenta o comportamento da estabilidade da resposta para a equação da advecção e difusão, eq. (3.336), em função de  $\mu_c$  e  $\nu_n$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.336)$$

onde  $c$  e  $A$  são constantes arbitrárias.

Figura 4 – Análise de estabilidade da solução da equação (3.336) em função do número de Courant,  $\mu_c$ , e do número de Neumann,  $\nu_n$ .



Fonte: Döös et al. (2022)

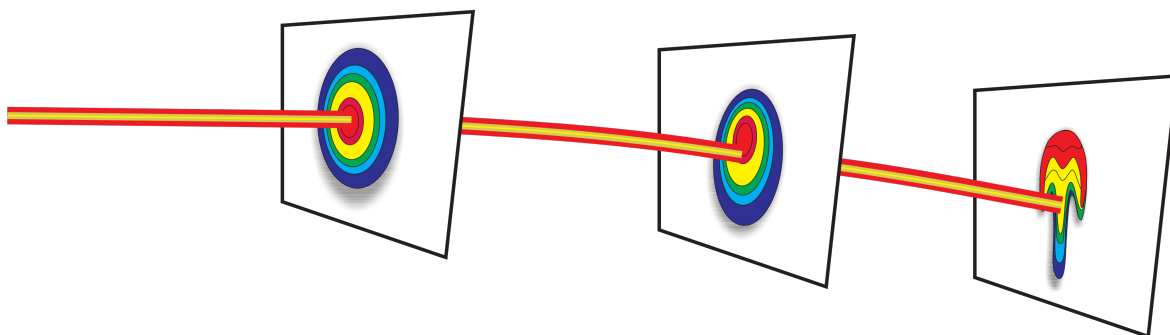
Observa-se na figura 4 que quanto menor o número de Neumann e de Courant mais estável é a solução. Para o caso das equações que são trabalhadas nesta solução o número de Neuman possui a mesma estrutura, ou seja, o mesmo é fixo.

Quanto ao número de Courant, como as condições iniciais para velocidade são nulas, inicialmente,  $\mu_c = 0$ . No entanto, o mesmo varia para cada passo de tempo de forma crescente, devido ao aumento da velocidade do escoamento gerado pela convecção. Logo, com base no comportamento da solução dada pela figura 4 o método adotado, para análise da estabilidade deste trabalho foi verificar para cada passo de tempo o comportamento da solução e o valor de  $\mu_c$  máximo da malha para aquele time step.

Com base nos critérios de convergência dados pelas eq. (3.328) a (3.333) as equações de Navier-Stokes são solucionadas e obtém-se um novo campo de temperatura médio e flutuações. Os novos campos de temperatura são usados para atualizar o índice de refração, considerando a eq. (3.80). A equação paraxial é resolvida no pseudo domínio espectral usando o algoritmo FFT (FRIGO; JOHNSON, 1998) e o *split-step Fourier method*.

Como resultado, a atualização da amplitude do feixe de laser é obtida ao longo da direção axial, com a atualização em  $\eta_f$  e o número de onda na direção axial  $k$ , (AKERS; REEGER, 2019). Um modelo esquemático deste sistema é mostrada na figura 5, sem considerar a cintilação. As fatias representam os pontos na direção axial onde as equações N-S são resolvidas na direção transversal, entre essas fatias este modelo aplica a equação paraxial e o método de tela de fase atualizando o índice de refração:

Figura 5 – Esquema do feixe de laser ao longo do eixo z, baseado nas eq. (3.299) a (3.302) e eq.(3.55).



Fonte: Morais et al. (2022)

As equações N-S são resolvidas considerando um domínio retangular computacional bidimensional,  $(x, y) \in (-2\pi, 2\pi) \times (-2\pi, 2\pi)$ . As condições de contorno são periódicas para todos os componentes  $u, v, P, T$ , tais condições foram baseadas na análise das condições de contorno apresentadas em Morrill (2018).

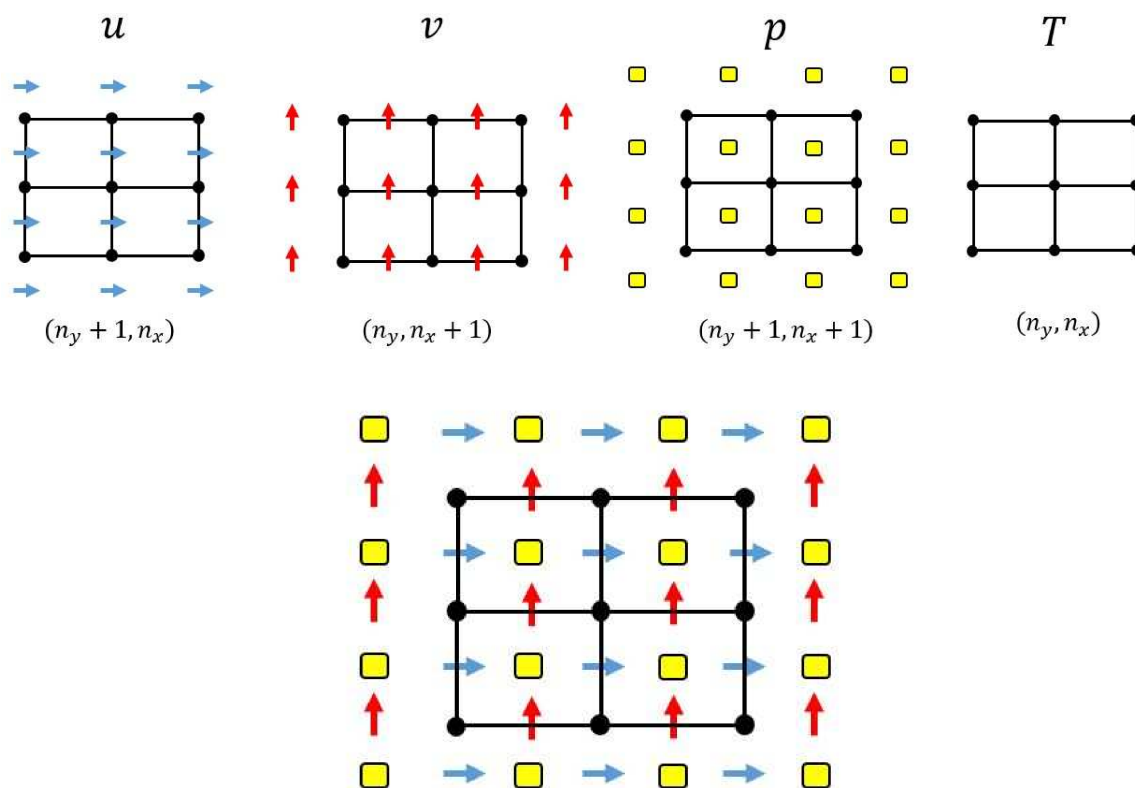
As condições iniciais são a equação do feixe de laser, eq. (3.81), o campo principal de temperatura é inicializado como  $T_0(x, y, z, 0) = 0$  e  $T_1(x, y, z, 0)$  é inicializado usando o método de tela de fase descrito na seção anterior. As velocidades são inicializadas como:

$$u_0(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z, 0) = u_1(x, y, z, 0) = v_1(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.337)$$

Um arranjo de grade escalonada foi implementado de acordo com a Fig. 6, as componentes de velocidade estão localizadas em pontos intermediários entre os nós da grade principal, as componentes de temperatura estão localizadas nos nós da grade principal e as componentes de pressão estão localizadas no centro do volume limitado pelas interfaces dos nós principais.

Para a grade, foi utilizada uma malha isotrópica bidimensional com domínio quadrangular. O tamanho do domínio foi mantido em um passo de espaço adimensional fixo de  $h$  e um passo de tempo fixo adimensional  $\Delta t$ .

Figura 6 – Grade escalonada. Onde os componentes da malha: setas azuis - velocidade  $u$ , setas vermelhas - velocidade  $v$ , pontos pretos - pressão escalar  $P$  e quadrados amarelos - temperatura  $T$ .



Fonte: Morais et al. (2022)

### 3.3.1 Desenvolvimento do software, dificuldades técnicas apresentadas e superadas

Inicialmente, para estabelecer qual a metodologia que seria utilizada para resolução das equações N-S foi-se aumentando o grau de dificuldade do equacionamento e utilizando-se do escoamento canônico, escoamento poiseuille, (ANDERSON, 2010) para validação do método e análise dos parâmetros de convergência do método da compressibilidade artificial. Iniciou-se com o acoplamento das equações de conservação do momento e da massa. Em seguida, aumentou-se o grau de dificuldade acoplando-se a equação da conservação da energia.

Uma das limitações observadas para a solução do sistema de N-S, após a obtenção dos parâmetros de convergência e o acoplamento de todo o sistema de equações: conservação da energia, conservação do momento e conservação da continuidade, foi o tempo de execução. O *solver* é  $O(n^4)$  pois trata-se de uma malha bidimensional e é necessário a evolução em dois passos de tempo, com isso, a solução em termos de custo computacional ficou dispendiosa, no entanto em termos de estabilidade numérica mostrou-se eficaz. Como o objetivo do trabalho era a obtenção de uma solução representativa da interação do laser com a atmosfera, este método de solução mostrou-se satisfatório,



mas fica evidente que otimizações são necessárias para obtenção da resposta de uma maneira mais rápida. As otimizações podem ser a alteração do método de solução ou a aplicação do paralelismo no *solver* já desenvolvido.

Quanto à solução da equação paraxial, o operador responsável pela alteração do formato do feixe de laser, para a simulação do efeito *thermal blooming* que é tratado como uma lente muito fina e não há dimensão com relação à variável de integração, que é a direção do eixo óptico. Com isso, para um aprimoramento do modelo é interessante que se considere a alteração do índice de refração com relação a evolução do eixo axial, o que aumenta a robustez do modelo.

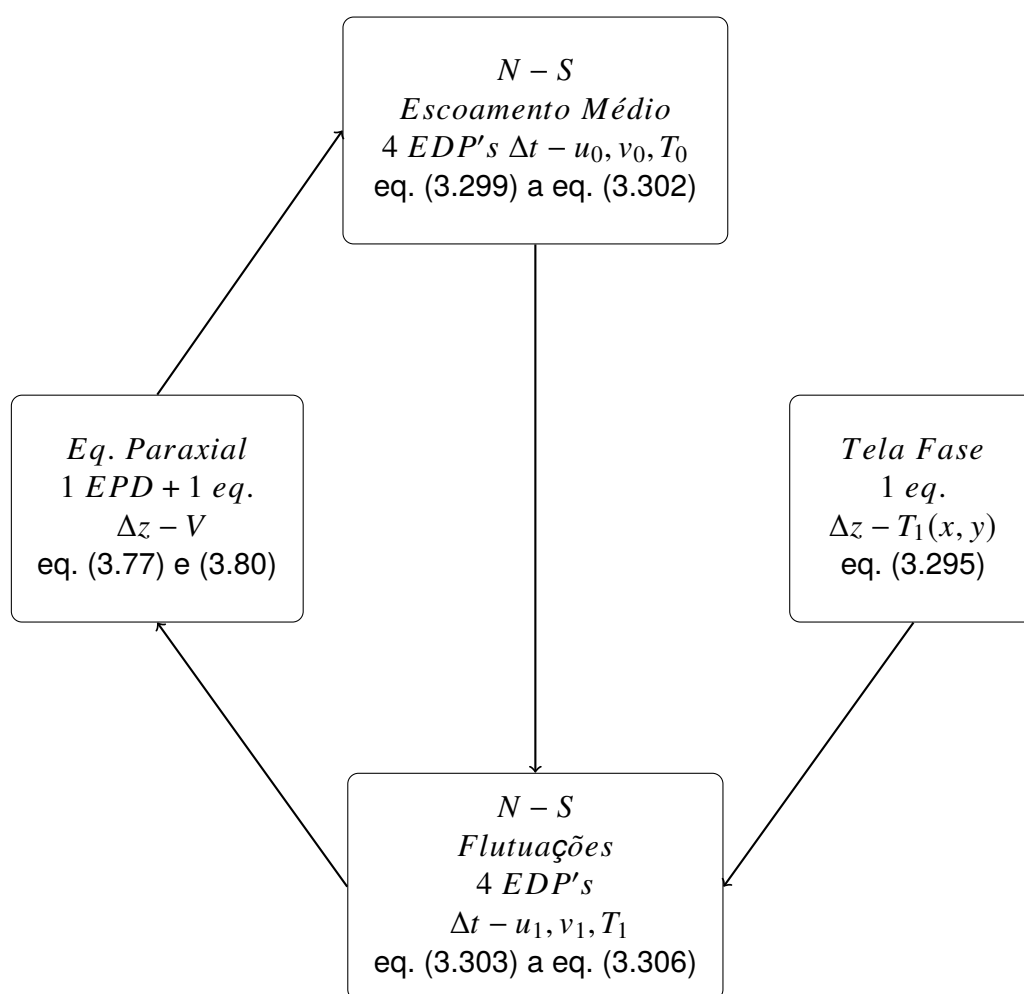
Quanto ao modelo de tela de fase, existem técnicas para geração da tela de fase turbulenta que não foram abordados neste desenvolvimento (CHARNOTSKII, 2019). Observa-se que há um aumento do custo computacional não significativo. No entanto, é necessário para a implementação e entendimento da sofisticação do modelo de uma análise teórica, a qual não foi realizada neste trabalho e pode ser a base para trabalhos futuros.

### 3.4 Conclusão do capítulo

Este capítulo apresentou a formulação da propagação de um feixe de laser na atmosfera com o efeito *thermal blooming* e a cintilação e a resolução numérica desta formulação. O algoritmo de solução apresentado neste capítulo pode ser melhor exemplificado via fluxograma apresentado na figura 7.

A seguir é apresentada uma descrição para o fluxograma contido na figura 7: inicialmente, as condições iniciais e de contorno são inseridas no conjunto de equações de N-S, eq. (3.299) a eq. (3.302), a saída deste sistema é a evolução temporal  $\Delta t$  das variáveis  $u_0, v_0, T_0$ ; em paralelo, o modelo de tela de fase é resolvido, eq. (3.295), para inclusão das flutuações de temperatura  $T_1$ ; em seguida, a evolução dos campos médios e de flutuações de temperatura são as condições iniciais do sistema N-S, (3.303) a eq. (3.306), para as flutuações e obtém-se como saída as variáveis de flutuação de primeira ordem  $u_1, v_1, T_1$  evoluídas de  $\Delta t$ ; por último, as atualizações da temperatura são inseridas na eq. (3.80) e obtém-se a atualização do índice de refração. Com a atualização do índice de refração resolve-se a eq. (3.77) e obtém-se a atualização da amplitude do feixe de laser de  $\Delta z$ , ao longo do eixo axial. Com esta nova amplitude reinicia-se o ciclo para obtenção de novos campos médios  $u_0, v_0, T_0$ .

Figura 7 – Fluxograma do modelo teórico-numérico apresentado para solução da propagação de um HEL na atmosfera incluindo os efeitos *thermal blooming* e cintilação.



Fonte: Autor da dissertação.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Introdução ao capítulo

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o *solver*, cujo modelo esquemático é dado pela figura 7. Para tornar evidentes os efeitos *thermal blooming* e cintilação são apresentados o desenvolvimento do *solver* de diferentes formas: acoplamento apenas do efeito *thermal blooming* com a convecção induzida; acoplamento do efeito *thermal blooming*, cintilação e convecção induzida; alteração das condições iniciais, turbulência, diâmetro do laser e temperatura do laser; alteração do fator de cintilação  $\delta$ .

### 4.2 Acoplamento do efeito *thermal blooming* com a convecção induzida

Inicialmente, com o objetivo de analisar o primeiro efeito o qual é determinístico, *thermal blooming*, e o seu acoplamento com os fenômenos fluidodinâmicos foram utilizadas as equações (3.295), (3.299) a (3.302). Pois neste caso, assume-se a hipótese de que o campo de temperatura não possui perturbações. Logo, a variável  $\delta$  é nula, assim os campos de velocidade temperatura e pressão assumem a seguinte forma:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) \quad (4.1)$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) \quad (4.2)$$

$$T(x, y, t) = T_0(x, y, t) \quad (4.3)$$

$$P(x, y, t) = P_0(x, y, t) \quad (4.4)$$

Sendo assim, espera-se que os fenômenos relativos à cintilação, como, por exemplo, borramento do laser, ou alterações do campo de temperaturas não simétricas não sejam observados nos resultados da propagação do feixe de laser.

O conjunto de números adimensionais  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Ri$  e  $St$  foram mantidos fixos para analisar a solução numérica fornecida pelo modelo no desenvolvimento da forma do feixe de laser ao longo do tempo. Como é possível observar na eq. (3.302), o número de *Stanton*,  $St$ , é o termo responsável por acoplar os dados da equação paraxial (3.55) com o conjunto da fluidodinâmica. Portanto, pode-se assumir que este representa a potência

do laser e o nível de interação entre o conjunto de equações de Maxwell com o conjunto de equações da dinâmica dos fluidos, equações de N-S. Já o número de Richardson,  $Ri$ , representa a relação entre a convecção natural e a convecção forçada, este termo é o responsável por acoplar a equação de conservação do momento na direção vertical com a equação da conservação da energia. O número de Reynolds,  $Re$  relaciona-se com o nível de perturbação do escoamento, observa-se que este termo está dividindo os termos difusivos das equações da conservação do momento, logo quanto maior for o seu valor menor será a influencia da difusão e, conseqüentemente, mais instável estará o escoamento. Por último, o número de Prandtl,  $Pr$ , o qual estabelece a razão da viscosidade cinemática e da difusividade térmica.

O número de Courant máximo que foi obtido, baseado na eq. (3.332), no ponto de maior velocidade do último time step foi de:

$$\mu_{c_{max}} = 0,44 \quad (4.5)$$

O número de Neuman obtido, baseado na eq. (3.333), foi de:

$$\nu_{n_{max}} = \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \approx 10^{-4} \quad (4.6)$$

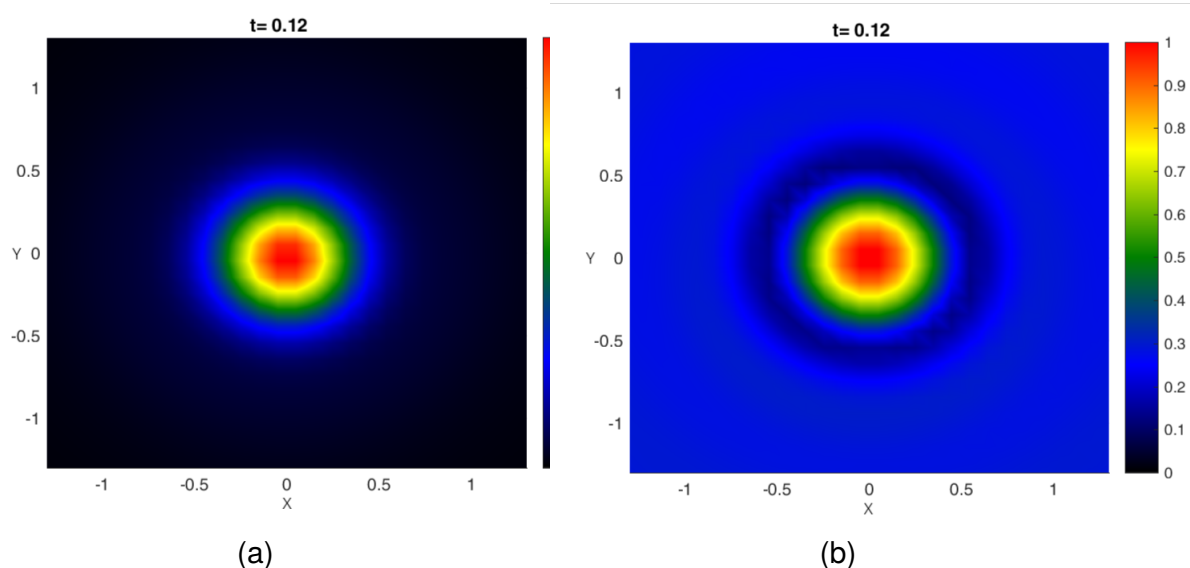
Os dados que foram utilizados para esta primeira simulação, para o conjunto de números adimensionais utilizados foram  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 1.e4$  e  $St = \frac{1}{30}$ . Para as fig. 8 a 10 as flutuações de temperatura são apresentadas em unidade dimensional, Kelvin,  $\eta_0 = 1,0003$ ,  $T_0 = 300K$ . Os espaçamento de malha utilizado para este caso foi de  $h = 0,09$ . Além disso, o espaçamento temporal foi de  $\Delta t = 8 \times 10^{-4}$ . As condições iniciais são quiescentes e o perfil do feixe de laser é dado pela eq. (3.81).

Para uma exemplificação da potência de um laser, baseado nestes números adimensionais, deve-se ter atenção aos valores dados para os números de Richardson e Stanton. Sendo considerado um laser com um diâmetro de feixe de um centímetro,  $L = 1 \text{ cm}$ , uma absorvidade para uma dia claro da ordem de  $\beta = 10^{-8} \text{ Km}^2/\text{J}$  (AKERS; REEGER, 2019), temperatura ambiente  $T_c = 300 \text{ K}$  e força da gravidade  $g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$ . Tais grandezas implicam, baseado no número de Richardson, em uma velocidade característica de  $U = 3,13 \times 10^{-3} \text{ [m/s]}$ . Com esta velocidade característica e demais valores substituídos no número de Stanton chega-se a uma potência do laser de  $V_c^2 = 31,3 \text{ [kW/cm}^2\text{]}$ . Deve-se ter atenção que a absorvidade aqui é tratada como uma constante nesta metodologia, no entanto o seu cálculo é complexo. Para um entendimento e melhor representação da absorvidade deve ser observado como esta grandeza é tratada na literatura, o que foge do escopo do trabalho. (FIORINO et al., 2008; SPRANGLE et al., 2006)

O efeito *thermal blooming* tem como principal característica o surgimento de uma deformação axisimétrica, em relação ao eixo vertical, em formato de cogumelo, crescente ao longo do eixo axial, promovendo assim um espalhamento da potência do laser, bem como um desvio do ponto de maior potência no sentido vertical. Tal fenômeno vem sendo bem documentado e explicado desde a década de 1970. Experimentos desde esta década mostraram que, sem a influência de vento, o padrão em forma de cogumelo crescente é observada, com um deslocamento para cima devido à convecção, (GEBHARDT; SMITH, 1969). Esta convecção é formada devido ao aquecimento do fluido que promove o surgimento de dois vórtices laminares simétricos com relação ao eixo vertical.

A fig. 8 apresenta o início do desenvolvimento do campo de temperatura (Fig. 8a), neste primeiro instante,  $t = 0, 12$ , as mudanças do índice de refração não são significativas, com isso, a distribuição da intensidade do feixe de laser é simétrica similar à distribuição do feixe de laser inicial, dada pela eq. (3.81), conforme é observado Fig. 8b.

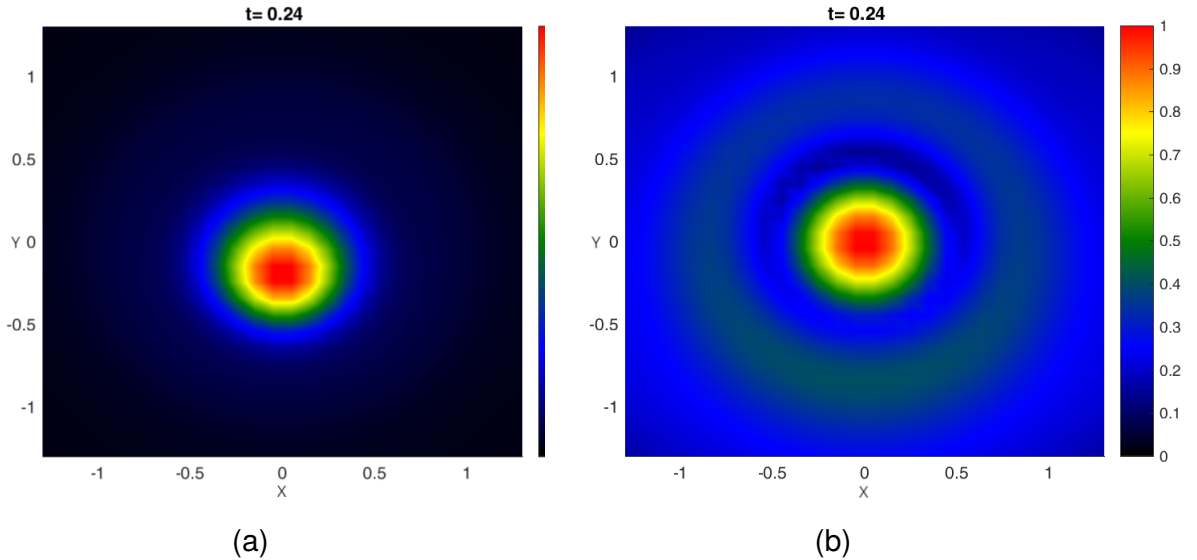
Figura 8 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 150, t = 0, 12)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 150, t = 0, 12)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 1.e4$  e  $St = \frac{1}{30}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $\eta_0 = 1, 0003$ ,  $T_0 = 300 K$ .



Fonte: Morais et al. (2022)

Com o desenvolvimento temporal do conjunto de equações, inicia-se o surgimento de vórtices os quais promovem as alterações da mudança de simetria radial do campo de temperatura, conforme pode ser observado na fig. 9a. A consequência do aquecimento do fluido é uma alteração dos índices de refração mais significativa. Com isso, inicia-se as alterações no formato da intensidade do feixe de laser, conforme é apresentado na fig. 9b.

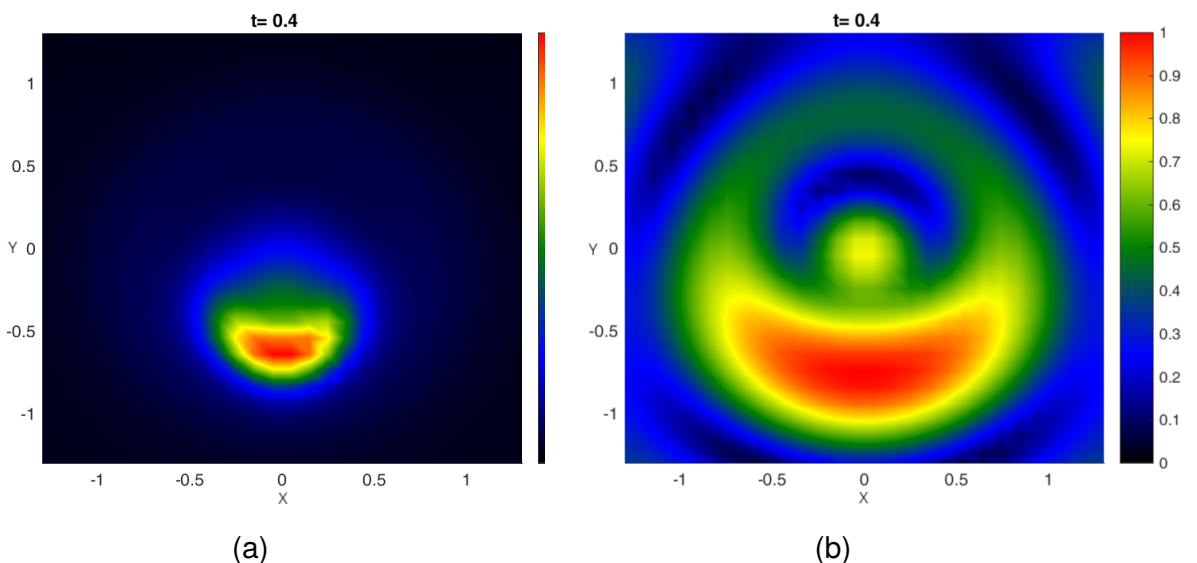
Figura 9 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 300, t = 0, 24)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 300, t = 0, 24)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 1.e4$  e  $St = \frac{1}{30}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $\eta_0 = 1,0003$ ,  $T_0 = 300 K$ .



Fonte: Morais et al. (2022)

Quando a assimetria do campo de temperatura é evidente, fig. 10a, dois fenômenos são observados na propagação do feixe de laser. O primeiro é um espalhamento da potência e o segundo é uma assimetria com relação ao eixo horizontal, fig.10b.

Figura 10 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 497, t = 0, 40)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 497, t = 0, 40)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 1.e4$  e  $St = \frac{1}{30}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $\eta_0 = 1,0003$ ,  $T_0 = 300 K$ .



Fonte: Morais et al. (2022)

Como esperado, é possível observar na Fig. 10 como a solução numérica deste

trabalho representa os resultados obtidos nos experimentos, os efeitos do aquecimento do fluido e, como consequência, a deformação do feixe de laser. Com a evolução do tempo há o aquecimento do fluido o que promove uma redução de densidade. Como resultado, o feixe se deforma devido à assimetria resultante no índice de refração. Com a evolução do tempo, esse efeito se acentua, promovendo uma distribuição do campo de temperatura mais próxima da forma de um cogumelo.

Ao analisar a equação paraxial este espalhamento é oriundo do termo do laplaciano transversal, o qual funciona no equacionamento como um amortecimento da resposta, logo esta característica de espalhamento é inerente a hipótese de que o laser se propaga como uma função de onda espacial.

Quanto à não simetria, esta é originada, exclusivamente, da modelagem adotada para o caso deste trabalho. A mesma não foi pré-estabelecida, esta característica advém do último termo da equação (3.55). Tal termo trata-se da atualização do índice de refração devido as alterações do campo de temperaturas. Logo, as características de propagação no meio são as responsáveis por definir como que se desenvolve esta assimetria. Portanto, em última análise são as condições iniciais e os números adimensionais: Reynolds, Prandtl, Richardson e Stanton do conjunto de equações de Navier-Stokes que definem as características da assimetria do feixe de laser.

#### 4.3 Análise das alterações dos números adimensionais

A análise desta seção visa apresentar como pode ser caracterizado um laser a partir das alterações dos números adimensionais. Além disso, destacar explicitamente quais os parâmetros que, a princípio, são considerados constantes neste modelo.

Como o presente trabalho parte da premissa que o laser se propaga na atmosfera, é assumido nesta análise que as condições do ambiente não são alteradas de uma simulação para outra. Portanto, as seguintes grandezas são mantidas constantes: a viscosidade cinemática do ar  $\nu$ , a viscosidade dinâmica  $\mu$ , a gravidade  $g$ , a absorvidade  $\beta$ , o calor específico  $c_p$  e a condutividade térmica  $\kappa$ .

O conjunto de números adimensionais da primeira simulação será identificado com o subíndice 1 e o da segunda com o subíndice 2. Na segunda simulação os números de Richardson e Stanton serão alterados para:  $St_2 = \frac{1}{3}$  e  $Ri_2 = 6.e5$ . Logo, partindo dos valores do números adimensionais temos que:

$$Re_1 = Re_2 \quad (4.7)$$

Tendo em vista que a viscosidade cinemática não é alterada:

$$U_1 L_1 = U_2 L_2 \quad (4.8)$$

O produto entre a velocidade característica e o comprimento característico para os dois experimentos é o mesmo, conforme estabelecido na eq. (4.8).

Quanto ao número de Prandtl, tendo em mente que as grandezas que o constituem não são alteradas de um experimento para o outro, nenhuma conclusão é possível se chegar através deste número.

Com a expressão para o número de Richardson e o resultado obtido na equação (4.8) será feita a seguinte manipulação:

$$Ri = \frac{gL}{U^2} = \frac{gL}{U^2} \frac{U}{U} = \frac{gUL}{U^3} \quad (4.9)$$

Com esta nova expressão para o número de Richardson dada pela eq. (4.9) será calculada a razão entre os números de Richardson dos dois experimentos:

$$\frac{Ri_2}{Ri_1} = \frac{6.e5}{1.e4} = 60 \quad (4.10)$$

Será substituído na eq. (4.10) a expressão obtida para o número de Richardson dado pela eq. (4.9):

$$\frac{gU_2 L_2}{U_2^3} \frac{U_1^3}{gU_1 L_1} = 60 \quad (4.11)$$

Substituindo o resultado dado pela eq. (4.8) na eq.(4.11), tem-se que:

$$\frac{U_1^3}{U_2^3} = 60 \rightarrow U_2 = \frac{U_1}{\sqrt[3]{60}} \quad (4.12)$$

Com a posse deste resultado dado pela eq. (4.10) e retornando a eq. (4.8), chega-se ao seguinte resultado:

$$U_1 L_1 = U_2 L_2 \rightarrow U_1 L_1 = \frac{U_1}{\sqrt[3]{60}} L_2 \rightarrow L_2 = \sqrt[3]{60} L_1 \quad (4.13)$$

Com os resultados obtidos com as equações (4.12) e (4.13) é possível realizar as seguintes considerações:

- Quanto aos comprimentos característicos dos escoamentos ( $L_1$  e  $L_2$ ) os mesmos estão diretamente relacionados com a maior dimensão geométrica que influencia o escoamento. Portanto, para o caso deste experimento, tendo em vista tratar-se



da propagação de um feixe de laser na atmosfera, a maior dimensão geométrica que interage com o escoamento é, claramente, o diâmetro do laser. Com isso, considerando que  $\sqrt[3]{60} \approx 4$ , é possível afirmar que a alteração do número de Richardson nesta magnitude implica em um aumento no diâmetro do laser da ordem de cerca de quatro vezes, eq. (4.13); e

- A velocidade característica está diretamente relacionada com a velocidade média que o escoamento se propaga, logo ela é primordial para determinar se o meio está em regime laminar, de transição ou turbulento. A redução da velocidade característica do experimento 1 para o 2, dado que o número de Reynolds no experimento 1 já é característico de escoamentos laminares,  $Re = 1000$ , não é significativa para alteração de regime do escoamento. Na realidade, para este conjunto de números adimensionais, tal alteração de números promove um caráter conservativo em se tratando das características da turbulência no escoamento. Logo, apenas deve se ter em mente que há uma redução nos níveis de turbulência do experimento 1 para o 2.

Por último, para se observar as alterações na potência do laser será realizado a razão entre os números de Stanton dos dois experimentos:

$$\frac{St_2}{St_1} = \frac{1/3}{1/30} = 10 \quad (4.14)$$

Substituindo a expressão dada para o número de Stanton na eq. (4.14), chega-se à seguinte relação:

$$\frac{\beta V_{c_2}^2 L_2}{U_2 T_{c_2}} \frac{U_1 T_{c_1}}{\beta V_{c_1}^2 L_1} = 10 \rightarrow \frac{\cancel{\beta} V_{c_2}^2 L_2}{U_2 T_{c_2}} \frac{U_1 T_{c_1}}{\cancel{\beta} V_{c_1}^2 L_1} = \frac{V_{c_2}^2 T_{c_1} U_1 L_2}{V_{c_1}^2 T_{c_2} U_2 L_1} = 10 \quad (4.15)$$

Substituindo os resultados obtidos nas eq. (4.12) e eq. (4.13) na eq. (4.15), obtém-se:

$$\frac{V_{c_2}^2 T_{c_1} U_1 \sqrt[3]{60} L_1}{V_{c_1}^2 T_{c_2} \frac{U_1}{\sqrt[3]{60}} L_1} = 10 \rightarrow \frac{V_{c_2}^2 T_{c_1} \cancel{U_1} \sqrt[3]{60^2} \cancel{L_1}}{V_{c_1}^2 T_{c_2} \cancel{U_1} \cancel{L_1}} = 10 \quad (4.16)$$

Isolando a temperatura característica da simulação 2 da eq. (4.16), obtém-se a seguinte expressão:

$$T_{c_2} = \frac{\sqrt[3]{60^2}}{10} \frac{T_{c_1}}{V_{c_1}^2} V_{c_2}^2 \approx 1,5 \times \frac{T_{c_1}}{V_{c_1}^2} V_{c_2}^2 \quad (4.17)$$

Antes da análise da expressão deve-se atentar para como a relação entre a temperatura característica,  $T_c$ , e a potência do laser,  $V_c^2$ , estão intrinsecamente ligadas.

Das hipóteses para elaboração do modelo, as condições iniciais são quiescentes, logo o aquecimento do meio é devido a interação do laser. Portanto, a temperatura característica do fluido é consequência, exclusivamente, da potência fornecida pelo laser.

Observando-se a expressão obtida na eq. (4.17), com os números adimensionais estabelecidos, supondo que a potência do laser para a simulação 2 é igual a da simulação 1, ou seja,  $V_{c_2}^2 = V_{c_1}^2$ , é obtida a seguinte expressão:

$$T_{c_2} = 1,5T_{c_1} \quad (4.18)$$

Logo, a eq. (4.18) apresenta que a temperatura característica da simulação 2 é, para uma mesma potência dos dois lasers, aproximadamente, cinquenta por cento maior que a do primeiro experimento. Como consequência, os efeitos da turbulência óptica são muito mais acentuados no experimento 2, o que justifica a inclusão dos efeitos da cintilação para este experimento.

Este aumento substancial da temperatura é possível de ser justificado da seguinte forma. Dado que o diâmetro da simulação do laser 2 é maior e o seu nível de turbulência é menor, isto implica que a região de interação do fluido e o tempo que estas partículas interagem é maior no experimento 2. Além disso, a fonte de aquecimento deste fluido é constante. Com isso, a temperatura do escoamento na simulação 2, em termos qualitativos, deve ser obrigatoriamente maior, devido ao aumento das interações entre as partículas do escoamento.

Por fim, foi possível demonstrar como o conjunto de números adimensionais da simulação 1 em comparação com a simulação 2 os seguintes aspectos:

- O diâmetro do feixe de laser da simulação 2 é cerca de quatro vezes maior que o diâmetro do feixe de laser 1;
- O nível de turbulência do experimento 1 é cerca de 4 vezes maior que o do experimento 2; e
- Para uma mesma potência entre as duas simulações a temperatura do escoamento 2 é cinquenta por cento maior que a do escoamento 1.

#### 4.4 Acoplamento do efeito *thermal blooming*, cintilação e convecção

Com relação à simulação anterior, os números de Prandtl e Reynolds foram mantidos constantes. Tendo em vista que foram incluídos os efeitos de cintilação nesta simulação, as interações entre o escoamento e o laser devem ser intensificadas, para isso o número de Stanton foi aumentado em uma ordem de grandeza, ou seja,  $St = \frac{1}{3}$ .

Além disso, objetivando um aumento das interações entre a equação da conservação do momento e a equação da conservação da energia o número de Richardson foi alterado para  $Ri = 6.e5$ .

#### 4.4.1 Análise dos resultados da simulação

Os dados que foram utilizados nesta simulação foram os números adimensionais já especificados. Quanto as flutuações de temperatura são apresentadas em unidade dimensional, *Kelvin*, com uma temperatura característica de  $T_0 = 300K$ , Quanto ao índice de refração médio do meio não perturbado o valor utilizado foi de  $\eta_s = 1,0003$ . O espaçamento da malha foi reduzido para  $h = 0,05$ . Além disso, o espaçamento temporal foi de  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ . O perfil do feixe de laser é dado pela eq. (3.81). O coeficiente de intensificação da cintilação é de  $\delta = 0,01$ .

O número de Courant máximo que foi obtido, baseado na eq. (3.332), no ponto de maior velocidade do último time step, foi de:

$$\mu_{c_{max}} = 0,4 \quad (4.19)$$

O número de Neumann obtido, baseado na eq. (3.333), foi de:

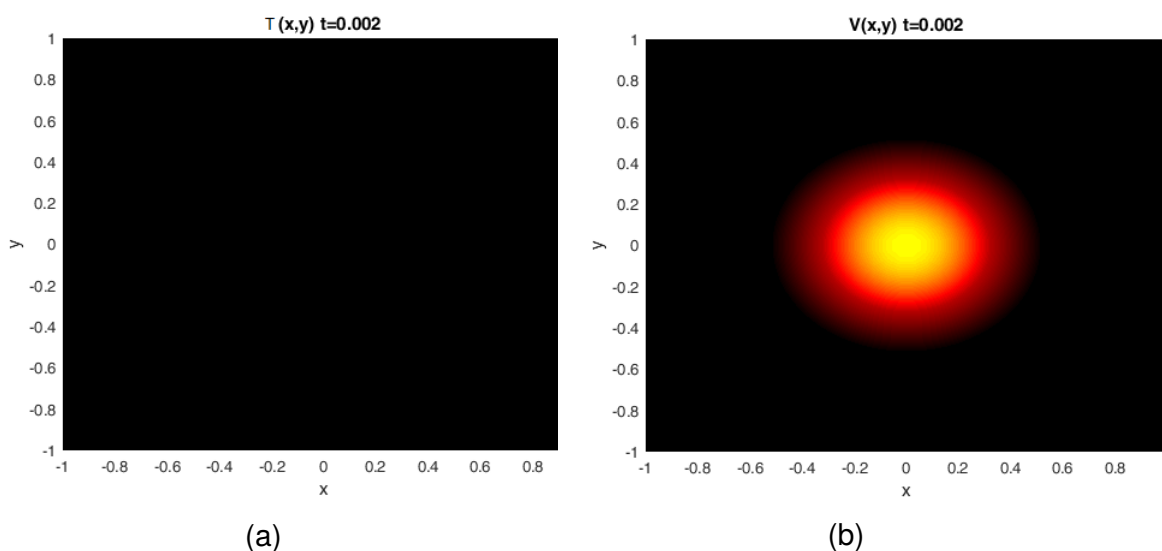
$$\nu_{n_{max}} = \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 8 \times 10^{-5} \quad (4.20)$$

Cabe ressaltar que devido ao refinamento da malha e intensificação dos números adimensionais o custo computacional foi acrescido em cerca de dez vezes quando comparado ao resultado da primeira simulação para obtenção do início dos efeitos decorrentes da turbulência óptica. O refinamento da malha promove linearmente um aumento no custo computacional em 4 vezes, pois a quantidade de pontos é quadruplicada. Já o incremento dos números adimensionais, a intensificação destes, devido ao conjunto de equações não ser linear o seu cálculo teórico torna-se complexo, no entanto na prática esta alteração promoveu um aumento do custo computacional em duas vezes e meia, com relação à primeira simulação.

Inicialmente, o campo de temperatura do escoamento não sofre nenhuma influência do feixe de laser, conforme pode ser observado na figura 11a. Com isso, também não é possível observar nenhuma alteração na distribuição da frente de onda gaussiana, a qual representa a propagação de um laser monomodo. A figura 11b apresenta a distribuição da intensidade do feixe de laser e é possível verificar que a distribuição desta no instante  $t = 0,002$  é a mesma dada pela equação (3.81). O ponto de maior intensidade é encontrado

no par ordenado (0,0), demonstrando que também não há nenhuma alteração transversal da intensidade do feixe de laser.

Figura 11 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 1, t = 0,002)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 1, t = 0,002)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 6.e5$  e  $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio  $\eta_0 = 1,0003$  e coeficiente de intensificação da cintilação,  $\delta = 0,01$ .

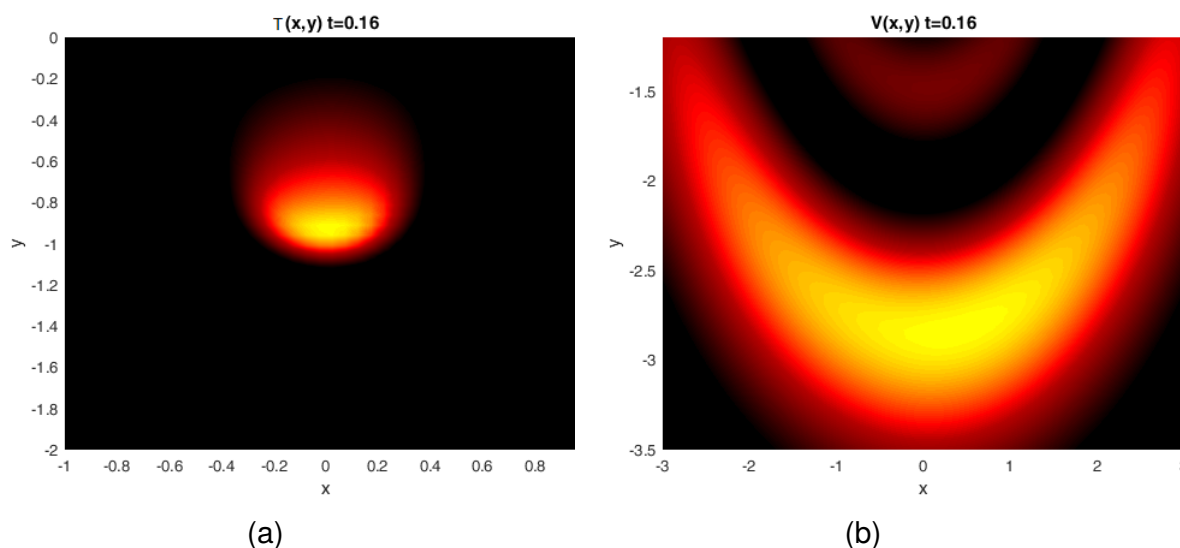


Fonte: Autor da dissertação.

Com a continuidade da resolução do conjunto de equações para obtenção da resposta temporal é possível observar o surgimento do aquecimento do fluido, figura 12a. Tal aquecimento promove o deslocamento vertical do campo de temperatura devido à convecção forçada gerada pelo laser. O surgimento deste aquecimento promove a alteração do índice de refração, o qual altera a distribuição da intensidade do feixe de laser.

Adicionalmente, é possível verificar que o ponto de maior intensidade não é mais apresentado exatamente no eixo vertical da figura 12b, o mesmo fica deslocado mais para direita. Apresentando assim, o início de assimetrias verticais, diferente dos resultados obtidos na primeira simulação. Outra característica é o surgimento de um borramento destas figuras, apresentando assim as primeiras evidências da influência da turbulência óptica.

Figura 12 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 800, t = 0,016)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 800, t = 0,016)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 6.e5$  e  $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio  $\eta_0 = 1,0003$  e coeficiente de intensificação da cintilação,  $\delta = 0,01$ .



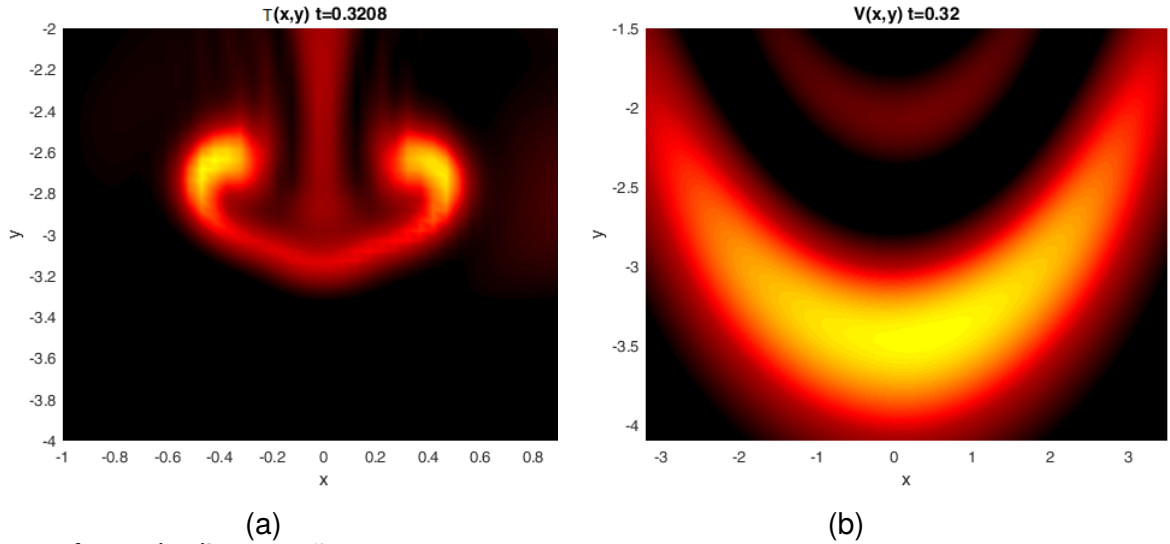
Fonte: Autor da dissertação.

Quando a assimetria do campo de temperatura torna-se evidente, figura 13a, a deformação da intensidade do feixe de laser cria uma propagação crescente na direção da convecção forçada, fig.13b.

Os efeitos da turbulência óptica nas alterações da temperatura do fluido começam a ser notáveis, conforme observa-se na fig. 13. As alterações do campo de temperatura promovem um espalhamento com um desfoque da intensidade em toda a estrutura apresentada na figura 13a. Voltando a atenção para as duas regiões de temperatura de maior intensidade, consequência da influência dos vórtices gerados pela convecção, é possível verificar que elas não possuem uma mesma estrutura, a região da direita da figura 13a apresenta um pico de intensidade maior quando comparada com a da esquerda. Com isso, a simetria vertical da primeira simulação não é mais verificada neste caso.

Quanto a intensidade do feixe, a figura 13b apresenta o pico de intensidade à direita do eixo vertical, característica esta que não foi observada na primeira simulação. Observa-se um borramento do feixe de laser. Adiciona-se a isto o surgimento de uma assimetria vertical a qual é decorrente dos fenômenos estocásticos da turbulência óptica. No entanto, o fenômeno de aleatoriedade causada pela cintilação não foi possível de ser verificado. Logo, uma análise detalhada do fenômeno é realizada na próxima seção.

Figura 13 – (a) Campo de temperatura  $T(x, y, z = 1600, t = 0,032)$ . (b) Intensidade do feixe de laser  $|V|^2(x, y, z = 1600, t = 0,032)$ . Para estas simulações  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ri = 6.e5$  e  $St = \frac{1}{3}$ , o campo de temperatura é apresentado em unidades dimensionais, *Kelvin*,  $T_0 = 300 K$ , índice de refração médio  $\eta_0 = 1,0003$  e coeficiente de intensificação da cintilação,  $\delta = 0,01$ .



Fonte: Autor da dissertação.

A diferença do formato apresentado nesta simulação para o campo de temperaturas quando este é comparado à primeira simulação é devido a intensificação da convecção forçada ocasionada pelo aumento do número de Richardson em uma ordem de grandeza quando comparado à primeira simulação. Quanto à alteração no formato do feixe de laser quando comparado à primeira simulação, este é atribuído as alterações da solução promovidas pelo número de Stanton que também é acrescido em uma ordem de grandeza.

#### 4.5 Análise Fator de Cintilação $\delta$

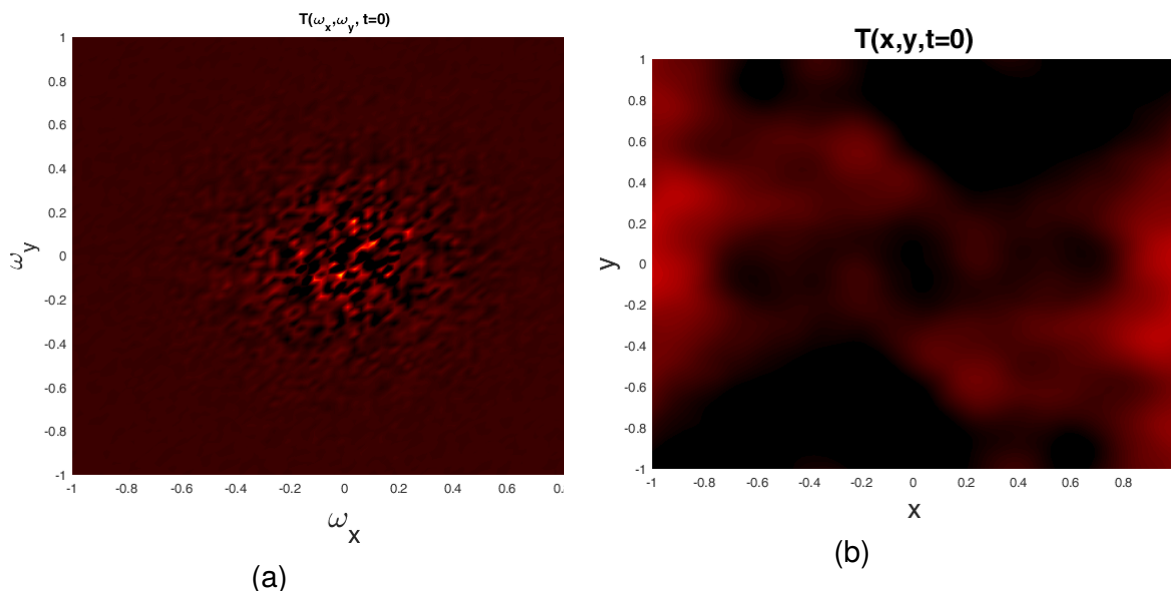
Para a análise do fator de cintilação, o conjunto dos números adimensionais foi mantido constante: Reynolds,  $Re = 1000$ ; Prandtl,  $Pr = 1$ ; Richardson,  $Ri = 6 \times 10^5$ ; e Stanton,  $St = \frac{1}{3}$ . O feixe de laser inicial estabelecido como:

$$V(x, y, z = 0, t = 0) = e^{-\frac{\pi}{2}(x^2+y^2)} \quad (4.21)$$

A eq. (3.294) produz os coeficientes para  $T(k_x, k_y)$ , os quais podem ser observados na fig. 14a. Segundo Coulman et al. (1988), as escalas de turbulência atmosférica na faixa inercial, para o caso da modelagem do índice de refração na propagação atmosférica podem ser descritas como: a escala externa  $L_0 = 1 [m]$  e a escala interna  $l_0 = 1 [cm]$  tais valores são substituídos na eq. (3.295), (COULMAN et al., 1988).

Em seguida, aplica-se o algoritmo de FFT nos dados mostrados na Fig. 14a e obtêm-se as flutuações de temperatura na direção transversal (Fig. 14b).

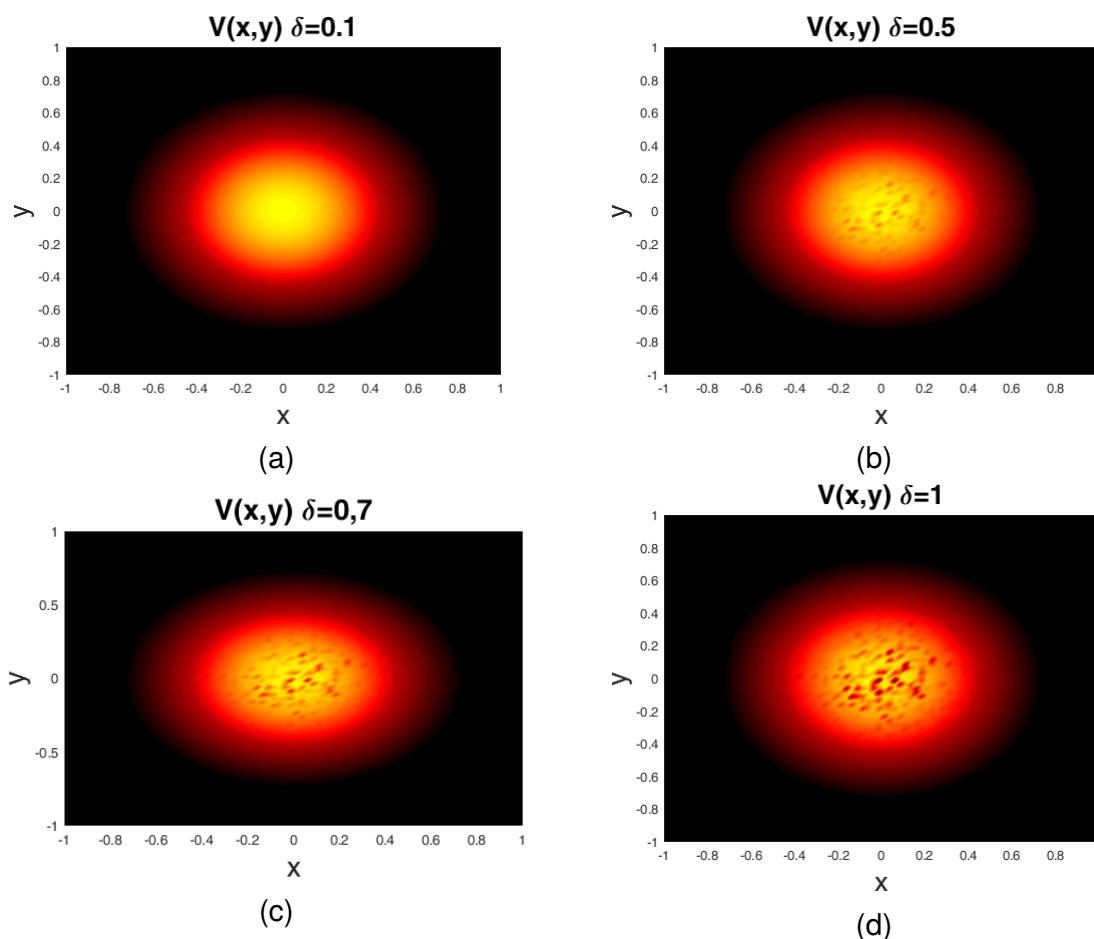
Figura 14 – Flutuações de temperatura  $T_1(z = 0, t = 0)$  com  $Re = 1000$ ,  $Pr = 1,6 \times 10^5$  com  $St = \frac{1}{3}$ ,  $L_0 = 1 [m]$  e  $l_0 = 1 [cm]$  (a)  $T_1(k_x, k_y)$  conforme (3.295) (b)  $T_1(x, y)$  condição inicial das flutuações de temperatura no plano transversal.



Fonte: Autor da dissertação.

Usa-se os dados mostrados na Fig. 14 na eq. (3.298), com amplitude inicial do campo elétrico dada pela eq. (4.21), com isso são obtidos os resultados apresentados na figura 15:

Figura 15 – Intensidade do feixe de laser  $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$  utiliza-se para tal a eq. (3.77), equação paraxial, as eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), modelo tela de fase de turbulência e altera-se  $\delta$  conforme: (a)  $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$  para  $\delta = 0, 1$ . (b)  $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$  para  $\delta = 0, 5$ . (c)  $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$  para  $\delta = 0, 7$ . (d)  $V(x, y, z = 1, t = 5 \times 10^{-5})$  para  $\delta = 1$ .



Fonte: Autor da dissertação.

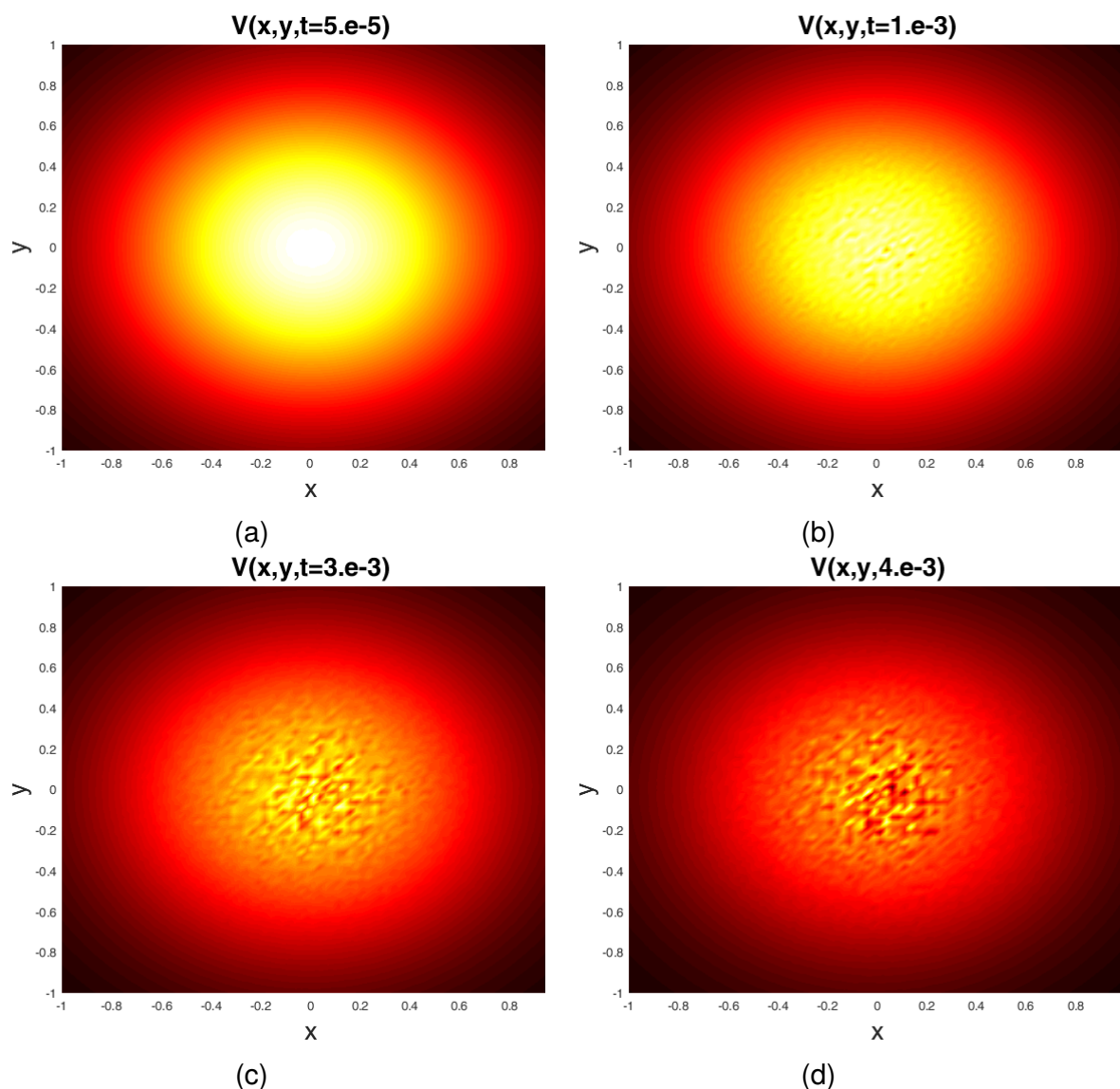
Como é possível ver na figura 15, o solver é inicializado, prescrevendo que  $\Delta z = 1$  e os passos de tempo são  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ , ambos são números adimensionais. O único parâmetro que foi alterado de 15a para 15d é o aumento do fator de cintilação  $\delta$ . À medida que  $\delta$  aumenta de 0,1 para 1, o efeito de cintilação quase imperceptível em 15a passa a ser nítido em 15d.

Para analisar os efeitos da cintilação ao longo da evolução temporal do solver foi realizado uma análise com o mesmo conjunto de números adimensionais apresentados no início desta seção. Além disso, foi utilizado um fator de cintilação fixo  $\delta = 0, 1$ , que pode ser visto na figura 16.

Observa-se que a inclusão da cintilação na evolução do tempo promove na solução, à medida que o tempo evolui, uma maior relevância das variações aleatórias de temperatura para este  $\delta$  do que os resultados apresentados na seção 4.4.



Figura 16 – Evolução no tempo do campo elétrico  $V(x, y)$  dado pela solução das eq. (3.77), equação paraxial, eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), cintilação, com um fator de cintilação  $\delta = 0, 1$ . a)  $V(x, y, z = 1, t = 5.e - 5)$ , b)  $V(x, y, z = 20, t = 1.e - 3)$ , c)  $V(x, y, z = 60, t = 3.e - 3)$ , d)  $V(x, y, z = 80, t = 4.e - 3)$



Fonte: Autor da dissertação.

A principal justificativa para esta constatação é o aumento arbitrário em uma ordem de grandeza do fator de cintilação, o qual saiu de  $\delta = 0,01$  nos resultados da seção 4.4 para  $\delta = 0, 1$ . O objetivo de fato na apresentação da figura 16, foi evidenciar as alterações de fase no modelo.

Ao comparar estes resultados com os resultados numéricos apresentados em Morrill (2018), observa-se que os valores do fator de cintilação não são os mesmos. No entanto, o comportamento com a intensificação deste são similares. Tal fato pode ser justificado, dado que os métodos de resolução numérica das equações são distintos. Além disso, como tratam-se de equações com vários fatores de simplificação, para a obtenção

de resultados representativos quantitativamente da propagação de um feixe de laser na atmosfera é necessário o ajuste com dados experimentais.

Referente ao fator de cintilação  $\delta$ , esta variável é tratada como um fator de escala das alterações de fase do meu índice de refração, o qual devido ao modelo adotado é diretamente proporcional às flutuações de temperatura. Já estas flutuações de temperatura possuem o mesmo comportamento das flutuações do campo de velocidades. Logo, para obtenção dos dados experimentais deve-se observar quais são os parâmetros de entrada que estabelecem a PSD adotada neste modelo, dada pela eq. (3.292) aqui rerepresentada:

$$\mathcal{T}_1(k_x, k_y) = 0,49r_0^{-5/3} \frac{e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{k_m^2}}}{(k_x^2 + k_y^2 + k_0^2)^{11/6}} \quad (3.292)$$

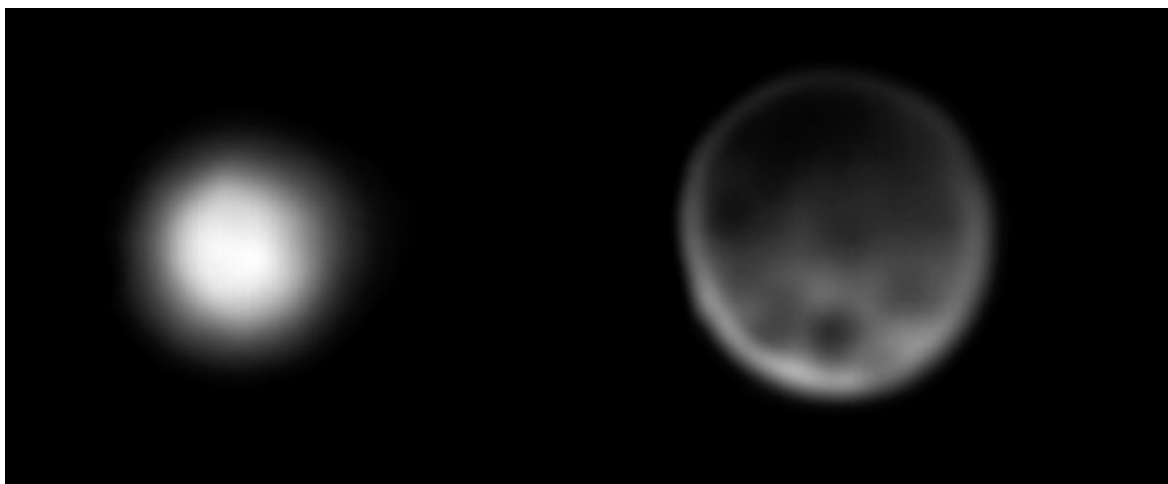
onde  $k_m = \frac{5,93}{l_0}$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ,  $l_0$  é a escala interna de turbulência,  $L_0$  é a escala externa de turbulência e  $r_0$  é o diâmetro de coerência atmosférica. Portanto, o experimento deve ser controlado de modo que estes três parâmetros sejam bem estabelecidos.

Em seguida, o experimento deve ser capaz de medir as alterações de fase do meio. Conforme apresentado em Milonni e Eberly (2010), esta metodologia já está bem estabelecida e é utilizada na astronomia para o aumento do alcance de telescópios. A ideia básica é medir as alterações de fase através de um laser de baixa potência. Com a posse deste sinal corrige-se a fase, avançando onde a atmosfera promove a defasagem e retardando a fase onde a atmosfera promoveu o seu avanço. O resultado ideal é a correção da fase na região transversal ao eixo óptico, a qual é caracterizada pelo modelo de tela de fase aqui apresentado.

O avanço e o retardo das fases locais são feitos com uma superfície de espelho deformável, ou “espelho de borracha”. As distorções de fase da frente de onda são medidas por um sensor de frente de onda. Estes dados são convertidos em tensões elétricas que acionam atuadores mecânicos que ajustam a forma da superfície do espelho deformável para que a fase da frente de onda na saída possua seu formato ajustado. O tipo mais comum de sensor de frente de onda na óptica adaptativa é o sensor Shack–Hartmann, uma matriz de lentes de mesma distância focal. Cada lente produz um ponto em uma matriz de detectores e o deslocamento do ponto de sua posição nula local é uma medida do gradiente de fase local e, portanto, a direção de propagação do raio local da frente de onda de entrada naquela daquela lente (MILONNI; EBERLY, 2010).

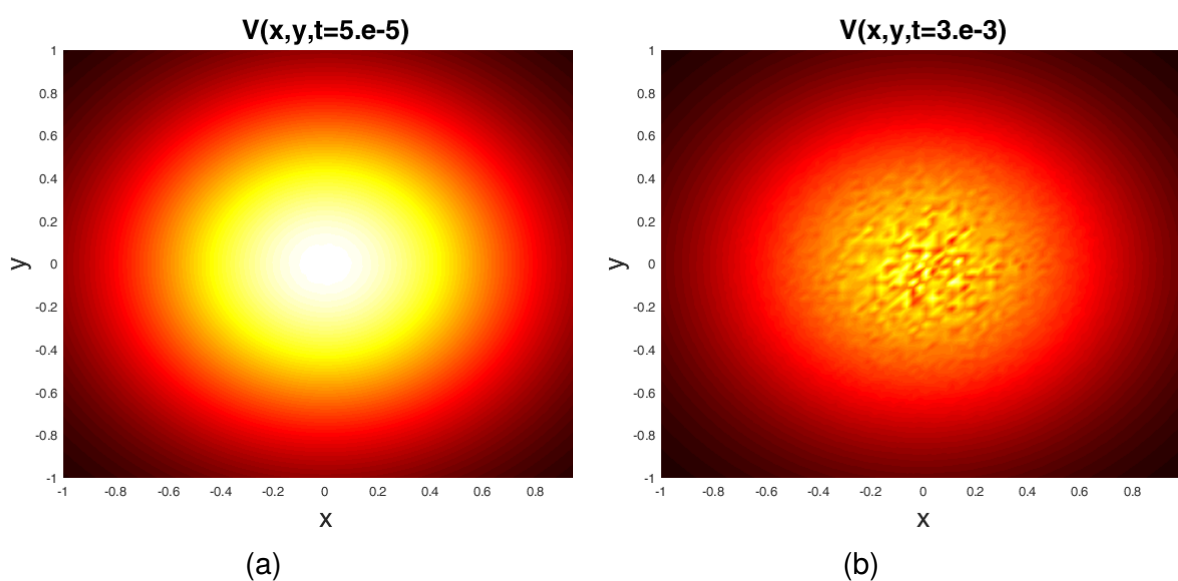
Ressalta-se também que o fator de cintilação  $\delta$  no caso real é função das condições ambientes e neste modelo o mesmo é tratado como uma constante arbitrária. O estudo da modelagem de tal parâmetro foge do escopo deste trabalho, mas para aumento da robustez dos resultados deste modelo para futuros trabalhos existe a necessidade

Figura 17 – Evolução de um feixe de laser de 2,5 [kW] propagado pela fumaça da queima de óleo e borracha (MORRILL, 2018). Da esquerda para direita um *frame* do laser em  $t = 0$  e  $t = 6$  [s].



Fonte: Morrill (2018)

Figura 18 – Evolução no tempo do campo elétrico  $V(x, y)$  dado pela solução das eq. (3.77), equação paraxial, eq. (3.103) a (3.306), equações N-S, e a eq. (3.298), cintilação, com um fator de cintilação  $\delta = 0,1$ . a)  $V(x, y, z = 1, t = 5 \cdot e^{-5})$ , b)  $V(x, y, z = 60, t = 3 \cdot e^{-3})$ .



Fonte: Autor da dissertação.

deste desenvolvimento.

Para uma exemplificação da validade do modelo e comparação com resultados reais é apresentado na figura 17 a evolução de um feixe de laser de 2,5 [kW] propagado pela fumaça da queima de óleo e borracha conforme citado em Morrill (2018). Da esquerda para direita um *frame* do laser em  $t = 0$  e  $t = 6$  [s]. Segundo Morrill (2018), a cintilação é mostrada nos pontos escuros e no desfoque do laser.

Ao realizar a comparação da figura 18a com o frame a esquerda da fig. 17,

observa-se que inicialmente tanto o modelo numérico, como o experimento, tratam-se de uma intensidade de um feixe de laser que pode ser interpretada como um perfil gaussiano.

Quando observa-se o frame à direita da fig. 17, inicia-se um desfocamento do laser e o surgimento de pontos pretos na imagem os quais são atribuídos aos efeitos da cintilação (MORRILL, 2018). Existe um comportamento similar na figura 18b, com a evolução temporal, inicia-se um desfoque do laser e o surgimento de pontos de forma randômica, os quais são devido, exclusivamente, a inclusão no modelo da metodologia de tela de fase e inserção da cintilação.

As diferenças na magnitude destes pontos pretos são atribuídas à não possibilidade e não citação nos dados experimentais de qual seria a faixa inercial de turbulência, bem como quais são os dados que caracterizam o escoamento. Com isso, a simulação numérica aqui apresentada possui números adimensionais e de tipificação da turbulência distintos dos dados experimentais. No entanto, em termos qualitativos é possível afirmar que a evolução temporal do modelo é similar ao comportamento da propagação de um feixe de laser na atmosfera. Existe o surgimento de forma randômica de alterações de fase na intensidade do laser, bem como desfoque do feixe de laser.

#### 4.6 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos com o solver proposto neste trabalho, cujo modelo esquemático é dado pela figura 7. Foi demonstrada a robustez do solver proposto através da análise: do acoplamento do efeito *thermal blooming* com a convecção induzida; acoplamento do efeito *thermal blooming*, cintilação e convecção induzida; alteração das condições iniciais: turbulência, diâmetro do laser, potência do laser e temperatura do laser; e alteração do fator de cintilação  $\delta$ .

## 5 CONCLUSÃO

A formulação analítica da propagação de um feixe de laser na atmosfera é fundamental para o desenvolvimento e aprimoramento de lasers alta potência. Neste trabalho foi realizada uma apresentação da teoria que estabelece os princípios de propagação de um feixe de laser na atmosfera com a inclusão do efeito *thermal blooming* e da cintilação. Foi desenvolvido um modelo teórico, capaz de representar a propagação de um HEL na atmosfera, bem como, foi apresentada a metodologia para obtenção de uma solução numérica deste modelo.

Este modelo numérico foi implementado e foi capaz de simular a propagação de um feixe de laser com variação de sua potência, alteração das condições do meio de propagação e inclusão de fenômenos estocásticos. Com isso, o *solver* desenvolvido e sua implementação acopla os fenômenos do efeito *thermal blooming*, da cintilação na propagação de um HEL na atmosfera.

Este modelo pode ser aplicado para previsão da variação do pico de intensidade no receptor devido ao fenômeno *thermal blooming*, bem como para previsão da correção de fase devido aos efeitos da cintilação. Sendo assim, nas aplicações de HEL's que estes fenômenos são presentes a utilização deste *solver* permite a correção destes dois efeitos deletérios.

Como sugestão para trabalhos posteriores, propõe-se a investigação das variáveis que alteram o fator de cintilação, o aumento da robustez do índice de refração considerando sua alteração ao longo do eixo axial, aprimoramento do modelo de tela de fase e inclusão de funções para representar as alterações da absorvidade. Além disso, propõe-se a tipificação de um experimento, quanto a números adimensionais e parâmetros do modelo de turbulência, para comparação com o modelo teórico proposto com a finalidade de validação experimental deste.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKERS, B. F.; LIU, T. Thermal effects in short laser pulses: Suppression of wave collapse. *Wave Motion*, Elsevier B.V., v. 115, p. 103079, 11 2022. ISSN 01652125. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2022.103079><https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165212522001251>>.

AKERS, B. F.; REEGER, J. A. Numerical simulation of thermal blooming with laser-induced convection. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, v. 33, n. 1, p. 96–106, 1 2019. ISSN 0920-5071. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/09205071.2018.1528183>>.

ANDERSON, J. D. Fundamentals of Aerodynamics. *AIAA Journal*, v. 48, n. 12, p. 2983–2983, 12 2010. ISSN 0001-1452. Disponível em: <<http://doi.aiaa.org/10.2514/1.52157>>.

ANDREWS, L. C.; PHILLIPS, R. L. **Laser beam propagation through random media**. Second edition. Bellingham: SPIE-International Society for Optical Engineering, 2005.

ARSENOVIĆ, D.; DIMITRIJEVIĆ, J.; JELENKOVIĆ, B. Spectral method for numerical solution of the electric field envelope propagation equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 67, p. 264–271, 2019. ISSN 10075704.

ASSÉMAT, F.; WILSON, R.; GENDRON, E. Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage. *Optics Express*, v. 14, n. 3, p. 988, 2006. ISSN 10944087.

BEGHI, A.; CENEDESE, A.; MASIERO, A. Stochastic realization approach to the efficient simulation of phase screens. *Journal of the Optical Society of America A*, v. 25, n. 2, p. 515, 2 2008. ISSN 1084-7529. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josaa-25-2-515>>.

BEGHI, A.; CENEDESE, A.; MASIERO, A. Stochastic realization approach to the efficient simulation of phase screens. *Journal of the Optical Society of America A*, v. 25, n. 2, p. 515, 2 2008. ISSN 1084-7529. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josaa-25-2-515>>.

BRADLEY, L. C.; HERRMANN, J. Phase compensation for thermal blooming. *Applied Optics*, Optica Publishing Group, v. 13, n. 2, p. 331–334, 1974.

CARROLL, D. Overview of High Energy Lasers: Past, Present, and Future? In: **42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference**. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. ISBN 978-1-62410-147-2.

CHARNOTSKII, M. Four methods for generation of turbulent phase screens: comparison. **arXiv preprint arXiv:1911.09185**, 2019.

CHOI, C. H.; JANG, H. J.; LIM, S. G.; LIM, H. C.; CHO, S. H.; GAPONOV, I. Automatic wireless drone charging station creating essential environment for continuous drone operation. In: **2016 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)**. IEEE, 2016. p. 132–136. ISBN 978-1-5090-0650-2. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7822448/>>.

CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **Journal of Computational Physics**, v. 2, n. 1, p. 12–26, 8 1967. ISSN 00219991. Disponível em: <[http://apps.isiknowledge.com/InboundService.do?product=WOS&action=retrieve&SrcApp=Papers&UT=A1997XQ32700006&SID=N2@FAc6KE11PD9HGmin&SrcAuth=mekentosj&mode=FullRecord&customersID=mekentosj&DestFail=http://access.isiproducts.com/custom\\_images/wok\\_failed\\_aut](http://apps.isiknowledge.com/InboundService.do?product=WOS&action=retrieve&SrcApp=Papers&UT=A1997XQ32700006&SID=N2@FAc6KE11PD9HGmin&SrcAuth=mekentosj&mode=FullRecord&customersID=mekentosj&DestFail=http://access.isiproducts.com/custom_images/wok_failed_aut)>.

COLES, W. A.; FILICE, J. P.; FREHLICH, R. G.; YADLOWSKY, M. Simulation of wave propagation in three-dimensional random media. **Applied Optics**, v. 34, n. 12, p. 2089, 1995. ISSN 0003-6935.

COULMAN, C.; VERNIN, J.; COQUEUGNIOT, Y.; CACCIA, J. Outer scale of turbulence appropriate to modeling refractive-index structure profiles. **Applied optics**, Optica Publishing Group, v. 27, n. 1, p. 155–160, 1988.

DIVLIANSKY, I. **Advances in High-Power Fiber and Diode Laser Engineering**. London: The Institution of Engineering and Technology, 2020. ISBN 9781785617515.

DÖÖS, K.; LUNDBERG, P.; CAMPINO, A. A. **Basic Numerical Methods in Meteorology and Oceanography**. [S.l.]: Stockholm University Press, 2022.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M.; STREET, R. L. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Cham: Springer International Publishing, 2020. 1–23 p. ISBN 978-3-319-99691-2. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-99693-6>>.

FIORINO, S. T.; BARTELL, R. J.; KRIZO, M. J.; CAYLOR, G. L.; MOORE, K. P.; HARRIS, T. R.; CUSUMANO, S. J. A first principles atmospheric propagation & characterization tool: the laser environmental effects definition and reference (LEEDR). In: KOROTKOVA, O. (Ed.). **Atmospheric Propagation of Electromagnetic Waves II**. [s.n.], 2008. v. 6878, p. 68780B. ISBN 9780819470539. ISSN 0277786X. Disponível em: <<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.763812>>.

FLECK, J. A.; MORRIS, J. R.; FEIT, M. D. Time-dependent propagation of high-energy laser beams through the atmosphere: II. **Applied physics**, v. 14, n. 1, p. 99–115, 9 1977. ISSN 0340-3793. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF00882638>>.

FRIGO, M.; JOHNSON, S. FFTW: an adaptive software architecture for the FFT. In: **Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP '98 (Cat. No.98CH36181)**. IEEE, 1998. v. 3, p. 1381–1384. ISBN 0-7803-4428-6. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/681704/>>.

GEBHARDT, F. G. Twenty-five years of thermal blooming: an overview. In: ULRICH, P. B.; WILSON, L. E. (Ed.). [s.n.], 1990. v. 1221, p. 2. Disponível em: <<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.18326>>.

GEBHARDT, F. G.; SMITH, D. C. Effects of wind on thermal defocusing of CO<sub>2</sub> laser radiation. **Applied Physics Letters**, v. 14, n. 2, p. 52–54, 1969. ISSN 00036951.

GORDON, J. P.; LEITE, R. C. C.; MOORE, R. S.; PORTO, S. P. S.; WHINNERY, J. R. Long-Transient Effects in Lasers with Inserted Liquid Samples. **Journal of Applied Physics**, v. 36, n. 1, p. 3–8, 1 1965. ISSN 0021-8979. Disponível em: <<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1713919>>.

GORDON, L.; LEITE, R.; MOORE, R.; PORTO, S.; WHINNERY, J. Photothermal method. **Bulletin of American Physical Society**, v. 119, p. 501, 1964.

GUSTAFSSON, J.; AKERS, B. F.; REEGER, J. A.; SRITHARAN, S. S. Atmospheric propagation of high energy lasers. **Engineering Mathematics Letters**, 2019. ISSN 20499337. Disponível em: <<http://scik.org/index.php/eml/article/view/3888>>.

HARDING, C. M.; JOHNSTON, R. A.; LANE, R. G. Fast simulation of a kolmogorov phase screen. **Applied Optics**, v. 38, n. 11, p. 2161, 4 1999. ISSN 0003-6935. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-38-11-2161>>.

HARDY, J. Active optics: A new technology for the control of light. **Proceedings of the IEEE**, v. 66, n. 6, p. 651–697, 1978. ISSN 0018-9219. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1455261/>>.

HE, T.; ZHENG, G.; WU, Q.; HUANG, H.; WAN, L.; XU, K.; SHI, T.; LV, Z. Analysis and experiment of laser energy distribution of laser wireless power transmission based on a powersphere receiver. In: MDPI. **Photonics**. [S.l.], 2023. v. 10, n. 7, p. 844.

HERMAN, B. J.; STRUGALA, L. A. Method for inclusion of low-frequency contributions in numerical representation of atmospheric turbulence. **Propagation of High-Energy Laser Beams Through the Earth's Atmosphere**, v. 1221, p. 183, 1990. ISSN 0277786X.

HILL, R. J.; CLIFFORD, S. F. Modified spectrum of atmospheric temperature fluctuations and its application to optical propagation. **Journal of the Optical Society of America**, v. 68, n. 7, p. 892, 7 1978. ISSN 0030-3941. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-68-7-892>>.

HOGGE, C. B. Propagation of High-Energy Laser Beam in the Atmposphere. **AIR FORCE WEAPONS LAB KIRTLAND AFB NM**, 1974. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0781763>>.

JAAFAR, W.; YANIKOMEROGLU, H. Dynamics of Laser-Charged UAVs: A Battery Perspective. **IEEE Internet of Things Journal**, IEEE, v. 8, n. 13, p. 10573–10582, 7 2021. ISSN 2327-4662. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9310251/>>.

JAKOBSSON, H. Simulations of time series of atmospherically distorted wave fronts. **Applied Optics**, v. 35, n. 9, p. 1561, 1996. ISSN 0003-6935.

KIM, W.-W.; MENON, S. An unsteady incompressible Navier-Stokes solver for large eddy simulation of turbulent flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 31, n. 6, p. 983–1017, 11 1999. ISSN 0271-2091. Disponível em: <[https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19991130\)31:6%3C983::AID-FLD908%3E3.0.CO;2-Q](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0363(19991130)31:6%3C983::AID-FLD908%3E3.0.CO;2-Q)>.

KOLMOGOROV, A. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, v. 434, n. 1890, p. 9–13, 1991. ISSN 0962-8444.

LANE, J. S. **A Fixed-point Method for Computing Steady-state 2D Laser-Fluid Interactions**. Tese (Doutorado) — AFIT Scholar, 2021. Disponível em: <<https://scholar.afit.edu/etd/4883>>.



LANE, R. G.; GLINDEMANN, A.; DAINTY, J. C. Waves in Random Media Simulation of a Kolmogorov phase screen Simulation of a Kolmogorov phase screen. **Waves in Random Media**, v. 2, n. 3, p. 209–224, 1992.

LAWRENCE, A.; AKERS, B. F. Propagation of high energy lasers through clouds: modeling and simulation. **Applied Optics**, v. 59, n. 33, p. 10207, 11 2020. ISSN 1559-128X. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-59-33-10207>>.

LAWRENCE, A. P. **Simulation and Modeling of High Energy Laser-Induced Droplet Shattering In Clouds**. AFIT Theses and Dissertations. 1739 p. Tese (Doutorado) — AFIT Scholar, 2018. Disponível em: <<https://scholar.afil.edu/etd/1739>>.

LIU, K.; OU, S.-C.; TAKANO, Y.; CETOLA, J. Remote sensing of three-dimensional cirrus clouds from satellites: application to continuous-wave laser atmospheric transmission and backscattering. **Applied optics**, Optica Publishing Group, v. 45, n. 26, p. 6849–6859, 2006.

LOUDA, P.; KOZEL, K.; PŘÍHODA, J. Numerical solution of 2D and 3D viscous incompressible steady and unsteady flows using artificial compressibility method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 56, n. 8, p. 1399–1407, 3 2008. ISSN 02712091. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/flid.1709>>.

MILONNI, P. W.; EBERLY, J. H. **Laser physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

MORAIS, P. J. D. D.; SILVA, R. C. D.; ROSSI, W. D.; MOTTA, C. C. Numerical solution of atmospheric laser beam propagation using artificial compressibility and pseudo-spectral methods. In: **2022 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)**. IEEE, 2022. p. 1–5. ISBN 978-1-6654-5273-1. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9992726/>>.

MORRILL, C. D.; AKERS, B. High Energy Laser Propagation: Modeling Scintillation Effects. In: **Imaging and Applied Optics 2019 (COSI, IS, MATH, pcAOP)**. Washington, D.C.: OSA, 2019. Part F164-, p. PTh2D.3. ISBN 978-1-943580-63-7. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=pcAOP-2019-PTh2D.3>>.

MORRILL, D. C.; AKERS, B. High Energy Laser Propagation: Environmental Effects. In: **Imaging and Applied Optics 2017 (3D, AIO, COSI, IS, MATH, pcAOP)**. Washington, D.C.: OSA, 2017. Part F164-, p. PW1D.4. ISBN 978-1-943580-29-3. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=pcAOP-2017-PW1D.4>>.

MORRILL, D. F. **Numerical Simulation of High Energy Laser Propagation**. AFIT-ENC-DS-18-S-003 DEPARTMENT p. Tese (Doutorado) — AFIT Scholar, 2018. Disponível em: <<https://scholar.afil.edu/etd/1013>>.

MORRIS, R. J. Lavoisier and the caloric theory. **The British Journal for the History of Science**, Cambridge University Press, v. 6, n. 1, p. 1–38, 1972.

OJHA, T.; RAPTIS, T. P.; PASSARELLA, A.; CONTI, M. Wireless power transfer with unmanned aerial vehicles: State of the art and open challenges. **Pervasive and Mobile Computing**, Elsevier, p. 101820, 2023.

PEARSON, J. E.; HANSEN, S. Experimental studies of a deformable-mirror adaptive optical system\*. **Journal of the Optical Society of America**, v. 67, n. 3, p. 325, 3 1977. ISSN 0030-3941. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-67-3-325>>.

PENANO, J. R.; SPRANGLE, P.; HAFIZI, B. **Propagation of high energy laser beams through atmospheric stagnation zones**. [S.l.], 2015. 71–86 p. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA444656>>.

PERRY, M. D.; PENNINGTON, D.; STUART, B. C.; TIETBOHL, G.; BRITTEN, J. A.; BROWN, C.; HERMAN, S.; GOLICK, B.; KARTZ, M.; MILLER, J.; POWELL, H. T.; VERGINO, M.; YANOVSKY, V. Petawatt laser pulses. *Optics Letters*, v. 24, n. 3, p. 160, 2 1999. ISSN 0146-9592.

POPE, S. B. . **Turbulent Flows**. 10 th. ed. Cambridge: Cambridge university press, 2000. ISBN 9780521591256. Disponível em: <[www.cambridge.org/9780521591256](http://www.cambridge.org/9780521591256)>.

RAIBLE, D. E.; DINCA, D.; NAYFEH, T. H. Optical frequency optimization of a high intensity laser power beaming system utilizing VMJ photovoltaic cells. *2011 International Conference on Space Optical Systems and Applications, ICSOS'11*, p. 232–238, 2011.

ROGGEMANN, M. C.; LEE, D. J. Two-deformable-mirror concept for correcting scintillation effects in laser beam projection through the turbulent atmosphere. *Applied Optics*, v. 37, n. 21, p. 4577, 7 1998. ISSN 0003-6935. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-37-21-4577>>.

ROGGEMANN, M. C.; WELSH, B.; HARDING, . M.; JOHNSTON, R. A.; LANE, R. G. **High Speed High Fidelity Infrared Scene Simulation using Reconfigurable Computing**. [S.l.], 1996. v. 55, 2161–2170 p. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/NormalSumDistribution.html>>

SAWA, T. Research and development for practical use of underwater optical wireless communication. In: IEEE. **2023 IEEE Underwater Technology (UT)**. [S.l.], 2023. p. 1–5.

SCHMIDT, J. D. **Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB**. Bellingham: SPIE-International Society for Optical Engineering, 2010. ISBN 9780819483263.

SENTOKU, Y.; LISEIKINA, T. V.; ESIRKEPOV, T. Z.; CALIFANO, F.; NAUMOVA, N. M.; UESHIMA, Y.; VSHIVKOV, V. A.; KATO, Y.; MIMA, K.; NISHIHARA, K.; PEGORARO, F.; BULANOV, S. V. High density collimated beams of relativistic ions produced by petawatt laser pulses in plasmas. *Physical Review E*, v. 62, n. 5, p. 7271–7281, 11 2000. ISSN 1063-651X.

SHELDON, S. J.; KNIGHT, L. V.; THORNE, J. M. Laser-induced thermal lens effect: a new theoretical model. *Applied Optics*, v. 21, n. 9, p. 1663, 5 1982. ISSN 0003-6935. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-9-1663>>.

SMITH, D. High-power laser propagation: Thermal blooming. *Proceedings of the IEEE*, v. 65, n. 12, p. 1679–1714, 1977. ISSN 0018-9219. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1455078/>>.

SPRANGLE, P.; PEÑANO, J.; HAFIZI, B. **Optimum wavelength and power for efficient laser propagation in various atmospheric environments**. [S.l.], 2006. v. 2, n. 1, 71–95 p.

SRIRAM, V.; KEARNEY, D. An ultra fast Kolmogorov phase screen generator suitable for parallel implementation. *Optics Express*, v. 15, n. 21, p. 13709, 2007. ISSN 1094-4087. Disponível em: <<https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-15-21-13709>>.

STRASBURG, J. D.; HARPER, W. W. <title>Impact of atmospheric turbulence on beam propagation</title>. In: THOMPSON, W. E.; BRUNSON, R. L. (Ed.). **Laser Systems Technology II**. SPIE, 2004. v. 5413, p. 93–102. Disponible em: <<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=843840>>.

SU, A.; XI, F.; LIU, Z.; NING, Y.; LENG, J.; CHEN, Z.; HE, Y.; XU, X. Analytical study on the steady-state thermal blooming effect of high-power ytterbium-doped fiber lasers propagating through the atmosphere. **Optics Express**, Optica Publishing Group, v. 31, n. 9, p. 13640–13653, 2023.

TRITTON, D. J. **Physical fluid dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

WANG, N.; ZHU, Y.; WEI, W.; CHEN, J.; LIU, S.; LI, P.; WEN, Y. One-to-multipoint laser remote power supply system for wireless sensor networks. **IEEE Sensors Journal**, v. 12, n. 2, p. 389–396, 2012. ISSN 1530437X.

WELSH, B. M.; BASE, W.-p. A. F. A Fourier Series Based Atmospheric Phase Screen Generator for Simulating Anisoplanatic Geometries and Temporal Evolution. **Computer Engineering**, v. 3125, n. 937, p. 1–12, 1997.

WISNIAK, J. Conservation of energy: Readings on the origins of the first law of thermodynamics. part ii. **Educación química**, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Química, v. 19, n. 3, p. 216–225, 2008.

WU, X.; XU, J.; GONG, K.; SHAO, C.; KOU, Y.; ZHANG, Y.; BO, Y.; PENG, Q. Theoretical and experimental studies on high-power laser-induced thermal blooming effect in chamber with different gases. **Chinese Physics B**, v. 31, n. 8, p. 086105, 7 2022. ISSN 1674-1056. Disponible em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1056/ac6165>>.

XIE, L.; SHI, Y.; HOU, Y. T.; LOU, W. Wireless power transfer and applications to sensor networks. **IEEE Wireless Communications**, v. 20, n. 4, p. 140–145, 8 2013. ISSN 1536-1284. Disponible em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6590061/>>.

ZHONG, Z.; QIU, D.; ZHANG, B. Mitigating thermal blooming effect of seawater using self-rotating beam. **Optics Communications**, Elsevier, v. 531, p. 129215, 2023.

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Diretoria de Pesquisa, Desenvolvimento e Ensino**  
**Av. Prof. Lineu Prestes, 2242 – Cidade Universitária CEP: 05508-000**  
**Fone/Fax(0XX11) 3133-8908**  
**SÃO PAULO – São Paulo – Brasil**  
**<http://www.ipen.br>**

**O IPEN é uma Autarquia vinculada à Secretaria de Desenvolvimento, associada  
à Universidade de São Paulo e gerida técnica e administrativamente pela  
Comissão Nacional de Energia Nuclear, órgão do  
Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação.**